

有限挠度下 Timoshenko 梁中的非线性 弯曲波及其混沌行为*

张善元, 刘志芳

(太原理工大学 应用力学与生物医学工程研究所,太原 030024)

(王银邦推荐)

摘要: 以 Timoshenko 梁理论为基础,引入了有限挠度和轴向惯性,建立了支配梁运动的非线性偏微分方程组,采用行波法求解,通过某些积分技巧,将其转化为一个非线性常微分方程.常微分方程的定性分析表明,在一定条件下,系统存在异宿轨道,预示着有冲击波解存在.借助 Jacobi 椭圆函数展开求解,得到了非线性波动方程的准确周期解及其当模数 $m \rightarrow 1$ 退化情况下的冲击波解.进而考虑阻尼和外加横向载荷对系统的摄动,利用 Melnikov 函数给出了横截异宿点出现的阈值条件,从而表明系统具有 Smale 马蹄意义下的混沌性质.

关键词: Timoshenko 梁; 有限挠度; 冲击波; 混沌运动; Jacobi 椭圆函数展开; Melnikov 函数

中图分类号: O347.4 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.11.002

引言

上世纪 60 年代,孤子和混沌等复杂现象被揭示,意味着横跨自然学科各分支学科的非线性科学已成为现代科学发展的重要标志.半个世纪以来,孤子和混沌在许多领域开展了广泛地研究,并获得了一些重要应用.从数学上来看,两者都是非线性的产物,然而孤子和混沌分处完全可积分和不可积系统的两个极端,它们的运动形态呈现出截然不同的行为.孤子解是一种稳定的行波解,两孤子间的作用表现出犹如粒子碰撞一样的守恒性质.而混沌解却对初始条件表现出极度的敏感性,以至系统的长期行为不可预测.一般孤子解是在 Hamilton 系统讨论的,如果该系统受到摄动(如阻尼、外力等的作用),运动将如何演化?这是一个很自然的问题.另外,在这两类问题的定性分析中,在一定条件下都可能出现同宿或异宿轨道,在非线性波的问题中,同宿轨道对应着孤立波,异宿轨道对应着冲击波,而在混沌研究中同(异)宿轨道的破裂将是通向混沌运动的一个途径.由此可以得到启示,两类貌似截然不同的非线性运动现象,将有可能在某些方面有所关联,这正是本文工作的一个基本出发点.

* 收稿日期: 2010-03-10; 修订日期: 2010-09-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772129)

作者简介: 张善元(1942—),男,山西人,教授(联系人. Tel: +86-351-6010918; E-mail: syzhang@tyut.edu.cn).

混沌动力学问题通常是处理时域上的初值问题,即所谓的时域混沌(temporal chaos),似乎空间域上的边值问题被排除在混沌之外。然而,上世纪80年代,Thompson等^[1],Hunt等^[2]和El Naschie^[3]等一批学者考虑静力、动力之间的对偶,将描述一个细长弹性结构的坐标 x 代替时间变量 t ,将结构屈曲中的局部化变形与非线性动力系统同宿轨道相联系,再引入正弦分布的缺陷作为外部激励,通过同宿轨道的破裂讨论了弹性静力混沌(elastostatic chaos),这属于空间混沌(spatial chaos)的一类。该类问题最简单的例子是屈曲梁的弹性线与无阻尼单摆运动之间的对偶。另一个重要例子是受拉伸和扭转细杆的变形与自旋陀螺之间的对偶。由此表明,混沌现象不是时域问题中所独有的,在其它非线性问题中出现的内禀随机性也可以借用混沌研究中发展起来的一些概念和方法。

许多实际的物理系统其演化方程常常是非线性偏微分方程,同时涉及时间和空间变量,在某些条件下将会出现时间和空间上的无序,即时空混沌(spatiotemporal chaos)^[4]。在处理非线性偏微分方程的初值、边值问题时,有时假定运动的空间分布或模态的形式,即所谓的 Galerkin 法,将问题简化为时域上的混沌问题。近年来,非线性演化方程孤子解的混沌行为引起了许多研究者的兴趣,通过对 KdV 方程、KdV-Bergers 方程、Sine-Gorden 方程和 Schrödinger 方程等已知有孤子解的非线性方程进行摄动,讨论非线性周期波和孤立波的混沌运动^[5-7]。容易想到,在非线性和波动问题中,如用相位 $\xi = x - ct$ 代替时间 t 作为独立变量,对演化方程引入某种摄动,将可能揭示孤立波与混沌两类非线性现象之间的联系。本文将沿着这个思路,研究固体结构中非线性波的传播特性及其受到摄动后的混沌行为。

同流体动力学、等离子物理现象以及光学领域相比,固体结构中非线性波的研究工作相对要少得多,而且集中于一维非线性纵波的研究^[8-12]。本文首先讨论有限挠度梁中非线性弯曲波的传播特性。有限挠度梁中的非线性源来自于梁中面伸长,中面伸长意味着梁的运动除有横向挠度 $w(x, t)$ 外,尚需考虑轴向位移 $u(x, t)$ 。此外,按照 Timoshenko 梁理论,同时考虑平动惯性、转动惯性和剪切变形建立梁的动力学方程组。文中采用行波法,巧妙地将偏微分方程组转化为一个非线性常微分方程。对常微分方程的定性分析,证明在一定条件下有异宿轨道,预示着系统有冲击波解存在。进而用 Jacobi 椭圆正弦函数展开得到了准确的周期解,并给出了冲击波解存在的条件。

一个实际的梁结构,或多或少会有阻尼耗散,同时常常受到外加载荷的激励。容易想到,阻尼和外加载荷的引入,会导致异宿轨道的破坏,甚至到一定程度有可能出现横截异宿点。文中用 Melnikov 函数方法给出了横截异宿点出现的阈值条件,从而表明系统具有 Smale 马蹄意义下的混沌。为了得到 Melnikov 函数的一个明确表达式,揭示冲击波进入混沌运动的机制,我们取外部激励为 $q(x, t) = q(x - ct)$ 的特殊形式。这并不改变问题固有的性质。

1 动力学平衡方程

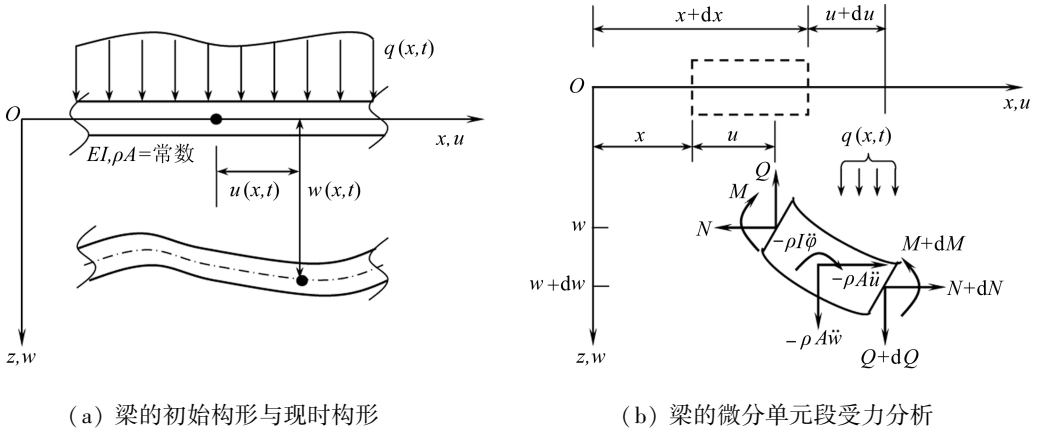
Timoshenko 梁理论认为梁的挠度 w 由两部分组成,即

$$w = w_b + w_s, \quad (1)$$

其中, w_b 和 w_s 分别是由弯曲变形和剪切变形产生的挠度。式(1)对 x 求偏导,为方便起见记其为

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \Rightarrow \varphi = \psi + \gamma, \quad (2)$$

此处, $\varphi = \partial w / \partial x$ 是总的挠度曲线的切线对变形前梁轴的倾角, $\psi = \partial w_b / \partial x$ 是弯曲变形引起的转角, $\gamma = (\partial w / \partial x - \psi)$ 是剪切变形角. 在研究 Timoshenko 梁有限挠度问题时, 需要考虑弯曲变形、剪切变形与梁中面伸长变形的耦合. 考虑图 1(a) 所示横截面积为 A , 截面惯性矩为 I , 材料的弹性模量、剪切模量和质量密度分别为 E, G 和 ρ 的均匀无限长梁. 梁中面上任意点 P 的轴向位移和横向总挠度分别为 $u(x, t)$ 和 $w(x, t)$. 图 1(b) 给出了初始构形中的微分单元 dx 在 t 时刻的现时构形中的位移及受力情况, 图中的 M, Q 和 N 分别为横截面上的弯矩、剪力和轴力.



(a) 梁的初始构形与现时构形

(b) 梁的微分单元段受力分析

图 1 有限挠度梁的变形与内力

考虑图 1(b) 所示的梁的微元段的动力平衡, 可得以下动力学方程组:

$$(N + dN) - N = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$(Q + dQ) - Q + q dx = \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q, \quad (4)$$

$$(M + dM) - M - Q(dx + du) + N dw = -\rho I dx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} + N \frac{\partial w}{\partial x} + \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (5)$$

在得到以上方程时认为梁是保守系统, 没有考虑阻尼力的作用. 在实际问题中, 阻尼是不可避免的, 然而准确地考虑阻尼作用是一件复杂的事情, 这里我们假定阻尼力与横向运动速度成正比, 即在式(4)右端增加一项 $\nu \partial w / \partial t$, ν 是阻尼系数.

梁的几何方程除式(2)以外, 尚包括梁的曲率-挠度关系

$$\kappa = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \quad (6)$$

和中面伸长-位移关系

$$\varepsilon_0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \varphi^2. \quad (7)$$

梁的本构关系假定为线性的, 即

$$M = EI\kappa = -EI \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (8)$$

$$N = EI\varepsilon_0 = EI \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \varphi^2 \right), \quad (9)$$

$$Q = \mu GA(\varphi - \psi), \quad (10)$$

式中 μ 是与截面形状有关的因子且 $\mu < 1$ 。

将本构关系(8)、(9)和(10)代入动力平衡方程组(3)、(4)和(5),便得到用位移表示的支配有限挠度 Timoshenko 梁中弯曲波的非线性偏微分方程组

$$\begin{cases} c_0^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & (11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu c_s^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \nu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \frac{1}{\rho A}, & (12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu c_s^2 (\varphi - \psi) = -c_0^2 r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + c_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \varphi^2 \right) \varphi + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, & (13) \end{cases}$$

此处, $c_0^2 = E/\rho$, $c_s^2 = G/\rho$, $r^2 = I/A$ 。在得到方程(12)时计入了阻尼的作用,并进行过一次对 x 的求导运算。

2 行波法求解与方程的简化

假定方程(11)、(12)和(13)有行波解 $u(x,t) = u(\xi)$, $\varphi(x,t) = \varphi(\xi)$, $\psi(x,t) = \psi(\xi)$, 并取 $q = q(\xi)$, $\xi = k(x - ct)$, 其中 k 和 c 为常数, k 为波数, c 为波速。注意到 $\partial/\partial t = -ck d/d\xi$, $\partial/\partial x = k d/d\xi$, 则方程(11)、(12)和(13)变成

$$\begin{cases} k \frac{d^2 u}{d\xi^2} = \frac{c_0^2}{g} \varphi \frac{d\varphi}{d\xi}, & (14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\mu c_s^2 - c^2) \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \mu c_s^2 \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - \left(\frac{dq}{d\xi} + \nu c \frac{d\varphi}{d\xi} \right) \frac{1}{\rho A k}, & (15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu c_s^2 (\varphi - \psi) = g r^2 k^2 \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + c^2 \left(k \frac{du}{d\xi} + \frac{1}{2} \varphi^2 \right) \varphi, & (16) \end{cases}$$

式中 $g = c^2 - c_0^2$, 式(14)对 ξ 积分一次, 并取积分常数为0(考虑到当 $\xi \rightarrow 0$ 时, $u(\xi) \rightarrow 0$, $du/d\xi \rightarrow 0$, $\varphi(\xi) \rightarrow 0$, $d\varphi/d\xi \rightarrow 0$), 则有

$$k \frac{du}{d\xi} = \frac{c_0^2}{2g} \varphi^2. \quad (17)$$

将式(17)代入式(16), 又得到

$$\mu c_s^2 (\varphi - \psi) = g r^2 k^2 \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \frac{c_0^2}{2} \left(\frac{c_0^2}{g} + 1 \right) \varphi^3. \quad (18)$$

于是问题已变成求解关于未知函数 φ 和 ψ 的两个常微分方程(15)和(18)。从方程(15)可以直接得到

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = \frac{\mu c_s^2 - c^2}{\mu c_s^2} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \frac{1}{\rho A k \mu c_s^2} \frac{d}{d\xi} (q + \nu c \varphi), \quad (19)$$

从式(15)尚可写出

$$\mu c_s^2 \frac{d^2}{d\xi^2}(\varphi - \psi) = c^2 \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - \frac{1}{\rho Ak} \frac{d}{d\xi}(q + \nu c\varphi),$$

积分上式两次,且取积常数为 0,便得到

$$\mu c_s^2(\varphi - \psi) = c^2\varphi - \frac{1}{\rho Ak} \int (q + \nu c\varphi) d\xi. \quad (20)$$

将式(19)和(20)代入式(18),我们有

$$\begin{aligned} & \frac{gr^2k^2(\mu c_s^2 - c^2)}{\mu c_s^2} \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - c^2\varphi + \frac{c_0^2}{2} \left(\frac{c_0^2}{g} + 1 \right) \varphi^3 = \\ & - \frac{gr^2k^2}{\rho Ak\mu c_s^2} \frac{d}{d\xi}(q + \nu c\varphi) - \frac{1}{\rho Ak} \int (q + \nu c\varphi) d\xi \end{aligned}$$

或写成

$$k^2 \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \delta_1\varphi + \delta_3\varphi^3 = \delta_4 \frac{d}{d\xi}(q + \nu c\varphi) + \delta_5 \int (q + \nu c\varphi) d\xi, \quad (21)$$

其中

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{\mu c_s^2 c^2}{r^2(c^2 - c_0^2)(c^2 - \mu c_s^2)}, & \delta_3 = -\frac{\mu c_s^2 c_0^2 c^2}{2r^2(c^2 - c_0^2)^2(c^2 - \mu c_s^2)}, \\ \delta_4 = \frac{k}{\rho A(c^2 - \mu c_s^2)}, & \delta_5 = \frac{\mu c_s^2}{\rho Ak r^2(c^2 - c_0^2)(c^2 - \mu c_s^2)}. \end{cases} \quad (22)$$

3 定性分析

如果略去阻尼和外部强迫力的作用,则方程(21)就简化为一个 Duffing 方程

$$k^2 \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \delta_1\varphi + \delta_3\varphi^3 = 0, \quad (23)$$

我们称方程(23)为方程(21)的派生方程.令 $\varphi_1 = \varphi, \varphi_2 = d\varphi_1/d\xi$, 则与式(23)等价的动力系统可表示成

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{d\xi} = \varphi_2, \\ \frac{d\varphi_2}{d\xi} = -\frac{1}{k^2}\varphi(\delta_1 + \delta_3\varphi^2) = -V'(\varphi). \end{cases} \quad (24)$$

系统有 3 个固定点

$$P(0,0), Q(\alpha,0), G(\beta,0), \quad (25)$$

其中

$$\alpha = -\sqrt{-\frac{\delta_1}{\delta_3}}, \beta = \sqrt{-\frac{\delta_1}{\delta_3}}. \quad (26)$$

方程(24)右端的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -V''(\varphi) & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

相应的特征方程为

$$\lambda^2 + V''(\varphi) = 0, \quad (28)$$

其中

$$V''(\varphi) = \frac{1}{k^2}(\delta_1 + 3\delta_3\varphi^2). \quad (29)$$

从式(26)看出,要使 α 和 β 为实数,则要求 δ_1 和 δ_3 异号,进而要求 $\mu c_s < c_0 < c$.在此条件下, δ_1 为正, δ_3 为负.对应于固定点 $P(0,0)$, $V'(0) = 0$, $V''(0) = \delta_1/k^2 > 0$,从方程(28)可知特征值 λ 为一对共轭虚根,表明不动点 P 为中心.对应于 $Q(\alpha,0)$ 和 $G(\beta,0)$, $V'(\alpha) = V'(\beta) = 0$, $V''(\alpha) = V''(\beta) = -2\delta_1/k^2 < 0$,从而相应的特征值 λ 为异号实根,说明不动点 Q 和 G 为鞍点型固定点.由此可判定方程组(24)在相平面上存在异宿轨道,预示着有冲击波解存在.

4 Jacobi 椭圆正弦函数展开法求解

以下采用 Jacobi 椭圆函数法求解方程(23),假定方程(23)的解为

$$\varphi(\xi) = \sum_{j=0}^n a_j f^j(\xi), \quad (30)$$

其中, $f(\xi)$ 可代表 $\text{sn}\xi$, $\text{cn}\xi$ 和 $\text{dn}\xi$ 中的任何一个, a_j 是常数.注意到 $\text{sn}\xi$, $\text{cn}\xi$ 和 $\text{dn}\xi$ 有以下关系:

$$\text{sn}^2\xi = 1 - \text{cn}^2\xi, \quad \text{dn}^2\xi = 1 - m^2\text{sn}^2\xi, \quad (31)$$

$$\frac{d}{d\xi}\text{sn}\xi = \text{cn}\xi\text{dn}\xi, \quad \frac{d}{d\xi}\text{cn}\xi = -\text{sn}\xi\text{dn}\xi, \quad \frac{d}{d\xi}\text{dn}\xi = -m^2\text{sn}\xi\text{cn}\xi, \quad (32)$$

此处 m 为模数,满足 $0 < m < 1$.式(30)中的 $\varphi(\xi)$ 的最高阶次为 n ,记作

$$O(\varphi) = n. \quad (33)$$

根据式(31)和(32)则有

$$O\left(\varphi^q \frac{d^p\varphi}{d\xi^p}\right) = (q+1)n + p. \quad (34)$$

于是在式(23)中最高阶线性项的阶次为

$$O\left(\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}\right) = n + 2,$$

最高阶的非线性项的阶次为 $O(\varphi^3) = 3n$,根据齐次平衡原理^[13],有

$$n + 2 = 3n \Rightarrow n = 1. \quad (35)$$

于是式(30)为

$$\varphi(\xi) = a_0 + a_1 f^1(\xi), \quad (36)$$

采用 Jacobi 椭圆正弦函数展开,即 $f^1(\xi) = \text{sn}\xi$,于是上式为

$$\varphi(\xi) = a_0 + a_1 \text{sn}\xi, \quad (37)$$

其中 a_0, a_1 为待定常数.上式对 ξ 求二次导数,得

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = -a_1 \text{sn}\xi(1 + m^2 - 2m^2\text{sn}^2\xi). \quad (38)$$

将式(37)和(38)代入方程(23),得

$$a_1(\delta_3 a_1^2 + 2m^2 k^2) \text{sn}^3\xi + 3a_0 a_1^2 \delta_3 \text{sn}^2\xi - a_1[k^2(1 + m^2) - \delta_1 - 3a_0^2 \delta_3] \text{sn}\xi + (\delta_1 + a_0^2 \delta_3) a_0 = 0. \quad (39)$$

令式(39)中 $\text{sn}^3\xi, \text{sn}^2\xi, \text{sn}\xi$ 的系数及常数项为 0, 得

$$a_0 = 0, a_1 = \pm \sqrt{-\frac{2}{\delta_3} km}, k^2 = \frac{\delta_1}{1+m^2}. \quad (40)$$

将式(40)代入式(37), 给出

$$\varphi(\xi) = \pm \sqrt{-\frac{2}{\delta_3} mk} \text{sn}(\xi, m). \quad (41)$$

上式(41)是方程(23)的准确周期解, 显然当 $\delta_3 < 0$ 时成立, 这与定性分析一致. 当 $m \rightarrow 0$ 时, $\text{sn}\xi \rightarrow \sin\xi$, 得到的是线性解; 当 $m \rightarrow 1$ 时, $\text{sn}\xi \rightarrow \tanh\xi$, 则式(41)退化为

$$\varphi(\xi) = \pm \sqrt{-\frac{2}{\delta_3} k} \tanh\xi. \quad (42)$$

显然这是个冲击波解. 将式(22)代入式(40), 并令 $m \rightarrow 1$ 便可得到

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = \pm \frac{2r(c^2 - c_0^2)}{cc_0c_s} \sqrt{\frac{c^2 - \mu c_s^2}{\mu}} k, \\ k = \sqrt{\frac{\delta_1}{2}} = \frac{cc_s}{r} \sqrt{\frac{\mu}{2(c^2 - c_0^2)(c^2 - \mu c_s^2)}}. \end{cases} \quad (43)$$

显然要求 $\mu c_s^2 < c_0^2 < c^2$. 于是, 我们可以将式(42)写为以下形式:

$$\varphi(\xi) = A \tanh\left(\frac{x - ct}{\Lambda}\right), \quad (44)$$

其中波幅 A 和波宽 Λ 由以下两式给出:

$$A = \pm \frac{\sqrt{2(c^2 - c_0^2)}}{c_0}, \quad (45)$$

$$\Lambda = r \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{\left(\frac{c_0^2}{c^2} - 1\right) \left(\mu - \frac{c^2}{c_s^2}\right)}. \quad (46)$$

式(45)和(46)表明, 随着波速 c 的增大, 冲击波波幅增大, 而冲击波的宽度变窄.

5 阻尼和强迫力对系统异宿轨道的摄动

现在我们讨论具有阻尼和强迫力扰动的方程(21). 注意到当 $m \rightarrow 1$ 时, $k^2 \rightarrow \delta_1/2$, 方程(21)可以改写为

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + 2\varphi + \delta_3^* \varphi^3 = \delta_4^* \frac{d}{d\xi}(q + \nu c\varphi) + \delta_5^* \int (q + \nu c\varphi) d\xi, \quad (47)$$

其中

$$\begin{cases} \delta_3^* = \frac{\delta_3}{k^2} = -\frac{c_0^2}{c^2 - c_0^2}, \delta_4^* = \frac{\delta_4}{k^2} = \frac{1}{\rho A c c_s} \sqrt{2r^2(c^2 - c_0^2)}, \\ \delta_5^* = \frac{\delta_5}{k^2} = \frac{\sqrt{8r^2(c^2 - c_0^2)(c^2 - \mu c_s^2)}}{\sqrt{\mu} \rho A c_s c^3}. \end{cases} \quad (48)$$

令

$$q(\xi) = p \sin \Omega \xi, \quad (49a)$$

则有

$$\frac{dq}{d\xi} = p\Omega \cos \Omega \xi, \quad \int q d\xi = -\frac{p}{\Omega} \cos \Omega \xi,$$

$$\delta_4^* \frac{d}{d\xi} q + \delta_5^* \int q d\xi = \delta_4^* p\Omega \cos \Omega \xi - \delta_5^* \frac{p}{\Omega} \cos \Omega \xi = \left(\delta_4^* p\Omega - \delta_5^* \frac{p}{\Omega} \right) \cos \Omega \xi.$$

再令

$$\varepsilon F^{**} = \left(\delta_4^* p\Omega - \delta_5^* \frac{p}{\Omega} \right), \quad \varepsilon \delta_4^{**} = c\nu \delta_4^*, \quad \varepsilon \delta_5^{**} = c\nu \delta_5^*. \quad (49b)$$

ε 为一个小参数, 式(47)可以写成

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + 2\varphi + \delta_3^* \varphi^3 = \varepsilon \left[F^{**} \cos \Omega \xi + \delta_4^{**} \frac{d\varphi}{d\xi} + \delta_5^{**} \int \varphi d\xi \right] \quad (50)$$

或写成如下等价的动力系统(取 $\varphi_1 = \varphi$)

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \mathbf{f}(\varphi) + \varepsilon \mathbf{g}(\varphi, t), \quad (51a)$$

其展开形式为

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{d\xi} = \varphi_2, \\ \frac{d\varphi_2}{d\xi} = -2\varphi - \delta_3^* \varphi^3 + \varepsilon \left[F^{**} \cos \Omega \xi + \delta_4^{**} \frac{d\varphi}{d\xi} + \delta_5^{**} \int \varphi d\xi \right]. \end{cases} \quad (51b)$$

比较式(51a)和(51b), 则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} &= [\varphi_1, \varphi_2]^T, \quad \mathbf{f} = [f_1, f_2]^T = [\varphi_2, -\varphi_1 - \delta_3^{**} \varphi_1^3]^T, \\ \mathbf{g} &= [g_1, g_2]^T = \left[0, F^{**} \cos \Omega \xi + \delta_4^{**} \frac{d\varphi_1}{d\xi} + \delta_5^{**} \int \varphi_1 d\xi \right]^T. \end{aligned}$$

相应的 Melnikov 函数为^[14-15]

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(\xi)) \wedge \mathbf{g}[\boldsymbol{\varphi}(\xi), \xi + \theta] d\xi, \quad (52)$$

其中, $\mathbf{f} \wedge \mathbf{g} = f_1 g_2 - f_2 g_1$, 由于 $g_1 = 0$, 于是上式变成

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2 \left[F^{**} \cos \Omega \xi + \delta_4^{**} \frac{d\varphi_1}{d\xi} + \delta_5^{**} \int \varphi_1 d\xi \right] d\xi. \quad (53)$$

由式(42), 有

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi = \pm \sqrt{-\frac{2}{\delta_3}} k \tanh \xi = \pm b \tanh \xi, \\ \varphi_2 = \dot{\varphi}_1 = \pm \sqrt{-\frac{2}{\delta_3}} k \operatorname{sech}^2 \xi = \pm b \operatorname{sech}^2 \xi, \end{cases} \quad (54)$$

式中, $b = k\sqrt{-2/\delta_3}$, 在式(54)中右端取负号, 则式(53)可以写成

$$\begin{aligned} M(\theta) &= - \int_{-\infty}^{\infty} b \operatorname{sech}^2 \xi \left[F^{**} \cos \Omega(\xi + \theta) - b \delta_4^{**} \operatorname{sech}^2 \xi - b \delta_5^{**} \int \tanh \xi d\xi \right] d\xi = \\ &= -b F^{**} \cos(\Omega \theta) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \xi \cos(\Omega \xi) d\xi + \\ &= b F^{**} \sin(\Omega \theta) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \xi \sin(\Omega \xi) d\xi + \end{aligned}$$

$$b^2\delta_4^{**} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 \xi d\xi + b^2\delta_5^{**} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \xi \left[\int \tanh \xi d\xi \right] d\xi. \quad (55)$$

上式(55)中,第1个积分利用留数方法可以得到

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \xi \cos(\Omega \xi) d\xi = \Omega \pi \operatorname{csch}\left(\frac{1}{2}\Omega\pi\right),$$

第2个积分由于被积函数为奇函数而得0.现在的任务主要是完成第3个积分和第4个积分.

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 \xi d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \xi \frac{d(\tanh \xi)}{d\xi} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \tanh^2 \xi) d(\tanh \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d(\tanh \xi) - \int_{-\infty}^{\infty} \tanh^2 \xi d(\tanh \xi) = \\ &= [\tanh \xi]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{3} [\tanh^3 \xi]_{-\infty}^{\infty} = \frac{4}{3}, \\ I_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \xi \left[\int \tanh \xi d\xi \right] d\xi = \left[\tanh \xi \int \tanh \xi d\xi \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \tanh^2 \xi d\xi = \\ &= [\tanh \xi \ln(\cosh \xi)]_{-\infty}^{\infty} - [\xi - \tanh \xi]_{-\infty}^{\infty} = 2 + [\tanh \xi \ln(\cosh \xi) - \xi]_{-\infty}^{\infty} = \\ &= 2 + \left[\ln \frac{e^\xi + e^{-\xi}}{2} - \xi \right]_{\xi \rightarrow +\infty} - \left[-\ln \frac{e^\xi - e^{-\xi}}{2} - \xi \right]_{\xi \rightarrow -\infty} = \\ &= 2 - 2\ln 2 + \lim_{\xi \rightarrow \infty} [\ln(e^\xi + e^{-\xi}) - \xi] - \lim_{\xi \rightarrow -\infty} [-\ln(e^\xi - e^{-\xi}) - \xi] = \\ &= 2(1 - \ln 2) > 0. \end{aligned}$$

将 I_1, I_3 和 I_4 的结果代入式(55),则

$$M(\theta) = -bF^{**} \Omega \pi \cos(\Omega \theta) \operatorname{csch}\left(\frac{\Omega \pi}{2}\right) + \frac{4}{3} b^2 \delta_4^{**} + 2b^2 \delta_5^{**} (1 - \ln 2). \quad (56)$$

从式(48)和(49a),有

$$\delta_5^{**} = \eta \delta_4^{**}, \quad \eta = \frac{2(c^2 - \mu c_s^2)}{c^2}. \quad (57)$$

于是

$$\frac{4}{3} b^2 \delta_4^{**} + 2b^2 \delta_5^{**} (1 - \ln 2) = b^2 \left[\frac{4}{3} + 2(1 - \ln 2) \eta \right] \delta_4^{**}.$$

从而式(56)变成

$$M(\theta) = -bF^{**} \Omega \pi \cos(\Omega \theta) \operatorname{csch}\left(\frac{\Omega \pi}{2}\right) + b^2 \left[\frac{4}{3} + 2(1 - \ln 2) \eta \right] \delta_4^{**}. \quad (58)$$

根据 Melnikov 准则,当

$$\frac{F^{**}}{\delta_4^{**}} > \frac{[4/3 + 2(1 - \ln 2) \eta] b}{\Omega \pi \operatorname{csch}(\Omega \pi / 2)}, \quad (59)$$

$M(\theta)$ 有简单零点,由此表明系统在一定条件会出现 Smale 马蹄意义下的混沌.

6 结论与讨论

本文从多个层面研究了无限长有限挠度 Timoshenko 梁中非线性波的传播特性,得到了若干有意义的结果:

1) 有限挠度引起的中面拉伸是产生冲击波和混沌的非线性源,弯曲变形、转动惯性和剪

切变形导致波的几何弥散,非线性和弥散效应的相互作用的某种平衡会导致派生方程的冲击波解。

2) 利用 Jacobi 椭圆函数法对无阻尼和无强迫力摄动的派生方程求解,得到了精确周期解,在模数 $m \rightarrow 1$ 退化的情况下得到了冲击波解,与定性分析的异宿轨道相对应,它们存在的条件是 $c > c_0$ 。

3) 真实的力学系统阻尼和外加载荷总会存在,文中考虑阻尼和强迫力对异宿轨道的摄动,利用 Melnikov 方法给出了横截异宿点出现的阈值条件,从而表明在一定条件下可能出现 Smale 马蹄意义下的混沌。在对时域混沌问题研究时,利用 Melnikov 方法得到混沌条件后,通常还要选择某些特定参数计算相轨迹图、时程曲线和 Poincaré 映射,可以给出混沌运动的具体信息。本文不关心混沌运动的具体细节,没必要完成更多的数值计算,而重点是在揭示冲击波和混沌两大类非线性现象之间的关联。

4) 利用异宿轨道的 Melnikov 函数研究了冲击波的混沌行为出现的条件。在相平面上,异宿轨道内部包含了一个周期轨道族,在求冲击波解过程中我们已得到了周期波解(41),由此可以利用次谐轨道的 Melnikov 函数来研究周期波解受到摄动后混沌出现的条件。

参考文献:

- [1] Thompson J M T, Virgin L N. Spatial chaos and localization phenomena in nonlinear elasticity [J]. *Physics Letters A*, 1998, **126**(8/9): 494-496.
- [2] Hunt G W, Bolt H M, Thompos J M T. Structural localization phenomena and dynamical phase-space analogy[J]. *Proc R Soc Lond A*, 1989, **425**: 245-267.
- [3] El Naschie M S. *Stress Stability and Chaos in Structural Engineering* [M]. London: Mc Graw-Hill, 1990.
- [4] Cross M C, Hohenberg P C. Spatiotemporal chaos[J]. *Science*, 1994, **263**(5153): 1569-1570.
- [5] Abdullaev F Kh. Dynamical chaos of solitons and nonlinear periodic waves[J]. *Physics Reports*, 1989, **179**(1): 1-78.
- [6] Kodama Y, Ablowitz M J. Perturbations of solitons and solitary waves[J]. *Studies in Appl Math*, 1981, **64**: 225-245.
- [7] Blyuss K B. Chaotic behavior of solutions to a perturbed Korteweg-de Vries equation[J]. *Reports on Mathematical Physics*, 2002, **49**(1): 29-38.
- [8] ZHANG Shan-yuan, ZHUANG Wei. The strain solitary waves in a nonlinear elastic rod[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1987, **3**(1): 62-72.
- [9] 郭建刚,周丽军,张善元. 有限变形弹性杆中的几何非线性波[J]. *应用数学和力学*, 2005, **26**(5): 614-620.
- [10] LIU Zhi-fang, ZHANG Shan-yuan. Nonlinear waves and periodic solution in finite deformation elastic rod[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2006, **19**(1): 1-8.
- [11] Samsonov A M. *Strain Solitons in Solid and How to Construct Them* [M]. New York: Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [12] Porubov A V, Velarde M G. Dispersive-dissipative solitons in nonlinear solids[J]. *Wave Motion*, 2000, **31**(3): 197-207.

- [13] WANG Ming-liang, ZHOU Yu-bing, LI Zhi-bing. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics [J]. *Physics Letters A*, 1996, **216**(1/5): 67-75.
- [14] Nayfeh A H, Balachandran B. *Applied Nonlinear Dynamics*[M]. New York: John Wiley and Sons, Inc 1995.
- [15] Melnikov V K. On the stability of the center for time periodic perturbations[J]. *Trans Moscow Math Soc*, 1963, **12**:1-57.

Nonlinear Flexural Waves and Chaos Behavior in Finite-Deflection Timoshenko Beam

ZHANG Shan-yuan, LIU Zhi-fang

(*Institute of Applied Mechanics and Biomedical Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, P. R. China*)

Abstract: On the basis of the theory of Timoshenko beam, taking into account finite-deflection and axial inertia, the nonlinear partial differential equations governing flexural waves in a beam were derived. When employing the method of the traveling wave solution, the nonlinear partial differential equations can be transformed into an ordinary differential equation by using certain integral skills. The qualitative analysis indicates that the corresponding dynamic system has heteroclinic orbit under certain condition. The exact periodic solution of nonlinear wave equation was obtained by means of Jacobi elliptic function expansion. When the modulus of Jacobi elliptic function $m \rightarrow 1$ in the degenerate case, the shock wave solution was given. Further, small perturbations arising from damping and external load to original Hamilton's system are introduced and the threshold condition of the existence of transverse heteroclinic point is obtained by Melnikov's method. It is proved from this that the perturbed system has chaotic property under Smale horseshoe transform.

Key words: Timoshenko beam; finite-deflection; shock wave; chaos motion; Jacobi elliptic function expansion; Melnikov function