

强非线性多自由度动力系统 主共振同伦分析法研究*

原培新¹, 李永强²

(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 沈阳 110004;

2. 东北大学 理学院, 沈阳 110004)

(陈立群推荐)

摘要: 应用同伦分析方法(HAM)解决强非线性多自由度系统在谐波激振力下的主共振问题。同伦分析方法的有效性独立于所考虑的方程中是否含有的小参数。同伦分析方法提供了一个简单的方法,通过一个辅助参数 \hbar 来调节和控制级数解的收敛区域。两个具体算例表明,同伦分析方法得出的结果与修正 Linstedt-Poincaré 法、增量谐波平衡法的解决方案得出的结果相吻合。

关键词: 同伦分析法; 主共振; 强非线性; 级数解; 多自由度

中图分类号: O322 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.10.010

引 言

对于大多数的非线性微分方程来说,都没有一个确切的解析解,这些非线性微分方程应该使用近似方法来解决。很多种近似方法已经制定,以确定(获得)非线性方程组的解。经典的摄动技术,如 Linstedt-Poincaré 法^[1]、多尺度法^[2]、平均法^[3]和 Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky 技术^[4]以及等同的 Galerkin 法,通常仅限于小参数非线性方程组的分析。对于具有多个自由度大型参数非线性方程组来说,这些方法是不够准确的。因此,已经提出对现有方法进行修正,例如,修正 Linstedt-Poincaré 法^[5]、增量谐波平衡法^[6]等等。许多非线性问题不能使用摄动方法来解决,但我们可以使用非摄动方法,如人工小参数法^[7]、 δ -展开法^[8]以及 Adomian 的分解法^[9]。然而,摄动和非摄动方法都不能提供一个简单的方式来调节和控制给定近似级数的收敛区域和收敛速度。

1992 年,廖世俊教授利用拓扑学中同伦的基本思路对非线性问题提出了一般分析方法,即同伦分析方法(HAM)。基于拓扑学中的同伦方法,同伦分析方法的有效性独立于所考虑的方程中是否含有的小参数^[10]。同伦分析方法始终提供了一类含有辅助参数 \hbar 的解答公式,利用辅助参数 \hbar ,收敛区域和收敛速度被很方便的确定。此方法已经成功的应用于解决许多种工程和科学方面的非线性问题,如边界层流动渗透延伸板^[11]、Blasius 粘性流动问题^[12]和非定常边界层的流动伸展平板^[13]。冯和陈^[14]应用同伦方法研究了 Duffing 谐振子。此外,许多类型的

* 收稿日期: 2010-06-04, 修订日期: 2010-09-03
(C) 1942-2021 China Academic Electronic Publishing House. All rights reserved.
基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(90405009)
作者简介: 原培新(1953—),男,辽宁营口市,教授,硕士(联系人, E-mail: neuypx@vip.163.com).

非线性问题也用同伦分析方法解决^[15-21]。

作为一个同伦分析方法的扩展,这种方法被推广到强非线性多自由度动力系统的主共振研究。为了叙述方便,这里只有对立方项非线性系统的处理。平方项非线性系统也可按类似方法进行。显然,同样的步骤可以适用于该系统的其他非线性类型。为了论证同伦分析方法的应用,这里提出了两个主共振实例。所有的例子表明,同伦分析方法得出的结论与修正 Linstedt-Poincaré 法^[22]和增量谐波平衡法^[23]很好地吻合。

1 同伦法的基本原理

立方非线性多自由度系统的振动微分方程为

$$x_n''(t) + 2\eta_n x_n'(t) + \omega_n^2 x_n(t) + \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \Gamma_{nkpq} x_k(t) x_p(t) x_q(t) = f_n \cos(\Omega t),$$

$$n = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

其中, $x_n(t)$, $x_k(t)$, $x_p(t)$, $x_q(t)$ 是未知实函数, η_n 是阻尼系数, ω_n 是线性固有频率, Γ_{nkpq} 是非线性的常数, f_n 是激励力幅值, Ω 是激励力频率, $'$ 表示关于 t 的导数。

定义新变量

$$\tau = \Omega t, \quad x_n(t) = A_n u_n(\tau), \quad (2)$$

其中 A_n 是未知振幅。将方程(2)代入方程(1),我们可得

$$\Omega^2 A_n \ddot{u}_n(\tau) + 2\eta_n A_n \dot{u}_n(\tau) + \omega_n^2 A_n u_n(\tau) + \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \Gamma_{nkpq} A_k A_p A_q u_k(\tau) u_p(\tau) u_q(\tau) = f_n \cos \tau, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

其中,上标点表示关于 τ 的导数。

主共振的周期解可以表示为

$$u_n(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{c_{n,m}}{2} \left[\exp \left(im \left(\frac{\tau \omega_n}{\omega_j} + \beta_n \right) \right) + \exp \left(-im \left(\frac{\tau \omega_n}{\omega_j} + \beta_n \right) \right) \right] \right\}, \quad (4)$$

其中, $c_{n,m}$ 是未知实数, ω_j 是 ω_n 根据所需的基本强迫响应选择的一个值。例如,当发生主共振 $\Omega \approx \omega_1$ 时,有必要让 $\omega_j = \omega_1$, 当 $\Omega \approx \omega_2$ 时,那么, $\omega_j = \omega_2$ 。 β_n 是相位角。

根据方程(3),我们定义非线性算子

$$N_n [\Phi_1(\tau; q), \Phi_2(\tau; q), \dots, \Phi_N(\tau; q), \Lambda_1(q), \Lambda_2(q), \dots, \Lambda_N(q)] = \Omega^2 \Lambda_n(q) \Phi_n''(\tau; q) + 2\eta_n \Lambda_n(q) \Phi_n'(\tau; q) + \omega_n^2 \Lambda_n(q) \Phi_n(\tau; q) + \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \Gamma_{nkpq} \Lambda_k(q) \Lambda_p(q) \Lambda_q(q) \Phi_k(\tau; q) \Phi_p(\tau; q) \Phi_q(\tau; q) - f_n \cos \tau, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

其中, $q \in [0, 1]$ 是一个嵌入参数, $\Phi_n(\tau; q)$ 是未知函数 $u_n(\tau)$ 的一种映射, $\Lambda_n(q)$ 是未知振幅 A_n 的一种映射。通过推广传统的同伦方法, Liao 教授^[10]构建了所谓的零阶变形方程

$$(1-q)\ell_n [\Phi_n(\tau; q) - u_{n,0}(\tau)] = q\hbar H(\tau) N_n [\Phi_1(\tau; q), \Phi_2(\tau; q), \dots, \Phi_N(\tau; q), \Lambda_1(q), \Lambda_2(q), \dots, \Lambda_N(q)],$$

$$n = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

其中, \hbar 是一个非零辅助参数, $H(\tau)$ 是一个辅助函数, ℓ_n 是一个辅助线性算子, $u_{n,0}(\tau)$ 是 $u_n(\tau)$ 的一个初始猜测。重要的是,在同伦分析法中,我们有很大的自由去选择辅助线性算子和辅助参数。显然,当 $q = 0$ 和 $q = 1$ 时,分别有

$$\Phi_n(\tau; 0) = u_{n,0}(\tau), \quad \Phi_n(\tau; 1) = u_n(\tau), \quad \Lambda_n(1) = A_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

因此,当 q 从 0 增加到 1 时,解 $\Phi_n(\tau; q)$ 从初始猜测解 $u_{n,0}(\tau)$ 连续变化到方程(3)的未知解 $u_n(\tau)$ ($n = 1, 2, \dots, N$)。同样, $\Lambda_n(q)$ 从初始猜测 $A_{n,0}$ 连续变化到未知振幅 A_n 。

根据方程(4),我们应该选择辅助线性算子

$$\ell_n[\Phi_n(\tau; q)] = \Omega^2 \left[\frac{\partial^2 \Phi_n(\tau; q)}{\partial \tau^2} + \left(\frac{\omega_n}{\omega_j} \right)^2 \Phi_n(\tau; q) \right], \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

$u_n(\tau)$ 的初始猜测可以表示为

$$u_{n,0}(\tau) = \frac{1}{2} \left\{ \exp \left[i \left(\frac{\omega_n \tau}{\omega_j} + \beta_n \right) \right] + \exp \left[-i \left(\frac{\omega_n \tau}{\omega_j} + \beta_n \right) \right] \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

将 $\Phi_n(\tau; q)$ 和 $\Lambda_n(q)$ ($n = 1, 2, \dots, N$) 展开成关于 q 的 Taylor 级数,我们得到

$$\Phi_n(\tau; q) = u_{n,0}(\tau) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_{n,m}(\tau) q^m, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

$$\Lambda_n(q) = A_{n,0} + \sum_{m=1}^{+\infty} A_{n,m} q^m, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

其中

$$u_{n,m}(\tau) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial \Phi_n^m(\tau; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad (12)$$

$$A_{n,m} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial \Lambda_n^m(q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}. \quad (13)$$

如果辅助参数 \hbar 和辅助函数 $H(\tau)$ 选择正确,当 $q = 1$ 时,级数(10)和(11)收敛,那么我们有

$$u_n(\tau) = u_{n,0}(\tau) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_{n,m}(\tau), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (14)$$

$$A_n = A_{n,0} + \sum_{m=1}^{+\infty} A_{n,m}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

由 Liao 教授证明,其必定为原始非线性方程组的其中一个解^[10]。

定义矢量

$$\tilde{U}_m = \{ \bar{U}_{1,m}, \bar{U}_{2,m}, \bar{U}_{3,m}, \dots, \bar{U}_{n,m} \}, \quad n = 1, 2, \dots, N; m = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

$$\tilde{A}_m = \{ \bar{A}_{1,m}, \bar{A}_{2,m}, \bar{A}_{3,m}, \dots, \bar{A}_{n,m} \}, \quad n = 1, 2, \dots, N; m = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

其中 $\bar{U}_{n,m} = \{ u_{n,0}(\tau), u_{n,1}(\tau), u_{n,2}(\tau), \dots, u_{n,m}(\tau) \}$, $\bar{A}_{n,m} = \{ A_{n,0}, A_{n,1}, A_{n,2}, \dots, A_{n,m} \}$ 。

将零阶形变方程(6)对嵌入参数 q 求 m 阶导数,然后令 $q = 0$,并除以阶乘 $m!$,我们得所谓的 m 阶形变方程

$$\ell_n [u_{n,m}(\tau) - \chi_{n,m} u_{n,m-1}(\tau)] = \hbar H(\tau) R_{n,m}(\tilde{U}_{m-1}, \tilde{A}_{m-1}), \quad n = 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, \infty, \quad (16)$$

其中

$$R_{n,m}(\tilde{U}_{m-1}, \tilde{A}_{m-1}) =$$

$$\frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1} N_n[\Phi_1(\tau; q), \Phi_2(\tau; q), \dots, \Phi_N(\tau; q), \Lambda_1(q), \Lambda_2(q), \dots, \Lambda_N(q)]}{dq^{m-1}} \right|_{q=0} =$$

$$\Omega^2 \sum_{i=0}^{m-1} [A_{n,i} u_{n,m-1-i}(\tau)] + 2\eta_n \sum_{i=0}^{m-1} [A_{n,i} u'_{n,m-1-i}(\tau)] + \omega_n^2 \sum_{i=0}^{m-1} [A_{n,i} u_{n,m-1-i}(\tau)] +$$

(C)1994-2021, China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.
 $\sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \Gamma_{nkpq} \sum_{i=0}^m \left\{ \left[\sum_{j=0}^i \sum_{r=0}^{i-j} A_{k,j} A_{p,r} A_{q,i-j-r} \right] \times \right.$

$$\left[\sum_{l=0}^{m-1-i} \sum_{s=0}^{m-1-i-l} u_{k,l}(\tau) u_{p,s}(\tau) u_{q,m-1-i-l-s}(\tau) \right] - \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1} f_n \cos \tau}{dq^{m-1}} \right|_{q=0}, \quad n = 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, \infty, \quad (17)$$

并且

$$\chi_{n,m} = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, \infty.$$

为了遵循解表达原则和系数遍历性原则^[10], 相应的辅助函数可以被特定为

$$H(\tau) = 1. \quad (18)$$

结果表明, 方程(17)包含了所谓的长期项. 方程(17)可表示为

$$R_{n,m}(\tilde{U}_{m-1}, \tilde{A}_{m-1}) = g_{n,0}(A_{1,m-1}, A_{2,m-1}, \dots, A_{N,m-1}) \exp(\pm i\omega_n \tau / \omega_j) + \sum_{k=1}^{K_m} g_{n,k}(\tilde{A}_{m-1}) \exp(\pm i\eta_k \omega_n \tau / \omega_j), \quad n = 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, \infty, \quad (19)$$

其中, K_m 是一个取决于阶数 m 的正整数, η_k 是不等于 1 的实数. 为了避免长期项, 我们必须强迫 $\exp(\pm i\omega_n \tau / \omega_j)$ 的系数等于 0,

$$g_{n,0}(A_{1,m-1}, A_{2,m-1}, \dots, A_{N,m-1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, \infty, \quad (20)$$

这样就能提供给我们一组关于 $A_{n,m-1}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) 的代数方程.

解出 $A_{n,m-1}$ 后, $u_{n,m}(\tau)$ 可以由 m 阶变形方程(16)解得.

例如, 当 $N = 2, \omega_2 = 3\omega_1, \Omega = \omega_1, m = 1$ 时, $\omega_j = \omega_1$. 根据方程(17), 我们得

$$R_{n,1}(\tilde{U}_0, \tilde{A}_0) = \Omega^2 A_{n,0} u''_{n,0}(\tau) + 2\eta_n A_{n,0} u'_{n,0}(\tau) + \omega_n^2 A_{n,0} u_{n,0}(\tau) + \sum_{k=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \Gamma_{nkpq} A_{k,0} A_{p,0} A_{q,0} u_{k,0}(\tau) u_{p,0}(\tau) u_{q,0}(\tau) - f_n \cos \tau, \quad n = 1, 2. \quad (21)$$

将方程(9)代入方程(21), 有

$$R_{1,1}(\tilde{U}_0, \tilde{A}_0) = \frac{1}{2} \exp(i\tau) \left\{ \exp(i\beta_1) \left[(\omega_1^2 - \Omega^2) A_{1,0} + i2\eta_1 A_{1,0} + \frac{1}{4} \beta_{1111} A_{1,0}^3 + \frac{1}{2} \beta_{1212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \right] + \frac{1}{4} \beta_{1121} A_{1,0}^2 A_{2,0} \exp[i(-2\beta_1 + \beta_2)] - f_1 \right\} + \frac{1}{2} \exp(i3\tau) \left[\frac{1}{12} \beta_{1111} A_{1,0}^3 \exp(i3\beta_1) + \frac{1}{4} \beta_{1222} A_{2,0}^3 \exp(i\beta_2) + \frac{1}{2} \beta_{1121} A_{1,0}^2 A_{2,0} \exp(i\beta_2) \right] + \frac{1}{2} \exp(i5\tau) \left\{ \frac{1}{4} \beta_{1121} A_{1,0}^2 A_{2,0} \exp[i(2\beta_1 + \beta_2)] + \frac{1}{4} \beta_{1212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \exp[i(-\beta_1 + 2\beta_2)] \right\} + \frac{1}{4} \beta_{1212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \exp[i(7\tau + \beta_1 + 2\beta_2)] + \frac{1}{12} \beta_{1222} A_{2,0}^3 \exp[i(9\tau + 3\beta_2)] + cc, \quad (22)$$

$$R_{2,1}(\tilde{U}_0, \tilde{A}_0) = \frac{1}{2} \exp(i\tau) \left\{ \exp(i\beta_1) \left[\frac{1}{4} \beta_{2111} A_{1,0}^3 + \frac{1}{2} \beta_{2212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \right] + \frac{1}{4} \beta_{2121} A_{1,0}^2 A_{2,0} \exp[i(-2\beta_1 + \beta_2)] - f_2 \right\} + \frac{1}{2} \exp(i3\tau) \left\{ \exp(i\beta_2) \left[\frac{1}{4} \beta_{2222} A_{2,0}^3 + \frac{1}{2} \beta_{2111} A_{1,0}^3 \exp(i3\beta_1) \right] + \frac{1}{2} \beta_{2121} A_{1,0}^2 A_{2,0} \exp(i\beta_2) + (\omega_2^2 - 9\Omega^2) A_{2,0} + i2\eta_2 A_{2,0} \right\} + \frac{1}{12} \beta_{2111} A_{1,0}^3 \exp(i3\beta_1) \left. \right\} +$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \beta_{2212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \exp[i(7\tau + \beta_1 + 2\beta_2)] + \frac{1}{12} \beta_{2222} A_{2,0}^3 \exp[i(9\tau + 3\beta_2)] + \\ & \frac{1}{2} \exp(i5\tau) \left\{ \frac{1}{4} \beta_{2121} A_{1,0}^2 A_{2,0} \exp[i(2\beta_1 + \beta_2)] + \right. \\ & \left. \frac{1}{4} \beta_{2212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \exp[i(-\beta_1 + 2\beta_2)] \right\} + cc, \end{aligned} \quad (23)$$

其中, $\beta_{mpq} = \Gamma_{mpq} + \Gamma_{mqp} + \Gamma_{pmq}$, cc 表示前面各项的共轭。

为了避免长期项,我们必须强迫方程(22)中 $\exp(i\tau)$ 的系数和方程(23)中 $\exp(i3\tau)$ 的系数等于 0,这样方程(20)可表示为

$$\begin{aligned} g_{1,0}(A_{1,0}, A_{2,0}) = & \exp(i\beta_1) \left[(\omega_1^2 - \Omega^2) A_{1,0} + i2\eta_1 A_{1,0} + \frac{1}{4} \beta_{1111} A_{1,0}^3 + \frac{1}{2} \beta_{1212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \right] + \\ & \frac{1}{4} \beta_{1121} A_{1,0}^2 A_{2,0} \exp[i(-2\beta_1 + \beta_2)] - f_1 = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} g_{2,0}(A_{1,0}, A_{2,0}) = & \exp(i\beta_2) \left[\frac{1}{4} \beta_{2222} A_{2,0}^3 + \frac{1}{2} \beta_{2121} A_{1,0}^2 A_{2,0} \exp(i\beta_2) + (\omega_2^2 - 9\Omega^2) A_{2,0} + i2\eta_2 A_{2,0} \right] + \\ & \frac{1}{12} \beta_{2111} A_{1,0}^3 \exp(i3\beta_1) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$A_{1,0}, A_{2,0}, \beta_1$ 和 β_2 可由方程(24)和方程(25)求出。

消除长期项后,方程(16)变为

$$\begin{aligned} u_{1,1}''(\tau) + u_{1,1}(\tau) = & \frac{\hbar}{\Omega^2} \left\{ \frac{1}{2} \exp(i3\tau) \left[\frac{1}{12} \beta_{1111} A_{1,0}^3 \exp(i3\beta_1) + \right. \right. \\ & \frac{1}{4} \beta_{1222} A_{2,0}^3 \exp(i\beta_2) + \frac{1}{2} \beta_{1121} A_{1,0}^2 A_{2,0} \exp(i\beta_2) \left. \right] + \\ & \frac{1}{2} \exp(i5\tau) \left[\frac{1}{4} \beta_{1121} A_{1,0}^2 A_{2,0} \exp(i2\beta_1 + i\beta_2) + \right. \\ & \left. \frac{1}{4} \beta_{1212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \exp(-i\beta_1 + i2\beta_2) \right] + \frac{1}{4} \beta_{1212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \exp[i(7\tau + \beta_1 + 2\beta_2)] + \\ & \left. \frac{1}{12} \beta_{1222} A_{2,0}^3 \exp[i(9\tau + 3\beta_2)] + cc \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} u_{2,1}''(\tau) + u_{2,1}(\tau) = & \frac{\hbar}{4\Omega^2} \left\{ \exp(i\tau) \left[\exp(i\beta_1) \left(\frac{1}{2} \beta_{2111} A_{1,0}^3 + \beta_{2212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \right) + \right. \right. \\ & \beta_{2121} A_{1,0}^2 A_{2,0} \exp(-i2\beta_1 + i\beta_2) - f_2 \left. \right] + \frac{1}{2} \exp(i5\tau) \left[\beta_{2121} A_{1,0}^2 A_{2,0} \exp(i2\beta_1 + i\beta_2) + \right. \\ & \left. \beta_{2212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \exp(-i\beta_1 + i2\beta_2) \right] + \beta_{2212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \exp[i(7\tau + \beta_1 + 2\beta_2)] + \\ & \left. \frac{1}{3} \beta_{2222} A_{2,0}^3 \exp[i(9\tau + 3\beta_2)] + cc \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

$u_{1,1}(\tau)$ 和 $u_{2,1}(\tau)$ 可由方程(26) 方程(27) 求出。用这种方法,我们成功地得到 $A_{n,m-1}$ 和 $u_{n,m}(\tau)$ ($n = 1, 2; m = 1, 2, 3, \dots$)。

已经证明,只要由同伦分析方法得到的解的级数收敛,则它一定是精确解中的一个。请注意,解的级数(14)和(15)包含辅助参数 \hbar , 它为我们提供了一个简单的方法来调整和控制的级数解收敛。一般情况下,通过 Liao 教授^[10] 指出的所谓的 \hbar 曲线, \hbar 的有效区域是一条水平线段。我们可以绘制 A_n 的 \hbar 曲线,来确定 \hbar 的有效区域。

2 具体算例

在这一部分,同伦分析法应用于一个典型的立方非线性二自由度系统.控制方程可写为^[19]

$$x_1''(t) + \omega_1^2 x_1(t) + k_{11} x_1^3 + k_{12} x_1^2 x_2 + k_{13} x_1 x_2^2 + k_{14} x_2^3 = f_1 \cos(\Omega t), \quad (28)$$

$$x_2''(t) + \omega_2^2 x_2(t) + k_{21} x_1^3 + k_{22} x_1^2 x_2 + k_{23} x_1 x_2^2 + k_{24} x_2^3 = f_2 \cos(\Omega t), \quad (29)$$

其中, $\omega_1 = 1.0, \omega_2 = 3.0, k_{11} = 0.278\ 8, k_{12} = -0.311\ 1, k_{13} = 1.116, k_{14} = -0.386\ 4, k_{21} = k_{12}/3, k_{22} = k_{13}, k_{23} = 3k_{14}, k_{24} = 3.870\ 3$. 分别考虑 $\Omega \approx \omega_1$ 和 $\Omega \approx \omega_2$ 时的两个主共振. 为了显示同伦分析法的精确性,将结果与改进的 Linstedt-Poincaré (MLP) 和增量谐波平衡法 (IHB)^[21-22] 进行比较.

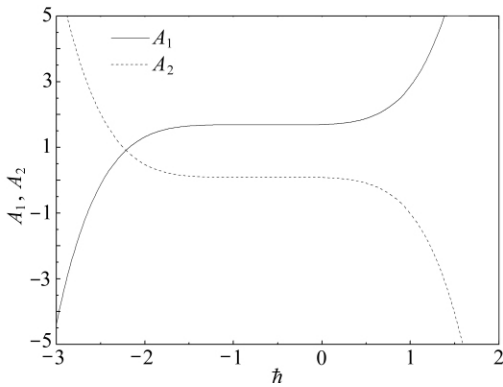


图 1 $\Omega = \omega_1, f_1 = 1.0, f_2 = 0$ 时,由 6 阶近似解给出的 A_1 和 A_2 的 h 曲线

2.1 Ω 接近 ω_1 的情况

在这个实例中,我们让 Ω 接近 ω_1 , 相当于 $\omega_j = \omega_1$. 这样方程(9)变为

$$u_{1,0}(\tau) = \cos(\tau), u_{2,0}(\tau) = \cos(3\tau). \quad (30)$$

在图 1 中,我们绘制了 $\Omega = \omega_1, f_1 = 1.0, f_2 = 0$ 时,由 6 阶近似解给出的 A_1 和 A_2 的 h 曲线. 其结果是,在这种情况下, h 的有效区域为 $-1.0 < h < 0$.

表 1 列出了 $h = -0.5$ 时,对于各阶近似的 A_1 和 A_2 的级数. 显然,当近似的阶数等于 6 时, A_1 和 A_2 的级数收敛. 在下面的计算中,我们取近似阶数为 6.

表 1 $\Omega = \omega_1, f_1 = 1.0, f_2 = 0$ 时 A_1 和 A_2 的近似

近似阶数	A_1	A_2
1	1.691 285 261	0.077 724 184 2
2	1.684 283 406	0.092 383 615 66
3	1.681 344 742	0.083 638 157 65
4	1.680 199 461	0.086 056 186 12
5	1.679 848 657	0.083 232 143 08
6	1.679 848 607	0.083 231 106 86
7	1.679 848 600	0.083 231 087 63
8	1.679 848 584	0.083 231 076 65
9	1.679 848 573	0.083 231 063 16
10	1.679 848 543	0.083 231 054 54

图 2 和图 3 显示了在 $f_1 = 1.0$ 和 $f_2 = 0$ 的激励下,主共振曲线 $\Omega-A_1$ 和 $\Omega-A_2$. 显然,同伦分析法给出的解与 IHB 法的解一致,但在整个区域上与 MLP 方法的解有细小的差别.

2.2 Ω 接近 ω_2 的情况

在这个实例中,我们应该让 Ω 接近于 ω_2 , 相当于 $\omega_j = \omega_2$. 这样方程(9)变为

$$u_{1,0}(\tau) = \cos(\tau/3), u_{2,0}(\tau) = \cos(\tau). \quad (31)$$

当 $m = 1$ 时,将方程(31)代入方程(17),有

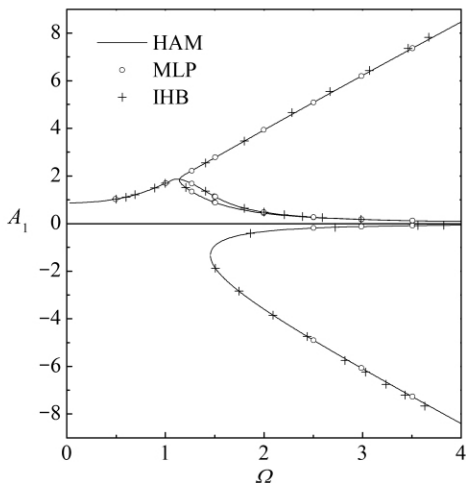


图2 $\Omega = \omega_1, f_1 = 1.0, f_2 = 0$ 时
主共振曲线 $\Omega-A_1$

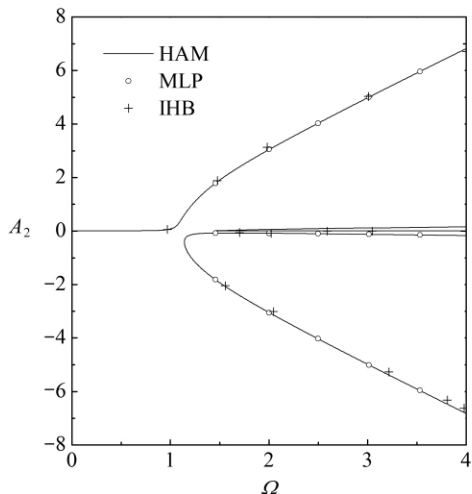


图3 $\Omega = \omega_1, f_1 = 1.0, f_2 = 0$ 时
主共振曲线 $\Omega-A_2$

$$R_{1,1}(\tilde{\mathbf{U}}_0, \tilde{\mathbf{A}}_0) =$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\omega_1^2 - \frac{\Omega^2}{9} \right) A_{1,0} + \frac{1}{4} \beta_{1111} A_{1,0}^3 + \frac{1}{4} \beta_{1121} A_{1,0}^2 A_{2,0} + \frac{1}{2} \beta_{1212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \right] \cos\left(\frac{\tau}{3}\right) + \\ & \left(\frac{1}{12} \beta_{1111} A_{1,0}^3 + \frac{1}{4} \beta_{1222} A_{2,0}^3 + \frac{1}{2} \beta_{1121} A_{1,0}^2 A_{2,0} - f_1 \right) \cos(\tau) + \\ & \left(\frac{1}{4} \beta_{1121} A_{1,0}^2 A_{2,0} + \frac{1}{4} \beta_{1212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \right) \cos\left(\frac{5\tau}{3}\right) + \\ & \frac{1}{4} \beta_{1212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \cos\left(\frac{7\tau}{3}\right) + \frac{1}{12} \beta_{1222} A_{2,0}^3 \cos(3\tau), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} R_{2,1}(\tilde{\mathbf{U}}_0, \tilde{\mathbf{A}}_0) = & \left(\frac{1}{4} \beta_{2111} A_{1,0}^3 + \frac{1}{2} \beta_{2212} A_{1,0} A_{2,0}^2 + \frac{1}{4} \beta_{2121} A_{1,0}^2 A_{2,0} \right) \cos\left(\frac{\tau}{3}\right) + \\ & \left[\frac{1}{12} \beta_{2111} A_{1,0}^3 + \frac{1}{4} \beta_{2222} A_{2,0}^3 + \frac{1}{2} \beta_{2121} A_{1,0}^2 A_{2,0} + (\omega_2^2 - \Omega^2) A_{2,0} - f_2 \right] \cos(\tau) + \\ & \left(\frac{1}{4} \beta_{2121} A_{1,0}^2 A_{2,0} + \frac{1}{4} \beta_{2212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \right) \cos\left(\frac{5\tau}{3}\right) + \\ & \frac{1}{4} \beta_{2212} A_{1,0} A_{2,0}^2 \cos\left(\frac{7\tau}{3}\right) + \frac{1}{12} \beta_{2222} A_{2,0}^3 \cos(3\tau), \end{aligned} \quad (33)$$

这里 $\beta_{mnpq} = \Gamma_{mnpq} + \Gamma_{mnpq} + \Gamma_{nmpq}$ 。

为了避免长期项,我们必须强迫方程(32)中 $\cos(\tau/3)$ 的系数和方程(33)中 $\cos\tau$ 的系数等于0,这样方程(20)可以表示为

$$g_{1,0}(A_{1,0}, A_{2,0}) = \left[\left(\omega_1^2 - \frac{\Omega^2}{9} \right) + \frac{1}{4} \beta_{1111} A_{1,0} + \frac{1}{4} \beta_{1121} A_{1,0} A_{2,0} + \frac{1}{2} \beta_{1212} A_{2,0}^2 \right] A_{1,0} = 0, \quad (34)$$

$$g_{2,0}(A_{1,0}, A_{2,0}) = \frac{1}{12} \beta_{2111} A_{1,0}^3 + \frac{1}{4} \beta_{2222} A_{2,0}^3 + \frac{1}{2} \beta_{2121} A_{1,0}^2 A_{2,0} + (\omega_2^2 - \Omega^2) A_{2,0} - f_2 = 0, \quad (35)$$

$A_{1,0}$ 和 $A_{2,0}$ 可由方程(34)和方程(35)解得。

在图4中,我们绘制了 $\Omega = \omega_2, f_1 = 0, f_2 = 1.0$ 时,6阶近似解给出的 A_2 的 h 曲线。其

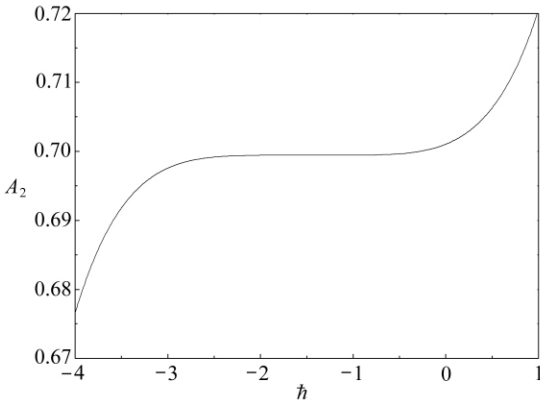


图4 $\Omega = \omega_2, f_1 = 0, f_2 = 1.0$ 时6阶近似给出的 A_2 的 h 曲线

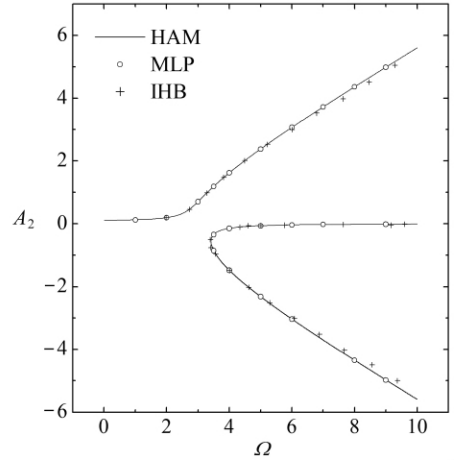


图5 $\Omega = \omega_2, f_1 = 0, f_2 = 1.0$ 时,在 $A_{1,0} = 0$ 的条件下主共振曲线

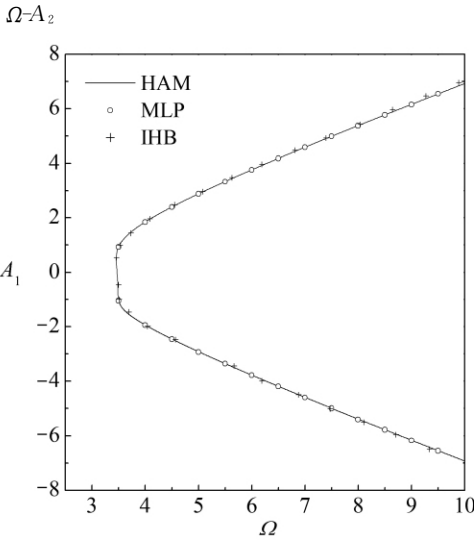


图6 $\Omega = \omega_2, f_1 = 0, f_2 = 1.0$ 时,在 $A_{1,0} \neq 0$ 的条件下主共振曲线 $\Omega-A_1$

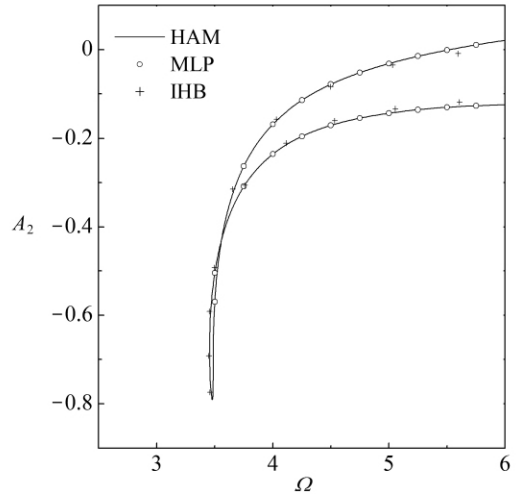


图7 $\Omega = \omega_2, f_1 = 0, f_2 = 1.0$ 时,在 $A_{1,0} \neq 0$ 的条件下主共振曲线 $\Omega-A_2$

结果是,在这种情况下 h 的有效区域为 $-2.0 < h < 1.0$ 。

显然, $A_{1,0}$ 的解是在 $A_{1,0} = 0$ 或 $A_{1,0} \neq 0$ 时由方程(34)得到的。当 $A_{1,0} = 0$ 时,方程(35)变为

$$g_{2,0}(A_{1,0}, A_{2,0}) = \frac{1}{4} \beta_{2222} A_{2,0}^3 + (\omega_2^2 - \Omega^2) A_{2,0} - f_2 = 0. \tag{36}$$

图5表示了在 $f_1 = 0$ 和 $f_2 = 1.0$ 激励下, $A_{1,0} = 0$ 时主共振曲线 $\Omega-A_2$ 。

当 $A_{1,0} \neq 0$ 时,方程(34)变为

$$\left(\omega_1^2 - \frac{\Omega^2}{9}\right) + \frac{1}{4} \beta_{1111} A_{1,0}^2 + \frac{1}{4} \beta_{1121} A_{1,0} A_{2,0} + \frac{1}{2} \beta_{212} A_{2,0}^2 = 0. \tag{37}$$

图6和图7表示了,在 $f_1 = 0$ 和 $f_2 = 1.0$ 激励下, $A_{1,0} \neq 0$ 时主共振曲线 $\Omega-A_1$ 和 $\Omega-A_2$ 。

展示这些图像的目的是为了证明同伦分析法的准确性,并说明同伦分析法的结果非常接近 MLP 和 IHB 的计算结果.因此,同伦分析法适合于强非线性多自由度系统的主共振.

3 结 论

在本文中,用同伦分析方法(HAM)来获得强非线性多自由度系统的主共振的周期解.同伦分析方法为我们提供了一个方便的方法来控制渐进级数的收敛,这是同伦分析方法和其他方法根本性的区别.显然看出,同伦分析方法对得出强非线性多自由度系统的解析解是非常强大和有效的.

致谢 作者衷心感谢廖世俊教授的宝贵建议.

参考文献:

- [1] Melvin P J. On the construction of Poincaré-Lindstedt solutions: the nonlinear oscillator equation [J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1977, **33**(1): 161-194.
- [2] Nayfeh A H. *Perturbation Methods*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1973.
- [3] Larionov G S, Khoang V T. The method of averaging in nonlinear dynamical problems occurring in the theory of viscoelasticity[J]. *Polymer Mechanics*, 1972, **8**(1): 31-35.
- [4] Kakutani T, Sugimoto N. Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method for nonlinear wave modulation [J]. *Physics of Fluids*, 1974, **17**(8): 1617-1625.
- [5] Cheung Y K, Chen S H, Lau S L. Modified Linstedt-Poincaré method for certain strongly nonlinear oscillators[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1991, **26**(3): 367-378.
- [6] Pierre C, Dowell E H. A study of dynamic instability of plates by an extended incremental harmonic balance method[J]. *Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1985, **52**(3): 693-697.
- [7] Andrianov I V, Danishevs'kyy V V, Awrejcewicz J. An artificial small perturbation parameter and nonlinear plate vibrations[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, **283**(3): 561-571.
- [8] Karmishin A V, Zhukov A I, Kolosov V G. *Methods of Dynamics Calculation and Testing for Thin-Walled Structures*[M]. Moscow: Mashinostroyenie, 1990.
- [9] Adomian G. A new approach to the heat equation—an application of the decomposition method[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1986, **113**(1): 202-209.
- [10] Liao S J. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*[M]. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.
- [11] Liao S J. A new branch of solutions of boundary-layer flows over an impermeable stretched plate [J]. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 2005, **48**(12): 2529-2539.
- [12] Liao S J. An explicit totally analytic approximation of Blasius viscous flow problems[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1999, **34**(4): 759-778.
- [13] Liao S J. Series solutions of unsteady boundary-layer flows over a stretching flat plate[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 2006, **117**(3): 239-264.
- [14] 冯少东, 陈立群. Duffing 简谐振子同伦分析法求解[J]. *应用数学和力学*, 2009, **30**(9): 1015-1020.
- [15] Liao S J. An approximate solution technique which does not depend upon small parameters: a special example[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1995, **30**(3): 371-380.
- [16] Liao S J. An approximate solution technique which does not depend upon small parameters (part 2): an application in fluid mechanics[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1997, **32**(5): 815-822.

- [17] 廖世俊. 同伦分析方法: 一种新的求解非线性问题的近似解析方法[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(10): 885-890.
- [18] Wen J M, Cao Z C. Sub-harmonic resonances of nonlinear oscillations with parametric excitation by means of the homotopy analysis method[J]. *Physics Letters A*, 2007, **371**(5): 427-431.
- [19] Tan Y, Abbasbandy S. Homotopy analysis method for quadratic Riccati differential equation[J]. *Communication Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2008, **13**(3): 539-546.
- [20] Abbasbandy S. Approximate solution for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts by means of the homotopy analysis method[J]. *Chemical Engineering Journal*, 2008, **136**(2): 144-150.
- [21] 李书, 王波, 胡继忠. 结构动力学逆特征值问题的同伦解法[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(5): 529-534.
- [22] Chen S H, Cheung Y K. A modified lindstedt-poincare method for a strongly nonlinear two degree-of-freedom system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, **193**(4): 751-762.
- [23] Cheung Y K, Chen S H, Lau S L. Application of incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, **140**(2): 273-286.

Study on Primary Resonance of Multi-Degree-of-Freedom Dynamic Systems With Strongly Non-Linearity Using the Homotopy Analysis Method

YUAN Pei-xin¹, LI Yong-qiang²

(1, *Mechanical Engineering and Automation School*,

Northeastern University, Shenyang 110004, P. R. China;

2. *College of Science, Northeastern University, Shenyang 110004, P. R. China*)

Abstract: The homotopy analysis method (HAM) was presented for the primary resonance of multi-degree-of-freedom system with strongly non-linearity excited by harmonic forces. The validity of the HAM is independent of whether or not there are small parameters in the considered equation. The HAM has provided a simple way to adjust and control the convergence region of the series solution by means of an auxiliary parameter \hbar . Two examples were presented to show that the HAM solutions agree well with the results of the modified Linstedt-Poincaré method and the incremental harmonic balance method.

Key words: homotopy analysis method; primary resonance; strongly non-linearity; series solution; multi-degree-of-freedom