

梁-柱体系在椭圆型荷载作用下的 精确解和动力屈曲分析*

H·S·阿尔乔姆, L·艾登

(伊兹密尔理工大学 机械工程系, 乌拉-伊兹密尔 35430, 土耳其)

(陈立群推荐)

摘要: 当梁-柱体系两端铰支时,在随时间周期变化的椭圆型轴向压力的作用下,给出了其动力稳定性问题的一个闭合解.采用 Fourier 正弦级数形式,以及解析地求解由此产生的常微分方程,求得控制方程的解.找到动力屈曲问题精确的解析解是有困难的,然而该体系的物理特性,为精确解的存在提供了充分的依据.另外,还研究了体系的频率响应特性,静力、驱动力和频率比对临界屈曲荷载的影响.

关键词: 动力屈曲; 精确解; Jacobi 椭圆函数; 稳定-不稳定

中图分类号: T311.3 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.10.012

引 言

在结构工程设计中,梁-柱体系的动力学特性分析非常重要.当结构的部件受到动荷载作用时,就可能遇到动力学屈曲问题.动力学稳定问题取决于作用力以及结构的几何形状.本文考虑梁-柱体系在椭圆型脉动荷载作用下的精确解.脉动荷载^[1]常用来近似结构柱上的旋转机械,如涡轮机和发电机.

有一些研究者对动力学稳定问题的解析解进行过研究.文献[2]在一般边界条件下,对2D 剪切梁-柱体系的稳定性和动力学分析进行了研究.分析结果表明,剪切梁和剪切梁-柱体系的稳定性和动力学性能,由弯矩方程控制.Pavlovic 等^[3]考虑了轴向荷载和端点弯矩的共同作用下,薄壁梁的动力学稳定性问题,得到了简支边界条件下闭合形式的解析解.利用 Liapunov 直接法,作为随机过程方差、阻尼系数和梁的几何物理参数的函数,得到了几乎可靠的渐近稳定性条件和一致随机的稳定性条件.Sampaio 和 Hundhausen^[4]建立起的斜梁-柱体系理论,同时考虑了分布重量和倾斜的梁-柱体系.他们用能量法,得到了体系的微分方程,并且得到了超几何函数形式的闭合解.Zuniga^[5]研究了两端铰支的梁-柱体系在受椭圆型轴向脉动力 $\alpha c n^2(\tau, k^2)$ 作用时的动力响应问题.得到了由两端铰支梁-柱体系建立的方程(即著名的 Lamé 方程)的一般精确解.

* 收稿日期: 2009-10-30; 修订日期: 2010-07-08

作者简介: H. Secil Artem, 博士(联系人. E-mail: secilartem@iyte.edu.tr).

本文原文为英文,黄雅意译,张禄坤校.

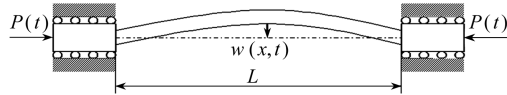
本文研究的目的是:(i) 找出 Lamé 方程

$$\frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1(\tau) [d_1 + d_{2c} \text{cn}^2(\tau, k^2) + d_{2s} \text{sn}^2(\tau, k^2) + d_{2d} \text{dn}^2(\tau, k^2)] = 0$$

的解析解;(ii) 研究梁-柱体系两端铰支时,在随时间变化的椭圆型荷载 $a_1 \text{cn}^2(\tau, k^2) + a_2 \text{sn}^2(\tau, k^2) + a_3 \text{dn}^2(\tau, k^2)$ 作用下的动力响应特性。

1 受随时间变化的轴向荷载作用的两端铰支弹性梁-柱体系

考虑等截面梁-柱体系两端铰支时的动力稳定性(见图1)。体系的两端承受随时间变化的轴向压力



$$P(t) = P_0 + P_1(t), \quad (1)$$

其中, P_0 为静力, $P_1(t)$ 为随时间椭圆型变化的力。梁-柱体系的控制方程为

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \quad (2)$$

图1 梁-柱体系受随时间变化荷载的作用

必须与以下的边界条件一起求解:

$$w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} w(0, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} w(L, t) = 0, \quad (4)$$

其中, $w(x, t)$ 为横向挠度, ρ 为单位长度的密度, E , I 和 A 分别表示弹性模量、惯性矩和横截面积。该问题的解,可以方便地将 $w(x, t)$ 表示成 Fourier 正弦级数

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (5)$$

将方程(5)代入方程(2),得到关于 $u_n(t)$ 的线性微分方程组如下:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\rho A \ddot{u}_n(t) - P(t) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 u_n(t) + EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 u_n(t) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0. \quad (6)$$

在屈曲问题中,由于只有最小特征值才有物理意义,故应将方程(6)改写为如下基频模式 ($n = 1$):

$$\left[\rho A \ddot{u}_1(t) - P(t) \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 u_1(t) + EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 u_1(t) \right] \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = 0. \quad (7)$$

方程(7)要有非平凡解,方括号里面的式子必须等于0:

$$\rho A \ddot{u}_1(t) - P(t) \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 u_1(t) + EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 u_1(t) = 0. \quad (8)$$

从而,问题被简化为一个二阶的常微分方程。为了数值分析方便,引入无量纲变量 $\tau = \Omega t$, 并定义 Euler 荷载 $P_c = \pi^2 EI / L^2$, 圆频率 $\omega_0^2 = \pi^4 EI / (\rho A L^4)$, 则可以得到如下形式的变系数微分方程:

$$\frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1(\tau) [d_1 + \bar{d}_1 P_1(\tau)] = 0, \quad (9)$$

其中

$$d_1 = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \left(1 - \frac{P_0}{P_c}\right), \quad \bar{d}_1 = \frac{-\omega_0^2}{\Omega^2 P_c}. \quad (10)$$

2 方程的解

假定方程(9)中周期变化的荷载 $P_1(\tau)$ 为 Jacobi 椭圆函数 $\text{cn}(\tau, k^2)$, $\text{sn}(\tau, k^2)$ 和 $\text{dn}(\tau, k^2)$ 平方项的线性组合(关于椭圆函数的基本定义见文献[6]),形式如下:

$$P_1(\tau) = a_1 \text{cn}^2(\tau, k^2) + a_2 \text{sn}^2(\tau, k^2) + a_3 \text{dn}^2(\tau, k^2), \quad (11)$$

其中, a_1, a_2, a_3 为任意的实常数,定义了驱动力的大小, k 为模数. 注意到 k 应该在 $0 \sim 1$ 之间取值, 否则椭圆函数变复杂, 将使得方程(11) 给出的荷载失去物理意义. 图 2 给出了荷载参数 a_1, a_2, a_3 取不同值时 $P_1(\tau)$ 的变化. 当 $a_1 = 1, a_2 = a_3 = 0$ 时, $P_1(\tau)$ 对应于文献[5]所研究的荷载.

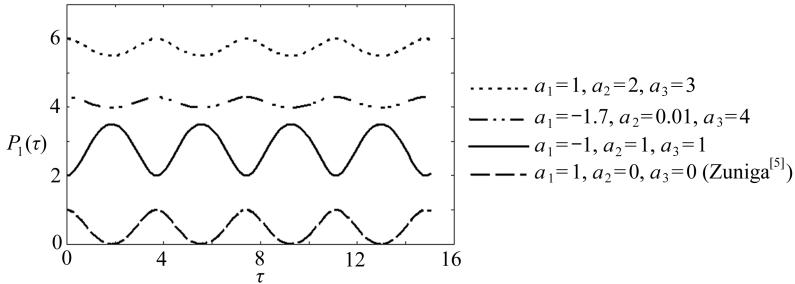


图2 当静力 $P_0 = 2$, 模数 $k = \sqrt{2}/2$ 时, 不同 a_1, a_2, a_3 下 $P_1(\tau)$ 的变化

现在, 将 $P_1(\tau)$ 代入方程(9), 得到

$$\frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1(\tau) [d_1 + d_{2c} \text{cn}^2(\tau, k^2) + d_{2s} \text{sn}^2(\tau, k^2) + d_{2d} \text{dn}^2(\tau, k^2)] = 0, \quad (12)$$

其中

$$d_{2c} = \bar{d}_1 a_1, \quad d_{2s} = \bar{d}_1 a_2, \quad d_{2d} = \bar{d}_1 a_3. \quad (13)$$

当 $d_{2s} = d_{2d} = 0$ 时, 方程(13)简化为文献[5]研究的 Lamé 方程.

为了求得方程(12)的一般解, 可以利用文献[7]给出的公式. 在这个公式中, 对于二阶线性常微分方程

$$f_2(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + f_1(x) \frac{du}{dx} + f_0(x) u(x) = 0, \quad (14)$$

若已知非平凡特解 $u_p^{[7]}$, 可得到其一般解

$$u(x) = u_p \left(c_1 + c_2 \int \frac{e^{-F}}{u_p^2} dx \right), \quad (15)$$

其中

$$F = \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx. \quad (16)$$

因此, 方程(15)能作为方程(12)的一般解, 必须找到一个特解. 为了求得特解, 以下的准则要满足: (i) 必须是一个 Jacobi 椭圆函数 cn , sn 和 dn 的函数, 因为这些函数的导数, 总是可以用同样的椭圆函数项来表达; (ii) 为了显式地表达一般解, 方程(15)给出的被积函数应是可解析的. 考虑到上述的准则, 通过反复尝试, 可以得到方程(12)的一个特解, 形式如下:

$$u_{1p}(\tau) = \sqrt{\text{cn}(\tau, k^2) + \text{dn}(\tau, k^2)}. \quad (17)$$

注意到, 尽管 Zuniga^[5]给出的特解也满足这些准则((i)和(ii)), 但无法解出由方程(12)产生的

代数方程.

将 $u_{1p}(\tau)$ 代入方程(12), 并利用关系式

$$\operatorname{sn}(\tau, k^2) = \sqrt{1 - \operatorname{cn}^2(\tau, k^2)}, \quad \operatorname{dn}(\tau, k^2) = \sqrt{1 - k^2 + k^2 \operatorname{cn}^2(\tau, k^2)} \quad (18)$$

得到的方程(12)呈如下 $\operatorname{cn}^2(\tau, k^2)$ 项形式:

$$\begin{aligned} & (-1 + 4d_1 + 4d_{2s} + 4d_{2d} + 2k^2 - 4d_{2d}k^2 + 4d_{2c} \operatorname{cn}^2(\tau, k^2) - 4d_{2s} \operatorname{cn}^2(\tau, k^2) - \\ & 3k^2 \operatorname{cn}^2(\tau, k^2) + 4d_{2d}k^2 \operatorname{cn}^2(\tau, k^2))(1 - k^2 + \operatorname{cn}^2(\tau, k^2)) + k^2 \operatorname{cn}^2(\tau, k^2) + \\ & 2\operatorname{cn}(\tau, k^2) \sqrt{1 - k^2 + k^2 \operatorname{cn}^2(\tau, k^2)} / (4\operatorname{cn}(\tau, k^2) + \\ & 4\sqrt{1 - k^2 + k^2 \operatorname{cn}^2(\tau, k^2)})^{3/2} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

若以下条件满足:

$$-1 + 4d_1 + 4d_{2s} + 4d_{2d} + 2k^2 - 4d_{2d}k^2 = 0, \quad (20)$$

$$4d_{2c} - 4d_{2s} - 3k^2 + 4d_{2d}k^2 = 0, \quad (21)$$

则上述代数方程对所有 τ 值有效. 于是, 现在可以给出满足条件(20)和(21)的一般解:

$$u_1(\tau) = u_{1p} \left(c_1 + c_2 \int \frac{e^{-m}}{u_{1p}^2(\tau)} d\tau \right), \quad (22)$$

其中 m 为任意常数.

根据文献[8]给出方程(22)中的积分, 从而, 一般解为

$$u_1(\tau) = \sqrt{\operatorname{cn}(\tau, k^2) + \operatorname{dn}(\tau, k^2)} \left(c_1 + c_0 \frac{\operatorname{sn}(\tau, k^2)}{\operatorname{cn}(\tau, k^2) + \operatorname{dn}(\tau, k^2)} \right), \quad (23)$$

其中 $c_0 = e^{-m} c_2$.

对于初始条件

$$u_1(0) = u_{1c}, \quad \frac{du_1(0)}{d\tau} = \bar{u}_{1c}, \quad (24)$$

其中 u_{1c} 和 \bar{u}_{1c} 为任意常数, 可以得到精确解

$$u_1(\tau) = \sqrt{\operatorname{cn}(\tau, k^2) + \operatorname{dn}(\tau, k^2)} \left(\frac{u_{1c}}{\sqrt{2}} + \bar{u}_{1c} \sqrt{2} \frac{\operatorname{sn}(\tau, k^2)}{\operatorname{cn}(\tau, k^2) + \operatorname{dn}(\tau, k^2)} \right). \quad (25)$$

方程(25)包括了有界项和无界项. 为了使解在物理上有意义, 无界项需要趋于0. 为此, 引入适当的边界条件

$$u_1(0) = u_{1c}, \quad du_1(0)/d\tau = 0.$$

从而, Lamé 方程的解有界, 且可表达为

$$u_{1b} = \frac{u_{1c}}{\sqrt{2}} \sqrt{\operatorname{cn}(\tau, k^2) + \operatorname{dn}(\tau, k^2)}. \quad (26)$$

本文的第1节讨论了该体系的频率响应特性. 为此, 利用方程(10)、(13)、(20)和(21), 通过冗长的代数运算, 可以得到 Euler 荷载 P_c , 驱动力 a_1, a_2, a_3 , 静力 P_0 和频率比 ω_0/Ω 之间的关系如下:

$$\frac{3P_c^2 + 4(2a_1 + a_2 + 4a_3)P_c(\omega_0/\Omega)^2 + 16a_3(a_1 + a_3)(\omega_0/\Omega)^4}{4P_c(3P_c + 4a_c(\omega_0/\Omega)^2)} = \left(\frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2 \left(1 - \frac{P_0}{P} \right). \quad (27)$$

为了显示荷载参数对频率比的影响, 将上述方程重新整理:

$$3P_c^2 / (4a_1P_c + 2a_2P_c + 8a_3P_c + 6P_0P_c - 3P_c^2 + 2\sqrt{((2a_1 + a_2 + 4a_3 + 3P_0 - 3P_c)^2 - 12a_3(a_1 + a_3 + P_0 - P_c))P_c^2}) = (\omega_0/\Omega)^2 / ((\omega_0/\Omega)^2 - 1) \tag{28}$$

为了便于在图表中更好地表示,将方程(28)的左边,用 $F(P_c, P_0, a_1, a_2, a_3)$ 表示. 表 1 列出了不同 a_1, a_2, a_3 值所对应的频率响应特性. 表中第 1 行,正是文献[5]讨论的频率响应特性. 注意到本文和 Zuniga^[5] 的频率响应特性之间的差别,是因为解析解的不同.

表 1 频率响应特性 $F(P_c, P_0, a_1, a_2, a_3)$ 的特例

a_1	a_2	a_3	$F(P_c, P_0, a_1, a_2, a_3)$
a_1	0	0	$3P_c / (8a_1 + 12P_0 - 9P_c)$ (Zuniga ^[5])
0	a_2	a_3	$3P_c^2 / (2a_2P_c + 8a_3P_c + 6P_0P_c - 3P_c^2 + 2\sqrt{((a_2 + 4a_3 + 3P_0 - 3P_c)^2 - 12a_3(a_3 + P_0 - P_c))P_c^2})$
a_1	0	a_3	$3P_c^2 / (4a_1P_c + 8a_3P_c + 6P_0P_c - 3P_c^2 + 2\sqrt{((2a_1 + 4a_3 + 3P_0 - 3P_c)^2 - 12a_3(a_1 + a_3 + P_0 - P_c))P_c^2})$
a_1	a_2	0	$3P_c / (8a_1a_2 + 12P_0 - 9P_c)$

3 结果和讨论

图 3 给出了两端铰支的梁-柱体系,承受椭圆型周期可变轴向压力时的频率响应特性(由方程(28)给出). 当频率比 ω_0/Ω 在 $(0, 1)$ 区间内, $F(P_c, P_0, a_1, a_2, a_3)$ 渐近地增加,并趋于无穷. 当 $\omega_0/\Omega = 1$ 时,产生共振. 随着 ω_0/Ω 的增加, $F(P_c, P_0, a_1, a_2, a_3)$ 又渐近地逼近于 1. 图 4 给出了当频率比 $\omega_0/\Omega = 0.6$, 静力 $P_0 = 1$ 时,驱动力 a_1, a_2, a_3 对 P_c 的影响. 可以看出, P_c 随 a_1, a_2, a_3 的增加而线性地增加. 显然可见, P_c 随 a_3 的变化,远大于另外两个驱动力 a_1, a_2 .

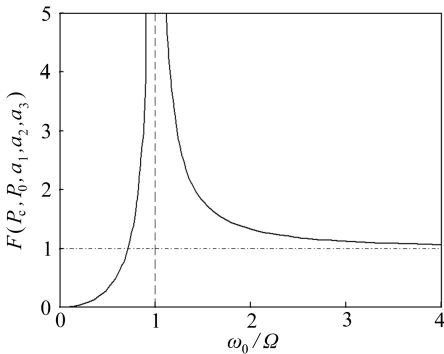


图 3 频率-响应图

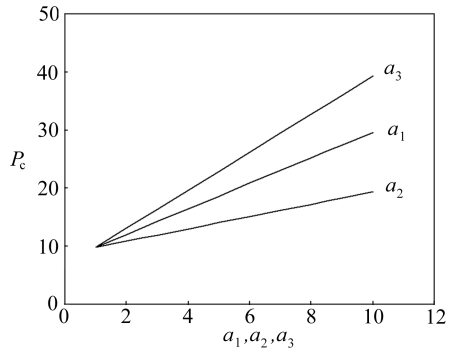


图 4 当频率比 $\omega_0/\Omega = 0.6$, 静力 $P_0 = 1$ 时, P_c 随 a_1, a_2, a_3 的变化

从图 5 可以看出,静力 P_0 和驱动力 a_3 对 P_c 的影响是一致的. 更进一步地,正如所预料的一样, P_0 和 a_3 取最大值时, P_c 达到最大值. 从图 6 可以看出,随着频率比的增加, P_c 出现下降,而当 a_3 增加时, P_c 亦增加. 还可以看出,当频率比最小且 a_3 最大时, P_c 达到最大值.

为了显示系统参数对稳定性的影响,利用方程(12)的数值解,当 $k = 0.5$ 时,图 7 ~ 图 9 给出了静力参数 d_1 和驱动力参数 d_{2c}, d_{2s}, d_{2d} 相关的稳定 - 不稳定区域图. 图中的阴影区域代表方程(12)的解是稳定的. 图 9 中的稳定区域与图 7 和图 8 有着明显的差别,因为参数 a_3 的影响最大. 在这种情况下, a_3 的影响增大,从而扩大了稳定区域. 同时注意到,稳定区域与文献[5]给出的结果稍有差异,这是因为本文假定的驱动力是椭圆型函数 $\text{cn}(\tau, k^2), \text{sn}(\tau, k^2)$ 和 $\text{dn}(\tau, k^2)$ 平方项线性组合的缘故.

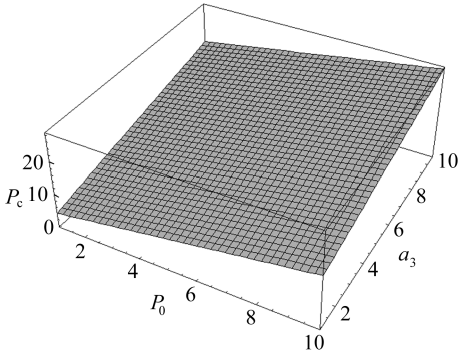


图5 当驱动力 $a_1 = a_2 = 1, \omega_0/\Omega = 1$ 时, P_0 和 a_3 对 P_c 的变化

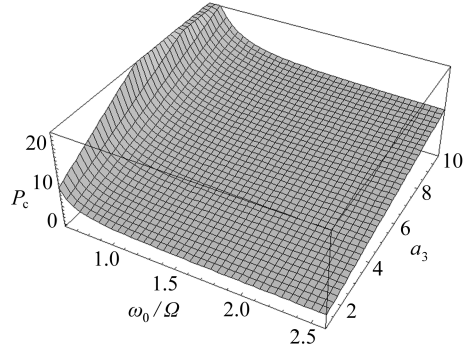


图6 当 $a_1 = a_2 = 1$ 时, 频率比 ω_0/Ω 和驱动力 a_3 对 P_c 的变化

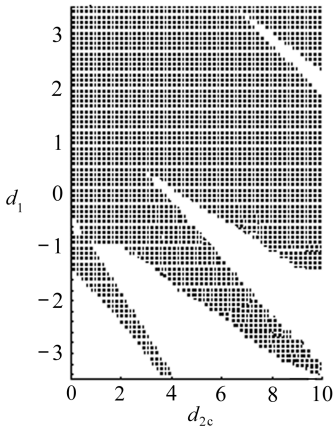


图7 方程(12)的稳定-不稳定区域图 ($d_{2s} = d_{2d} = 1, k = 0.5$)

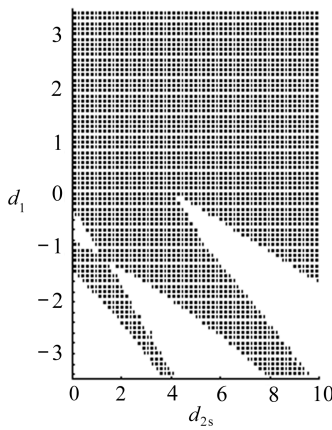


图8 方程(12)的稳定-不稳定区域图 ($d_{2c} = 1, d_{2d} = 1, k = 0.5$)

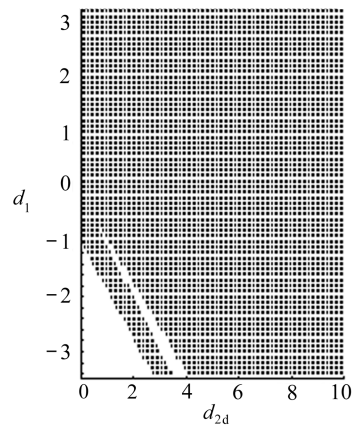


图9 方程(12)的稳定-不稳定区域图 ($d_{2c} = 1, d_{2s} = 1, k = 0.5$)

4 结 论

本文就受椭圆型轴向力作用的梁-柱体系,给出了其动力稳定性问题的闭合解.得到了不同情况下体系的频率响应特性.讨论了静力、驱动力和频率比对 Euler 荷载的影响.研究了 Lamé 方程(方程(12))的稳定-非稳定区域图.可以看出,文献[5]的特解只能用在 $a_2 = a_3 = 0$ 的情况,相应的 Lamé 方程为

$$\frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1(\tau) [d_1 + d_{2c} \text{cn}^2(\tau, k^2)] = 0;$$

而本文给出的特解,可同时应用于

$$\frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1(\tau) [d_1 + d_{2c} \text{cn}^2(\tau, k^2) + d_{2s} \text{sn}^2(\tau, k^2) + d_{2d} \text{dn}^2(\tau, k^2)] = 0$$

和

$$\frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1(\tau) [d_1 + d_{2c} \text{cn}^2(\tau, k^2)] = 0$$

两类 Lamé 方程.还可以发现, a_3 是本文所研究问题影响最大的荷载参数.

参考文献:

- [1] Bazant Z P, Cedolin L. *Stability of Structures Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*[M]. Mineola, New York; Dover Publications Inc, 2003.
- [2] Dario Aristizabal Ochoa J. Static and dynamic stability of uniform shear beam-columns under generalized boundary conditions[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **307**(1/2): 69-88.
- [3] Pavlovic R, Kozic P, Rajkovic P, Pavlovic I. Dynamic stability of a thin-walled beam subjected to axial loads and end moments[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **301**(3/5): 690-700.
- [4] Sampaio J H B, Hundhausen J R. A mathematical model and analytical solution for buckling of inclined beam-columns[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 1998, **22**(6): 405-421.
- [5] Zuniga A E. Analysis of a beam-column system under varying axial forces of elliptic type: the exact solution of Lamé's equation[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, **41**(8): 2155-2163.
- [6] Abramowitz M, Stegun I A. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*[M]. New York; Dover Publications Inc, 1965.
- [7] Polyanin A D, Zaitsev V F. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations* [M]. USA; CRC Press, 1995.
- [8] Lawden D F. *Elliptic Functions and Applications*[M]. New York; Springer-Verlag, 1989.

Exact Solution and Dynamic Buckling Analysis of a Beam-Column System Having the Elliptic Type Loading

H. Secil Artem, Levent Aydin

(Department of Mechanical Engineering, Izmir Institute of Technology,
Gulbahce Koyu, 35430 Urla-Izmir, Turkey)

Abstract: A closed form solution of the dynamic stability problem of a beam-column system with hinged ends loaded by an axial periodically time varying compressive force of an elliptic type was presented. Solution of the governing equation was obtained in the form of Fourier sine series and the resulting ordinary differential equation was solved analytically. Finding the exact analytical solutions of the dynamic buckling problems were difficult. However, availability of exact solutions provided adequate understanding about the physical characteristics of the system. The frequency-response characteristics of the system, the effects of static load, driving forces and frequency ratio on the critical buckling load were also investigated.

Key words: dynamic buckling; exact solution; Jacobi elliptic functions; stability-instability