

约束阻尼悬臂梁瞬态响应近似 解析解与实验分析*

胡明勇, 王安稳, 章向明

(海军工程大学 理学院, 武汉 430033)

(郭兴明推荐)

摘要: 利用弹性悬臂梁模态叠加构造出约束阻尼悬臂梁的振动模态,基于 Lagrange 方程推导出了约束阻尼悬臂梁的控制方程,求解了在集中力突然卸载的情况下约束阻尼悬臂梁的动力响应. 计算并测试了一系列铝合金约束阻尼悬臂梁模型的振动频率和瞬态响应,分析了阻尼层材料参数对铝合金约束悬臂梁瞬态响应时间的影响. 采用了解析法及实验法两种方法,结果表明,所采用的方法是可靠的.

关键词: 约束阻尼; 悬臂梁; 瞬态响应; Lagrange 方程; 模态叠加

中图分类号: O327 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.11.003

引言

阻尼处理是工程中对结构进行减振降噪的一种有效方法^[1-3],常见的阻尼处理是把粘弹材料敷设在承载构件上,构成自由阻尼结构.为了增大阻尼层的剪切变形,从而耗散更多的能量,在阻尼层上再敷设一层弹性约束层,这种阻尼结构形式就叫约束阻尼.早在上个世纪60年代末,学者就开始研究约束阻尼结构的动力学问题.1959年,Kerwin^[4]首次对约束阻尼结构进行了数学分析;1969年,Mead和Markus^[5]推导出约束阻尼结构的6阶微分运动方程;Yan和Dowell^[6]研究了考虑所有铺层的转动惯量的约束阻尼结构动力学问题;Ravi等^[7]应用模态叠加法分析了两端固支的局部或全部敷设约束阻尼层梁的动力响应;Baber等^[8]计算了简谐激励下的粘弹性夹层梁的响应问题.目前来看,已有文献大多是分析两端简支或两端固支的结构.由于悬臂梁自由端边界条件处理比较困难,所以对于求解约束阻尼悬臂结构动力响应问题的文献则不多.本文根据弹性悬臂梁模态叠加法构造约束阻尼悬臂梁的振动模态,利用Lagrange方程推导出了约束阻尼悬臂梁的控制方程,求解了集中力突然卸载的情况下约束阻尼悬臂梁自由端的动力响应问题,分析了阻尼层材料模量对响应时间的影响.为了发现约束阻尼结构的阻尼特性规律,测试了一系列约束阻尼悬臂梁的振动频率以及瞬态响应,并和理论计算结果进行了对比.结果表明:理论计算结果和实验结果吻合良好,可见本文所采用的方法是可

* 收稿日期: 2010-04-02; 修订日期: 2010-10-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572150)

作者简介: 胡明勇(1977—),男,江西吉安人,讲师,博士(联系人. E-mail: shuai_humingyong@163.com)

靠的,且便于在工程实际中应用.

1 约束阻尼悬臂梁控制方程推导

图1为约束阻尼悬臂梁的结构示意图,采用的是直角坐标系.基层、阻尼层和约束层具有相同的宽度 b ;基层的厚度为 h_s ,粘弹层的厚度为 h_v ,约束层厚度为 h_c ,梁的长度为 l .

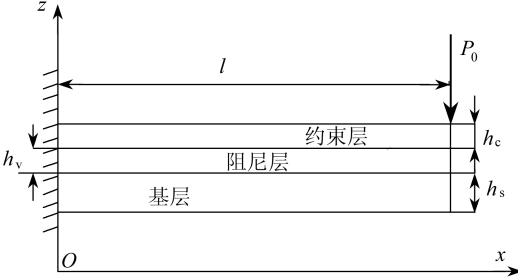


图1 约束阻尼悬臂梁示意图

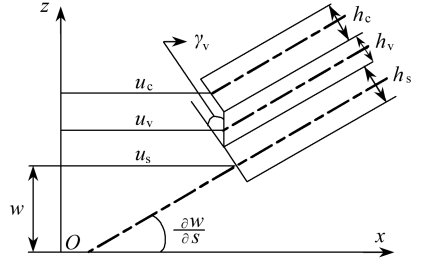


图2 悬臂梁变形关系示意图

在分析约束阻尼悬臂梁中作如下假设^[9]:

- 1) 基层和约束层的剪切变形可以忽略,并忽略了结构转动惯量的影响;
- 2) 各层之间没有相对滑移,且各层的横向位移相等.

约束阻尼悬臂梁各层变形示意图如图2,设基层几何中面的水平位移为 u_s ,阻尼层几何中面的水平位移为 u_v ,约束层几何中面水平位移为 u_c ,粘弹层的剪应变为 γ_v ,约束阻尼悬臂梁的横向位移为 w ,根据假设2)可知

$$\begin{cases} u_c + \frac{h_c}{2} \frac{\partial w}{\partial x} = u_v + \frac{h_v}{2} \left(\gamma_v - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ u_s - \frac{h_s}{2} \frac{\partial w}{\partial x} = u_v - \frac{h_v}{2} \left(\gamma_v - \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (1)$$

简化上式得

$$\begin{cases} u_v = \frac{1}{2} \left[(u_c + u_s) + \frac{h_c - h_s}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right], \\ \gamma_v = \frac{1}{h_v} \left[(u_c - u_s) + d \frac{\partial w}{\partial x} \right], \end{cases} \quad (2)$$

其中, $d = (h_c + h_s)/2 + h_v$, 其意义为基层的中面到约束层中面的长度. 基层的形变势能、阻尼层的形变势能以及约束层的形变势能分别为

$$\begin{cases} V_s = \frac{1}{2} \int_{v_s} \sigma_s \varepsilon_s dv = \frac{1}{2} \int_0^l E_s \left[A_s \left(\frac{\partial u_s}{\partial x} \right)^2 + I_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx, \\ V_v = \frac{1}{2} \int_0^l G^* A_v (\gamma_v)^2 ds = \frac{1}{2} \int_0^l G^* A_v \frac{1}{h_v^2} \left[(u_c - u_s) + d \frac{\partial w}{\partial x} \right]^2 dx, \\ V_c = \frac{1}{2} \int_{v_c} \sigma_c \varepsilon_c dv = \frac{1}{2} \int_0^l E_c \left[A_c \left(\frac{\partial u_c}{\partial x} \right)^2 + I_c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx, \end{cases} \quad (3)$$

其中, A_s 为基层横截面的面积; A_v 为阻尼层横截面的面积; A_c 为约束层横截面的面积; I_s 为基层的截面惯性矩; I_c 为阻尼层的截面惯性矩; G^* 为阻尼层的剪切模量; ρ_s 为基层材料的密度; ρ_v 为阻尼层材料的密度; ρ_c 为约束层材料的密度; σ_s, ε_s 分别为基层的正应力和正应变; σ_c, ε_c 分别为约束层的正应力和正应变. 约束阻尼悬臂梁的动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho_s A_s \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_s}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho_c A_c \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_c}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho_v A_v \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_c}{\partial t} + \frac{\partial u_s}{\partial t} \right) + \frac{h_c - h_s}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right]^2 \right\} dx. \tag{4}$$

将约束阻尼层合梁结构位移按假设模态展开：

$$\begin{cases} w(x, t) = \sum_{i=1}^{n_w} w_i(x) \psi_i(t), \\ u_s(x, t) = \sum_{i=1}^{n_s} u_{s_i}(x) \xi_i(t), \\ u_c(x, t) = \sum_{i=1}^{n_c} u_{c_i}(x) \beta_i(t), \end{cases} \tag{5}$$

其中, n_w, n_s, n_c 为根据精度要求所取的模态阶数. $w_i(x), u_{s_i}(x), u_{c_i}(x)$ 分别表示悬臂梁的横向振型函数、基层纵向的振型函数和约束层纵向的振型函数.

$$w_i(x) = \cosh(k_i x) - \cos(k_i x) - \alpha_i (\sinh(k_i x) - \sin(k_i x)),$$

$$\alpha_i = \frac{\cos(k_i L) + \cosh(k_i L)}{\sin(k_i L) + \sinh(k_i L)};$$

$$k_1 L = 1.875, k_2 L = 4.694, k_3 L = 7.854, \text{ 当 } i > 3 \text{ 时, } k_i L = (i - 0.5) \pi;$$

$$u_{s_i}(x) = u_{c_i}(x) \sin\left(\frac{i\pi x}{2l}\right);$$

$\psi_i(t), \xi_i(t), \beta_i(t)$ 为相应的广义位移分量. 设

$$\bar{L} = T - V, \tag{6}$$

其中, $V = V_s + V_v + V_c, \bar{L}$ 是梁的 Lagrange 函数. 则, Lagrange 方程为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\psi}_i} \right) - \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \psi_i} \right) = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \xi_i} \right) = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\beta}_i} \right) - \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \beta_i} \right) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

把式(3)、(4)、(5)分别代入到式(7)将得到约束阻尼悬臂梁的控制方程：

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_w} M_{\psi\psi,ij} \ddot{\psi}_j + \sum_{j=1}^{n_s} M_{\psi\xi,ij} \ddot{\xi}_j + \sum_{j=1}^{n_c} M_{\psi\beta,ij} \ddot{\beta}_j + \\ \sum_{j=1}^{n_w} K_{\psi\psi,ij} \psi_j + \sum_{j=1}^{n_s} K_{\psi\xi,ij} \xi_j + \sum_{j=1}^{n_c} K_{\psi\beta,ij} \beta_j = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_w} M_{\xi\psi,ij} \ddot{\psi}_j + \sum_{j=1}^{n_s} M_{\xi\xi,ij} \ddot{\xi}_j + \sum_{j=1}^{n_c} M_{\xi\beta,ij} \ddot{\beta}_j + \\ \sum_{j=1}^{n_w} K_{\xi\psi,ij} \psi_j + \sum_{j=1}^{n_s} K_{\xi\xi,ij} \xi_j + \sum_{j=1}^{n_c} K_{\xi\beta,ij} \beta_j = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n_w} M_{\beta\psi,ij} \ddot{\psi}_j + \sum_{j=1}^{n_s} M_{\beta\xi,ij} \ddot{\xi}_j + \sum_{j=1}^{n_c} M_{\beta\beta,ij} \ddot{\beta}_j +$$

$$\sum_{j=1}^{n_w} K_{\beta\theta,ij} \psi_j + \sum_{j=1}^{n_s} K_{\beta\xi,ij} \xi_j + \sum_{j=1}^{n_c} K_{\beta\beta,ij} \beta_j = 0, \quad (10)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} M_{\psi\psi,ij} &= \int_0^l \left[(\rho_c A_c + \rho_v A_v + \rho_s A_s) w_i w_j + \rho_v A_v \left(\frac{h_c - h_s}{4} \right)^2 w_i' w_j' \right] dx, \\ & \quad i, j = 1, \dots, n_w, \\ M_{\psi\xi,ij} &= \int_0^l \rho_v A_v \frac{h_c - h_s}{8} w_i' u_{sj} dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_w; j = 1, 2, \dots, n_s, \\ M_{\psi\beta,ij} &= \int_0^l \rho_v A_v \frac{h_c - h_s}{8} w_i' u_{cj} dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_w; j = 1, 2, \dots, n_c, \\ K_{\psi\psi,ij} &= \int_0^l \left[(E_s I_s + E_c I_c) w_i'' w_j'' + G_v^* A_v \left(\frac{d}{h_v} \right)^2 w_i' w_j' \right] dx, \quad i, j = 1, \dots, n_w, \\ K_{\psi\xi,ij} &= - \int_0^l G_v^* A_v w_i' u_{sj} \frac{d}{h_v^2} dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_w; j = 1, 2, \dots, n_s, \\ K_{\psi\beta,ij} &= \int_0^l G_v^* A_v w_i' u_{cj} \frac{d}{h_v^2} dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_w; j = 1, 2, \dots, n_c; \end{aligned} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_{\xi\xi,ij} &= \int_0^l \left(\frac{1}{4} \rho_v A_v + \rho_s A_s \right) u_{si} u_{sj} dx, \quad i, j = 1, \dots, n_s, \\ M_{\xi\psi,ij} &= \int_0^l \rho_v A_v \frac{h_c - h_s}{8} u_{si} w_j' dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_s; j = 1, 2, \dots, n_w, \\ M_{\xi\beta,ij} &= \int_0^l \frac{1}{4} \rho_v A_v u_{si} u_{cj} dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_s; j = 1, 2, \dots, n_c, \\ K_{\xi\xi,ij} &= \int_0^l \left[E_s A_s u_{si}' u_{sj}' + G_v^* A_v \left(\frac{1}{h_v} \right)^2 u_{si} u_{sj} \right] dx, \quad i, j = 1, \dots, n_s, \\ K_{\xi\psi,ij} &= - \int_0^l G_v^* A_v u_{si} w_j' \frac{d}{h_v^2} dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_s; j = 1, 2, \dots, n_w, \\ K_{\xi\beta,ij} &= - \int_0^l G_v^* A_v \frac{1}{h_v^2} u_{si} u_{cj} dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_s; j = 1, 2, \dots, n_c; \end{aligned} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_{\beta\psi,ij} &= \int_0^l \rho_v A_v \frac{h_c - h_s}{8} u_{ci} w_j' dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_c; j = 1, 2, \dots, n_w, \\ M_{\beta\xi,ij} &= \int_0^l \rho_v A_v \frac{1}{4} u_{ci} u_{sj} dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_c; j = 1, 2, \dots, n_s, \\ M_{\beta\beta,ij} &= \int_0^l \left(\rho_c A_c + \frac{1}{4} \rho_v A_v \right) u_{ci} u_{cj} dx, \quad i, j = 1, \dots, n_c, \\ K_{\beta\psi,ij} &= \int_0^l G_v^* A_v \frac{d}{h_v^2} u_{ci} w_j' dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_c; j = 1, 2, \dots, n_w, \\ K_{\beta\xi,ij} &= - \int_0^l G_v^* A_v \frac{1}{h_v^2} u_{ci} u_{sj} dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_c; j = 1, 2, \dots, n_s, \\ K_{\beta\beta,ij} &= - \int_0^l \left[E_c A_c u_{ci}' u_{cj}' + G_v^* A_v \left(\frac{1}{h_v} \right)^2 u_{ci} u_{cj} \right] dx, \quad i, j = 1, \dots, n_c. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

联立式(8)、(9)和(10),则得约束阻尼悬臂梁的控制方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}, \quad (14)$$

其中, \mathbf{M} 为广义质量矩阵, \mathbf{K} 为广义刚度矩阵, $\mathbf{q}(t) = [\psi \quad \xi \quad \beta]^T$. 令 $\mathbf{q}(t) = \tilde{\mathbf{q}}e^{i\omega t}$, 则约束阻尼悬臂梁的控制方程式 (14) 就能简化为一个特征值方程:

$$\mathbf{K}\tilde{\mathbf{q}} = \omega^2 \mathbf{M}\tilde{\mathbf{q}}. \tag{15}$$

求解此特征值方程, 就能得到约束阻尼悬臂梁的各阶模态振动频率 ω_i (ω_i 为虚数).

2 约束阻尼悬臂梁的瞬态响应

在约束阻尼悬臂梁的自由端部坐标点 $(l, b/2)$ 作用一个集中力 P_0 , 当集中力 $P_0 = 49 \text{ N}$ 突然卸载的时候, 计算其响应. 假设约束阻尼悬臂梁的初始挠度函数以及基层、约束层中面的初始轴向位移函数为

$$\begin{cases} w_0(x) = \sum_{i=1}^{n_w} \bar{a}_i w_i(x), \\ u_{s0}(x) = \sum_{i=1}^{n_s} \bar{b}_i u_{si}(x), \\ u_{c0}(x) = \sum_{i=1}^{n_c} \bar{c}_i u_{ci}(x), \end{cases} \tag{16}$$

其中, $\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{c}_i$ 为未知系数, $w_i(x), u_{si}(x), u_{ci}(x)$ 分别表示悬臂梁的横向振型函数、基层纵向的振型函数和约束层纵向的振型函数. 约束阻尼悬臂梁在 P_0 作用下处于弯曲位置时应变能为

$$\begin{aligned} \tilde{V} = & \frac{1}{2} \int_0^l E_s \left[A_s \left(\sum_{i=1}^{n_s} \bar{b}_i u'_{si} \right)^2 + I_s \left(\sum_{i=1}^{n_w} \bar{a}_i w''_i \right)^2 \right] dx + \\ & \frac{1}{2} \int_0^l E_c \left[A_c \left(\sum_{i=1}^{n_c} \bar{c}_i u'_{ci} \right)^2 + I_c \left(\sum_{i=1}^{n_w} \bar{a}_i w''_i \right)^2 \right] dx + \\ & \frac{1}{2} \int_0^l G^* A_v \frac{1}{h_v^2} \left[\left(\sum_{i=1}^{n_c} \bar{c}_i u_{ci} - \sum_{i=1}^{n_s} \bar{b}_i u_{si} \right) + d \sum_{i=1}^{n_w} \bar{a}_i w'_i \right]^2 dx. \end{aligned} \tag{17}$$

假设位移分量发生了位移边界条件所容许的微小位移: $\delta w_0, \delta u_{s0}, \delta u_{c0}$, 根据虚位移原理可知, 形变势能的增量等于外力势能的减少, 即

$$\delta \tilde{V} = P_0 \delta w_0. \tag{18}$$

把式 (16) 和式 (17) 代到式 (18) 中得

$$\begin{aligned} P_0 \delta \sum_{i=1}^{n_w} \bar{a}_i w_{i1} = & \sum_{i=1}^{n_w} \left\{ \int_0^l E_s I_s \left(\sum_{i=1}^{n_w} \bar{a}_i w''_i \right) w'_i dx + \int_0^l E_c I_c \left(\sum_{i=1}^{n_w} \bar{a}_i w''_i \right) w'_i dx + \right. \\ & \left. \int_0^l G^* A_v \frac{d}{h_v} \left[\left(\sum_{j=1}^{n_c} \bar{c}_j u_{cj} - \sum_{j=1}^{n_s} \bar{b}_j u_{sj} \right) + d \sum_{j=1}^{n_w} \bar{a}_j w'_j \right] w'_i dx \right\} \delta \bar{a}_i + \\ & \sum_{i=1}^{n_s} \left\{ \int_0^l E_s A_s \left(\sum_{j=1}^{n_s} \bar{b}_j u'_{sj} \right) u'_{si} dx + \int_0^l G^* A_v \frac{1}{h_v^2} \left[\sum_{j=1}^{n_c} \bar{c}_j u_{cj} - \sum_{j=1}^{n_s} \bar{b}_j u_{sj} + \right. \right. \\ & \left. \left. d \sum_{j=1}^{n_w} \bar{a}_j w'_j \right] (-u_{si}) dx \right\} \delta \bar{b}_i + \sum_{i=1}^{n_c} \left\{ \int_0^l E_c A_c \left(\sum_{j=1}^{n_c} \bar{c}_j u'_{cj} \right) u'_{ci} dx + \right. \\ & \left. \int_0^l G^* A_v \frac{1}{h_v^2} \left[\sum_{j=1}^{n_c} \bar{c}_j u_{cj} - \sum_{j=1}^{n_s} \bar{b}_j u_{sj} + d \sum_{j=1}^{n_w} \bar{a}_j w'_j \right] (u_{ci}) dx \right\} \delta \bar{c}_i, \end{aligned} \tag{19}$$

其中, w_{i1} 为 $x = x_1$ 处的 w_i 值, x_1 表示 P_0 作用点的坐标. 把式(19)写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\bar{a}\bar{a}} & \mathbf{R}_{\bar{a}\bar{b}} & \mathbf{R}_{\bar{a}\bar{c}} \\ \mathbf{R}_{\bar{b}\bar{a}}^T & \mathbf{R}_{\bar{b}\bar{b}} & \mathbf{R}_{\bar{b}\bar{c}} \\ \mathbf{R}_{\bar{c}\bar{a}}^T & \mathbf{R}_{\bar{c}\bar{b}}^T & \mathbf{R}_{\bar{c}\bar{c}} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{P}}, \quad (20)$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{Q}} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n_w}, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_{n_s}, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_{n_c}]^T, \\ \tilde{\mathbf{P}} = [P_0 X_{11}, P_0 X_{21}, \dots, P_0 X_{n_w 1}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n_s + n_c}]^T; \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} R_{\bar{a}\bar{a},ij} = \int_0^l \left(\frac{1}{4} E_c I_c + E_s I_s \right) w_i'' w_j'' dx + \int_0^l G_v^* A_v \frac{d^2}{h_v^2} w_i' w_j' dx, & i, j = 1, \dots, n_w, \\ R_{\bar{a}\bar{b},ij} = - \int_0^l G_v^* A_v \frac{d}{h_v} w_i' u_{sj} dx, & i = 1, 2, \dots, n_w; j = 1, 2, \dots, n_s, \\ R_{\bar{a}\bar{c},ij} = \int_0^l G_v^* A_v \frac{d}{h_v} w_i' u_{cj} dx, & i = 1, 2, \dots, n_w; j = 1, 2, \dots, n_c; \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} R_{\bar{b}\bar{a},ij} = - \int_0^l G_v^* A_v \frac{d}{h_v} u_{si} w_j' dx, & i = 1, 2, \dots, n_s; j = 1, 2, \dots, n_w, \\ R_{\bar{b}\bar{b},ij} = \int_0^l E_s A_s u_{si}' u_{sj}' dx + \int_0^l G_v^* A_v \frac{1}{h_v^2} u_{si}' u_{sj}' dx, & i, j = 1, \dots, n_s, \\ R_{\bar{b}\bar{c},ij} = - \int_0^l G_v^* A_v \frac{1}{h_v} u_{si}' u_{cj} dx, & i = 1, 2, \dots, n_s; j = 1, 2, \dots, n_c; \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} R_{\bar{c}\bar{a},ij} = \int_0^l G_v^* A_v \frac{d}{h_v} u_{ci} w_j' dx, & i = 1, 2, \dots, n_c; j = 1, 2, \dots, n_w, \\ R_{\bar{c}\bar{b},ij} = - \int_0^l G_v^* A_v \frac{1}{h_v^2} u_{ci} u_{sj} dx, & i = 1, 2, \dots, n_c; j = 1, 2, \dots, n_s, \\ R_{\bar{c}\bar{c},ij} = \int_0^l E_c A_c u_{ci}' u_{cj}' dx + \int_0^l G_v^* A_v \frac{1}{h_v} u_{ci} u_{cj} dx, & i, j = 1, \dots, n_c. \end{cases} \quad (24)$$

求解式(20)就能得到 $\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{c}_i$, 当集中力突然卸载时, 约束阻尼悬臂梁的瞬态响应就为有初始条件的自由振动. 假设有初始位移悬臂梁的自由振动为

$$w(x) = \sum_{j=1}^n A_j w_j(x) e^{i(\omega_j t + \varphi_j)}, \quad (25)$$

其中 A_j 为未知系数, 初始条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = 0, \\ w(x, 0) = w_0(x). \end{cases} \quad (26)$$

联立式(25)和式(26), 可以得到约束阻尼悬臂梁横向振动的瞬态响应的近似解析解为

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^n e^{-\eta_j \omega_j t / 2} \bar{a}_j \left(\cos \omega_j t + \frac{\eta_j}{2} \sin \omega_j t \right) w_j(x), \quad (27)$$

其中, ω_j 为各阶模态振动频率, η_j 为结构损耗因子.

3 数值结果和实验分析

实验设备主要有 INV-1601 振动实验仪、加速度传感器、力锤、电子测力计等, INV1601 型 DASP 软件, 其实验装置如图 3, 实验模型如图 4。



图 3 实验设备

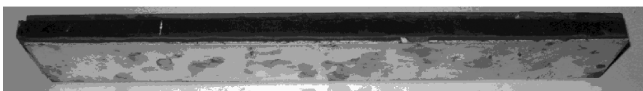


图 4 铝合金约束阻尼梁模型

实验和计算模型的基层材料为 45# 钢, 约束层为铝合金, 其型号为 1060-H24, 阻尼层为丁基橡胶。各材料参数为:

$$\begin{aligned} b &= 0.066 \text{ m}, L = 0.35 \text{ m}, h_s = 0.006 \text{ m}, E_s = 200 \text{ GPa}, \\ \rho_s &= 7\,800 \text{ kg/m}^3, \mu_s = 0.3, h_c = 0.0038 \text{ m}, E_c = 53 \text{ GPa}, \\ \rho_c &= 2\,700 \text{ kg/m}^3, \mu_c = 0.3, \rho_r = 1\,200 \text{ kg/m}^3, \\ h_r &= 0.023 \text{ m}, \mu_r = 0.48, \eta_v = 0.286. \end{aligned}$$

测试了一系列约束阻尼悬臂的振动频率, 其 1、2 阶振动频率的实验和计算数据(由式 (15) 得到)见表 1。

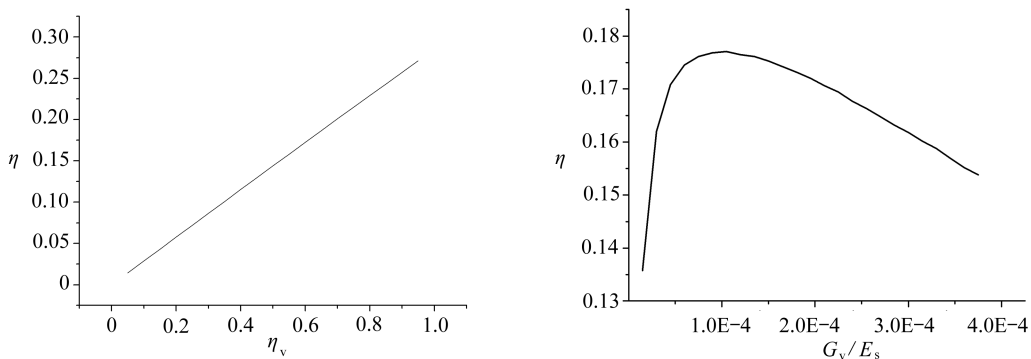


图 5 结构损耗因子随阻尼层材料损耗因子、 G_v/E_s 变化情况

从表 1 可以看出: 本文的理论计算结果和实验结果吻合良好; 当阻尼层模量增大时, 约束阻尼悬臂梁的振动频率略有增加, 这是由于当阻尼层模量增大时, 结构的刚度略增大。

表 1

约束阻尼悬臂梁的振动频率

阶数	约束阻尼悬臂梁振动频率 ω/Hz					
	$G_v = 0.8 \text{ MPa}$		$G_v = 1.1 \text{ MPa}$		$G_v = 1.9 \text{ MPa}$	
	实验值	计算值	实验值	计算值	实验值	计算值
1	36.26	35.42	39.90	36.95	44.27	40.76
2	197.92	198.31	216.62	200.31	229.07	205.60

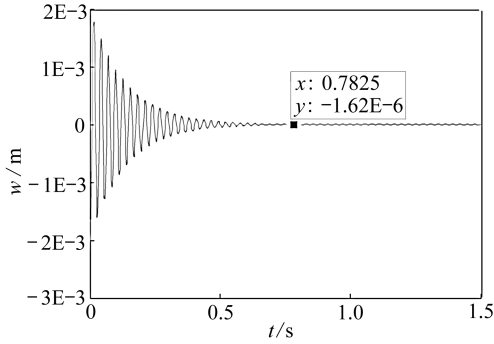
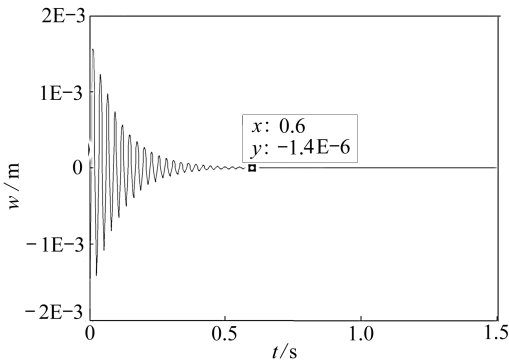
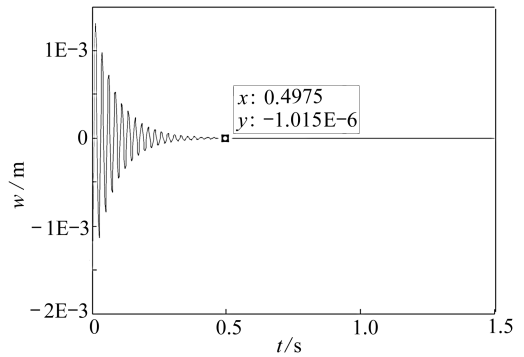
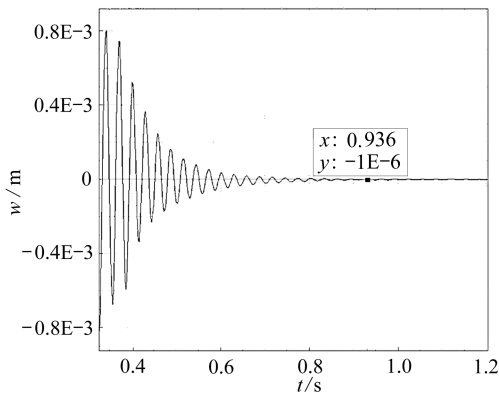
(a) 阻尼层模量 $G_v = 0.8 \text{ GPa}$ (b) 阻尼层模量 $G_v = 1.1 \text{ GPa}$ (c) 阻尼层模量 $G_v = 1.9 \text{ GPa}$

图 6 约束阻尼悬臂梁自由端的瞬态响应(计算结果)

(a) 阻尼层模量 $G_v = 0.8 \text{ GPa}$

从图 5 可以看出:1) 结构损耗因子随阻尼层材料的损耗因子增加而线性增加,因为阻尼层材料的损耗因子增加,结构的阻尼性增加.由此可见,阻尼层的损耗因子对结构的阻尼性能影响较大.2) 结构损耗因子随 G_v/E_s 增加先增加到峰值再逐渐减少,因此 G_v/E_s 存在一个最佳值,使得结构的阻尼性能最好.在本文的模型中,当 $G_v/E_s = 1.5 \times 10^{-4}$,损耗因子达到最大值.

计算了约束阻尼悬臂梁模型当其自由端部坐标点 $(l, b/2)$ 的集中力 $P_0 = 49 \text{ N}$ 突然卸载的情况下约

束阻尼悬臂梁坐标点 $(l, b/2)$ 的瞬态响应.各个约束阻尼悬臂梁的坐标点 $(l, b/2)$ 的瞬态响应计算结果见图 6 中的(a),(b),(c).其中图(a),(b),(c)分别表示阻尼层模量为 0.8 GPa , 1.1 GPa , 1.9 GPa 的约束阻尼悬臂梁的瞬态响应图.可以看出其响应时间分别为: 0.7825 s , 0.6 s , 0.4975 s . [注:当悬臂梁振动瞬态响应波谷的幅值首次出现为 $1 \times 10^{-6} \text{ m}$ 的数量级时,即认为其响应幅值衰减到 0 了(瞬态响应图中黑框的位置)].

从图 6 可以看出:约束阻尼悬臂梁自由端瞬态响应时间随阻尼层材料的模量的增加而减少.

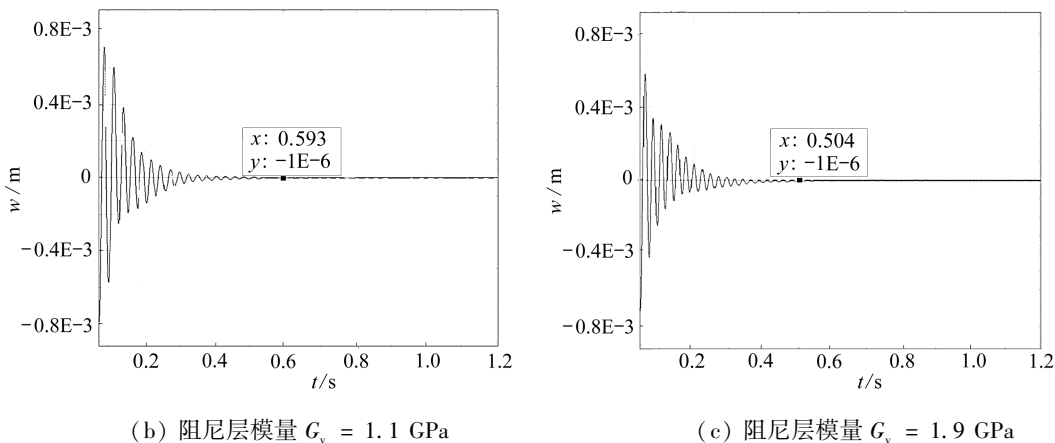


图7 约束阻尼悬臂梁自由端的瞬态响应(实验结果)

主要是因为当阻尼层模量增加时,结构的损耗因子增加了。

测试了当约束阻尼悬臂梁模型自由端部坐标点 $(l, b/2)$ 的集中力 $P_0 = 49$ N 突然卸载的情况下坐标点 $(l, b/2)$ 的瞬态响应. 各个约束阻尼悬臂梁的坐标点 $(l, b/2)$ 的瞬态响应实验结果见图7中(a), (b), (c). 其中图(a), (b), (c) 分别表示阻尼层模量为 0.8 GPa, 1.1 GPa, 1.9 GPa 的约束阻尼悬臂梁的瞬态响应图. 可以看出其响应时间分别为: 0.616 s, 0.522 s, 0.46 s.

从图6和图7可以看出: 约束阻尼悬臂梁自由端瞬态响应时间的理论计算结果和实验结果吻合良好, 且其规律都是一致的, 响应时间随阻尼层模量增大而减少. 由此可见, 本文方法所推导的公式是正确可靠的, 且方法简单, 便于用于工程实际.

4 结 论

由弹性悬臂梁模态叠加构造出约束阻尼悬臂梁的振动模态, 基于 Lagrange 方程推导出了约束阻尼悬臂梁的控制方程, 求解了在集中力突然卸载的情况下约束阻尼悬臂梁的动力响应. 计算并测试了一系列铝合金约束阻尼悬臂梁模型的瞬态响应和振动频率, 得出了以下结论:

1) 约束阻尼悬臂梁结构损耗因子随阻尼层材料损耗因子增加而增加. 这是因为阻尼层材料的损耗因子增加时, 结构的阻尼性增加了. 由此可见, 阻尼层的损耗因子对结构的阻尼性能影响较大.

2) 结构损耗因子随 G_v/E_s 增加先增加到峰值再逐渐减少, 因此阻尼层材料的模量存在一个最佳值, 使得结构的阻尼性能最好.

3) 约束阻尼悬臂梁自由端瞬态响应时间及其规律的理论计算结果和实验结果吻合良好. 结果表明本文所采用的方法是可靠的且易于在工程中应用.

致谢 本文得到海军工程大学自然科学基金项目(HGDQNJJ008)的资助, 特此致谢.

参考文献:

- [1] Nashif A, Jones D, Henderson J. *Vibration Damping* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1985.
- [2] Mead D J. *Passive Vibration Control* [M]. Chichester: John Wiley & Sons, 1998.

- [3] Jones D I G. *Handbook of Viscoelastic Vibration Damping* [M]. Chichester: John Wiley & Sons, 2001.
- [4] Kerwin J E M. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer [J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1959, **31**(7):952-962.
- [5] Mead D J, Markus S. The forced vibration of a three-layer damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1969, **10**(2):163-175.
- [6] Yan M J, Dowell E H. Governing equations of vibrating constrained-layer damping sandwich plates and beams [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1972, **94**: 1041-1047.
- [7] Ravi S S A, Kundra T K, Nakra B C. Response reanalysis of damped beams using eigen-parameter perturbation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **179**: 399-412.
- [8] Baber T T, Maddox R A, Orozco C E. Finite element model for harmonically excited viscoelastic sandwich beams [J]. *Computers and Structures*, 1998, **66**(1):105-113.
- [9] Zheng H, Cai C, Tan X M. Optimization of partial constrained layer damping treatment for vibrational energy minimization of vibrating beams [J]. *Computers and Structures*, 2004, **82** (29/30):2493-2507.

Approximate Analytical Solutions and Experimental Analysis of Transient Response of Constrained Damping Cantilever Beam

HU Ming-yong, WANG An-wen, ZHANG Xiang-ming

(College of Science, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, P. R. China)

Abstract: Vibration mode of constrained damping cantilever was built up according to elastic cantilever beam mode superposition. Then the control equation of constrained damping cantilever beam was derived by using Lagrange's equation. Dynamic response of the constrained damping cantilever beam was obtained according to the principle of virtual work, when the concentrated force was suddenly unloaded. Frequencies and transient response of a series of constrained damping cantilever beam were calculated and tested. The influence of parameters of the damping layer on the response time was analyzed. Resolution and experimental approach are considered. The results show that this method is reliable.

Key words: constrained damping; cantilever beam; transient response; Lagrange's equation; modes superposition