

# 一维非线性周期结构中弹性波传播的辛数学方法\*

侯秀慧<sup>1</sup>, 邓子辰<sup>1,2</sup>, 周加喜<sup>3</sup>

- (1. 西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710072;  
2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;  
3. 湖南大学 机械与运载工程学院, 长沙 410082)

(岳珠峰推荐)

**摘要:** 利用辛数学方法分析了质量-弹簧非线性周期结构链中弹性波的传播问题, 首先利用能量方法得到频域动力方程, 随后通过小量变换将非线性动力方程线性化, 得到辛矩阵, 进而通过求解辛矩阵的本征值问题来研究波的传播性能. 质量-弹簧模型中的弹簧刚度非线性对结构链的传播特性影响很大, 研究发现非线性明显改变了周期结构的传播性能, 而且不同于线性结构, 非线性结构的传播特性与入射波强度有关. 数值算例表明随着非线性强度及入射波强度的增大, 传播通带宽度逐渐减小, 禁带宽度逐渐增大. 当入射波强度增大到一定值时, 弹性波无法在结构中进行传播. 与一般递归方法的比较分析, 验证了辛数学方法在非线性和周期结构波传播问题中的有效性与优越性.

**关键词:** 辛数学方法; 非线性周期结构; 弹性波传播

**中图分类号:** O347.4      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.11.004

## 引 言

研究波在周期性介质中传播的问题, 不仅是物理学、光学、化学及声学等学科的重要基础性问题, 而且在力学中也有着重要的应用, 如周期桁架及板、壳结构等, 经常被应用于航空航天、航海及土木工程中. 周期结构中波的传播问题引起了广泛的关注<sup>[1]</sup>, 当结构呈周期性时, 波在其中传播受周期性约束将形成 Bloch 波, 其具有频率通带和禁带等特殊现象, 周期材料的这种特殊性质在滤波、导波、减振、降噪等方面具有重要的应用前景<sup>[2]</sup>. 然而目前关于线性周期结构中弹性波传播问题的研究已经比较成熟, 有大量的文献可供参考<sup>[3]</sup>, 但关于非线性周期结构中弹性波传播特性的研究还很少. 非线性周期结构拥有延展的 Bloch 态, 即周期结构中

\* 收稿日期: 2010-04-20; 修订日期: 2010-10-01

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(10972182; 10772147; 10632030); 国家基础研究计划 973 项目(2006CB601202); 111 引智计划项目(B07050); 中国博士后科学基金资助项目(200904500170); 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金重点项目(GZ0802)

**作者简介:** 侯秀慧(1983—), 女, 山东武城人, 博士生(E-mail: houxiuhui@yahoo.com.cn); 邓子辰, 教授, 博士生导师(联系人, E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn).

的非线性项只是对能带结构的分布产生一定影响,但整体的能带特征是不会改变的。除此以外,非线性周期结构还拥有局域的孤子解。Zhang 和 Wu 揭示了非线性周期系统中能隙孤子和 Bloch 波的对应关系<sup>[4]</sup>。刘志芳等<sup>[5]</sup>研究了梁中非线性弯曲波的传播特性,证明了在考虑梁的大挠度和转动惯性时梁中存在包络孤立波。Yagi 和 Kawahara<sup>[6]</sup>的研究指出孤波中的能量集中现象可通过引入外部弹簧的方法予以避免。Richoux 等<sup>[7]</sup>比较分析了非线性与无序性在波传播过程中的相互作用。目前非线性周期结构中弹性波传播问题经常应用的研究方法有多尺度方法<sup>[8]</sup>、不变流形法<sup>[9]</sup>及非线性图像法<sup>[10]</sup>等。

本文利用辛数学方法<sup>[11-12]</sup>对非线性周期结构中弹性波的传播特性进行了分析研究。一切耗散效应可以忽略不计的物理过程都可表示成能够保持辛几何结构不变的 Hamilton 系统的形式<sup>[13]</sup>,它在自然界中具有普适性,解 Hamilton 方程的离散算法就是辛算法。其相对于非辛算法具有一系列的优点,如高精度、保结构及长时间稳定性等。1984 年冯康和秦孟兆<sup>[14]</sup>指出动力学方程积分的差分格式应当保辛,从而为辛数学的应用做出了重要的贡献。在力学界,钟万勰院士领导的课题组将辛算法引入应用力学领域,提出了精细积分算法并完善了几何积分算法理论<sup>[11]</sup>。张素英和邓子辰等将保结构的几何积分算法应用于非线性动力学问题的求解,取得了一系列研究成果<sup>[15-17]</sup>。值得一提的是,1997 年 Bridges<sup>[18]</sup>从辛几何的角度提出了多辛算法,2001 年 Reich<sup>[19]</sup>,Marsden 等<sup>[20]</sup>从变分原理的角度提出了多辛积分的概念。近年来这一算法得到了迅猛的发展,它已经成功地解决了很多现实问题,模拟了各种物理现象。

在应用辛算法进行周期结构波动特性的研究方面,Williams 等<sup>[21]</sup>利用 Wittrick-Williams 算法研究了周期支撑一维 Timoshenko 梁的频散关系,有效地将周期结构中波的传播问题等效为特征值问题。Zhou 等<sup>[22]</sup>利用有限元与辛数学方法研究了周期支撑梁在简谐荷载作用下的强迫振动,指出当荷载的频率在结构禁带范围内时会发生振动局域化现象,应予以避免。Zhong 等<sup>[12]</sup>利用辛数学方法对周期性电磁波导问题进行了研究。张洪武等基于界带模型<sup>[23]</sup>利用辛数学方法研究了碳纳米管周期结构的弹性波频散关系<sup>[24-25]</sup>。但以上研究的模型均为线性周期结构。就作者所知,将辛数学方法应用于非线性周期结构弹性波传播问题的研究还很少。本文利用辛数学方法研究了非线性周期结构的波动特性,对非线性结构区别于线性结构的传播特性进行了比较分析,同时利用一般递归方法对辛数学方法的有效性及其优越性进行了验证。

## 1 一维非线性周期结构模型

一维非线性质量-弹簧周期结构模型如图 1 所示,为了简单起见,非线性作用设为弹簧的刚度非线性。采用能量方法进行求解。对于刚度非线性的质量-弹簧周期结构,动力势能为

$$U' = \sum_{j=1}^n (U_j^{(1)} + U_j^{(n)} - T_j), \quad (1)$$

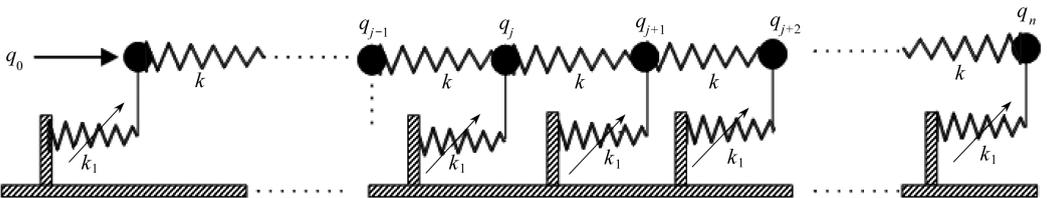


图 1 非线性质量-弹簧周期结构链

其中,  $n$  代表结构链长度,即子结构的数目; $U_j^{(1)} = k(q_j - q_{j-1})^2/2$  为第  $j$  组与第  $j-1$  组子结构

之间的线性弹簧变形能,  $U_j^{(n)} = \gamma k_1 q_j^4 / 4$  为第  $j$  组子结构中非线性弹簧变形能,  $T_j = m \dot{q}_j^2 / 2$  为第  $j$  组子结构的动能. 以上表达式中,  $q_j$  为第  $j$  组子结构的位移,  $k$  和  $k_1$  分别代表线性弹簧及非线性弹簧的刚度系数,  $\gamma$  代表非线性强度,  $m$  为每一组子结构的质量.

根据势能变分原理  $\delta U' = 0$ , 该周期结构的频域动力方程为

$$\ddot{q}_j + a_1(2q_j - q_{j-1} - q_{j+1}) + a_2 q_j^3 = 0, \quad (2)$$

其中,  $a_1 = k/m$ ,  $a_2 = \gamma k_1/m$ .

## 2 频域动力方程的线性化

设该周期结构做频率为  $\omega$  的简谐运动, 则广义位移可表示为

$$q_j = y_j e^{i\omega t}, \quad (3)$$

将方程(3)代入方程(2), 又知  $z = e^{ix}$  为周期函数, 故  $e^{i3\omega t}$  可简化表示为  $e^{i\omega t}$ , 则得

$$y_{j-1} + y_{j+1} = (2 - \omega^2/a_1 + a_2 y_j^2/a_1) y_j, \quad (4)$$

其中,  $y_j$  是一个与时间无关的变量, 仅与结构链长度  $n$  有关. 方程(4) 连接相邻节点  $j-1$ ,  $j$  和  $j+1$  的振幅, 写成矩阵向量相乘的形式, 即

$$\mathbf{P}_{j+1} = \mathbf{S}^{(j)} \mathbf{P}_j, \quad (5)$$

其中 
$$\mathbf{P}_{j+1} = \begin{bmatrix} y_{j+1} \\ y_j \end{bmatrix}, \mathbf{P}_j = \begin{bmatrix} y_j \\ y_{j-1} \end{bmatrix}, \mathbf{S}^{(j)} = \begin{pmatrix} 2 - \omega^2/a_1 + a_2 y_j^2/a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

引入矩阵

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

通过验算得

$$\mathbf{S}^{(j)\top} \mathbf{J} \mathbf{S}^{(j)} = \mathbf{J}.$$

$\mathbf{S}^{(j)}$  是一个辛矩阵, 但  $\mathbf{S}^{(j)}$  仍与状态向量  $\mathbf{P}_j$  有关, 不能独立计算, 因此需要将方程(4) 线性化. 设  $y_j \approx y_j^0 + \varepsilon_j(t)$ , 其中  $\varepsilon_j(t)$  是小摄动量, 代入方程(4), 得

$$y_{j-1}^0 + \varepsilon_{j-1}(t) + y_{j+1}^0 + \varepsilon_{j+1}(t) = (2 - \omega^2/a_1 + a_2 (y_j^0 + \varepsilon_j(t))^2/a_1) (y_j^0 + \varepsilon_j(t)), \quad (6)$$

整理得

$$[(y_{j-1}^0 + y_{j+1}^0) - (2 - \omega^2/a_1 + a_2 (y_j^0)^2/a_1) y_j^0] + (\varepsilon_{j-1}(t) + \varepsilon_{j+1}(t)) = (2 - \omega^2/a_1 + 3a_2 y_j^0 (y_j^0 + \varepsilon_j(t))/a_1) \varepsilon_j(t) + a_2 \varepsilon_j^3(t)/a_1, \quad (7)$$

根据方程(4), 方程(7) 等式左侧方括号内的表达式为 0; 同时, 由于  $\varepsilon_j(t)$  是小摄动量, 则  $\varepsilon_j^2(t)$  及  $\varepsilon_j^3(t)$  项均很小, 故做了以下 2 个小摄动量假设: (i) 在方程(7) 等式右侧第 1 项中设  $y_j^0 + \varepsilon_j(t) \approx y_j^0$ ; (ii) 忽略了方程(7) 等式右侧的第 2 项  $\varepsilon_j^3(t)$  项. 根据以上假设, 方程(6) 可以化简为

$$\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_{j+1} = (2 - \omega^2/a_1 + 3a_2 (y_j^0)^2/a_1) \varepsilon_j, \quad (8)$$

式中  $(y_j^0)^2$  作为  $\varepsilon_j$  的系数, 与  $\varepsilon_j$  无关, 故通过以上代换即实现了方程(4) 的线性化.

同理, 可将方程(8) 表示为矩阵向量相乘的形式:

$$\mathbf{Q}_{j+1} = \mathbf{T} \mathbf{Q}_j, \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{Q}_{j+1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{j+1} \\ \varepsilon_j \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} \varepsilon_j \\ \varepsilon_{j-1} \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 - \omega^2/a_1 + 3a_2(y_j^0)^2/a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

可以证明  $\mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} = \mathbf{J}$ .

传递矩阵  $\mathbf{T}$  是一个辛矩阵, 而且  $\mathbf{T}$  与状态向量  $\mathbf{Q}_j$  无关, 可以独立计算, 故通过以上的小量代换, 有效地将非线性动力方程线性化, 从而可利用已有的方法进一步计算弹性波的传播性能.

利用分离变量的方法求解传递矩阵  $\mathbf{T}$ , 取  $\mathbf{Q}_j = \boldsymbol{\psi} \cdot \lambda^j$ , 代入方程(9), 得

$$\mathbf{T}\boldsymbol{\psi} = \lambda\boldsymbol{\psi}, \quad (10)$$

这就构成了辛矩阵的本征值问题,  $\lambda$  是本征值,  $\boldsymbol{\psi}$  是本征向量. 对于一个辛矩阵, 若  $\lambda$  是本征值, 则  $1/\lambda$  也必为其本征值. 对于上述  $2 \times 2$  辛矩阵  $\mathbf{T}$ , 有两个本征值  $\lambda_1, \lambda_2$ , 它们可能取复值, 且满足  $\det \mathbf{T} = 1$ , 即  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1, \lambda_2 = \lambda_1^{-1}$ .  $|\lambda_1| \leq 1$  对应于向右传播的弹性波,  $|\lambda_2| \geq 1$  对应于向左传播的弹性波. 对应于两个本征值的本征向量为  $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2$ , 它们相互间可以辛归一化为  $\boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{J} \boldsymbol{\psi}_2 = 1$ . 以本征向量  $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2$  为列组成矩阵  $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\psi}_1 \quad \boldsymbol{\psi}_2]$ , 它必定也是一个辛矩阵.

对于波传播问题, 线性动力方程(9)的本征值  $\lambda$  与传播常数  $\mu$  之间存在以下关系<sup>[8]</sup>:

$$\lambda = e^{\mu}, \quad (11)$$

其中  $\mu$  是复数, 且

$$\lambda = \frac{Q}{2} + \frac{\sqrt{Q^2 - 4}}{2}, \quad Q = 2 - \frac{\omega^2}{a_1} + \frac{3a_2(y_j^0)^2}{a_1}. \quad (12)$$

因为质量-弹簧振子的振幅沿结构链长度呈周期性变化, 故可将振子位移  $y_j^0$  近似为初始位移, 即入射波强度  $y_0^0$ , 故由方程(11) 可得传播常数随频率的变化关系 ( $\mu \rightarrow \omega$ ), 即所谓的频散关系. 在下面的求解过程中, 为了简便起见, 将  $y_j^0$  中的上标舍去, 即用  $y_j$  表示  $y_j^0$ .

## 3 数值算例及结果讨论

### 3.1 非线性响应轨道

方程(5)在二维实平面内定义了一个立方非线性辛矩阵  $\mathbf{S}^{(j)}$ , 可以由  $(y_j, y_{j-1})$  迭代求解

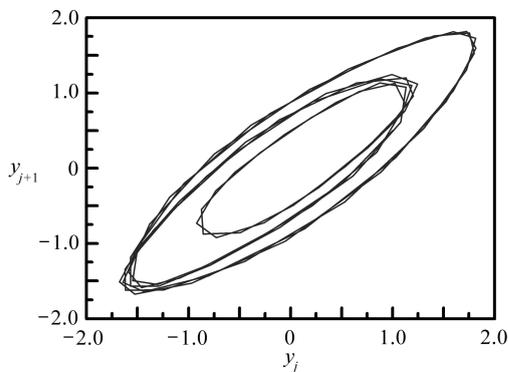


图2 质量-弹簧振子的辛矩阵响应曲线  $\mathbf{S}^{(j)}$   
( $\mu = \pi/3, \gamma = 1, n = 100$ )

$(y_{j+1}, y_j)$ , 如图2所示. 设初始条件满足  $[y_0, y_1] = [1, \exp(i\mu)]$ , 系统参数取为  $m = 5 \text{ kg}, k = 10 \text{ N/m}, k_1 = 1 \text{ N/m}$ , 则  $a_1 = 2, a_2 = 0.2\gamma$ . 传播常数取为  $\mu = \pi/3$ , 非线性系数  $\gamma = 1$ . 图示的椭圆轨道描述了  $n = 100$  组质量-弹簧振子响应的变化轨迹.

### 3.2 弹性波传播特性

在结构动力学中, 传播常数  $\mu$  一般可表示为  $\mu = \alpha + i\beta$ , 其中  $\alpha$  代表波传播过程中子结构振幅的衰减情况, 被定义为传播衰减常数; 而  $\beta$  代表波传播过程中子结构振动相位的变化情况, 被定义为传播相常数. 传播常数  $\mu$  的实部及虚部随频率

的变化关系如图3 ~ 图5所示, 采用与3.1节相同的系统参数, 我们考虑了非线性强度  $\gamma$  及入射波强度  $y_0$  对传播性能的影响. 当  $\alpha = 0, 0 < \beta < \pi$  时, 相应的频率域被称为传播通带, 而当  $\alpha$

$\neq 0, \beta = 0$  或  $\pi$  时, 相应的频率域被称为传播禁带. 弹性波在非线性周期结构传播过程中, 当传播常数实部为 0 时, 只是振动相位发生变化, 而振子振幅不会发生改变; 而当实部不为 0 时, 振子的振幅会发生连续的变化. 对于非线性结构, 没有固定的振幅衰减常数.

由图 3 可知非线性参数的正负对弹性波传播特性影响很大. 当  $\gamma < 0$  时, 如图 3(a) 所示, 传播通带的宽度为  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2.249 + 2.249 = 4.498$ ;

当  $\gamma = 0$  时, 如图 3(b) 所示, 传播通带宽度为  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2.828 + 2.828 = 5.656$ ;

当  $\gamma > 0$  时, 如图 3(c) 所示, 传播通带宽度为

$$\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1) + (\omega_4 - \omega_3) = (-1.715 + 3.307) + (3.307 - 1.715) = 3.184.$$

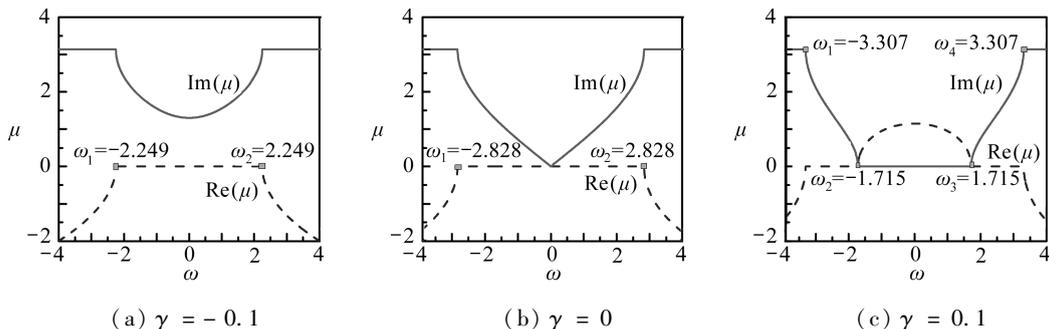
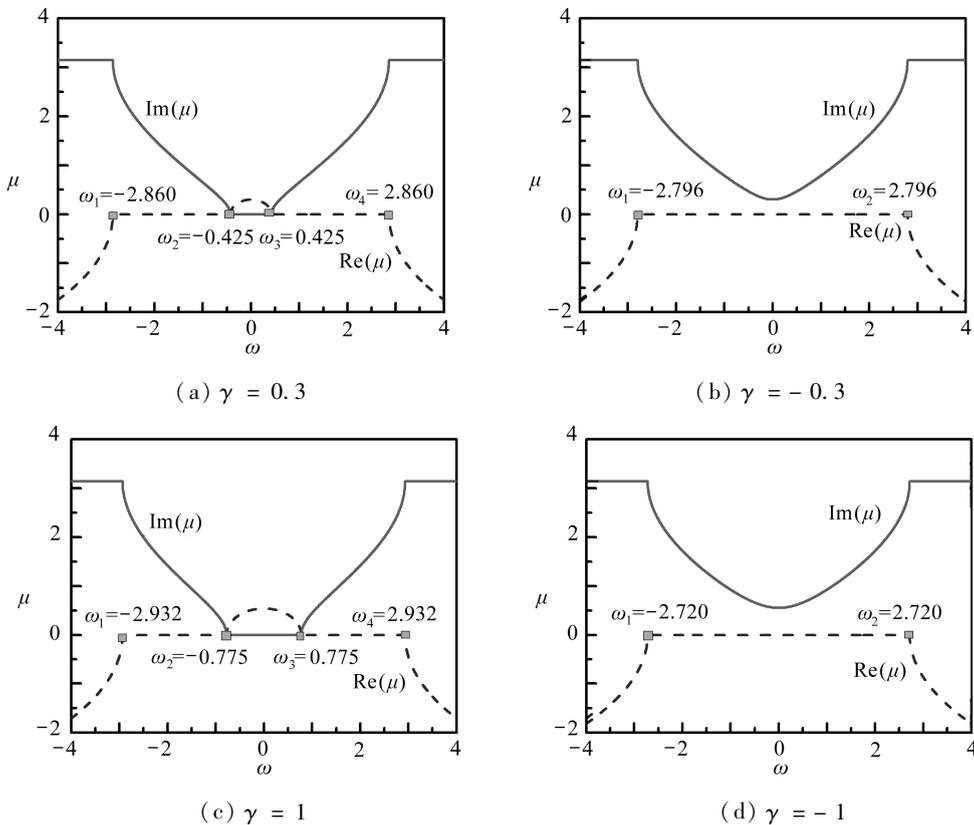


图 3 传播相常数  $(\text{Im}(\mu))$ , 实线) 及衰减常数  $(\text{Re}(\mu))$ , 虚线) 随频率的变化关系 (入射波强度  $\gamma_0 = 7$ )



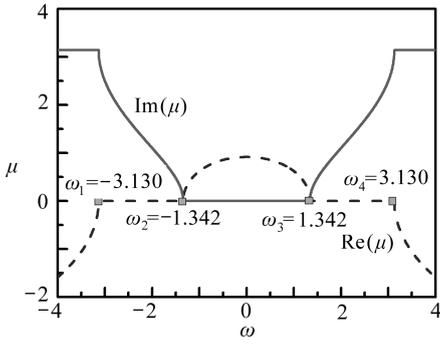
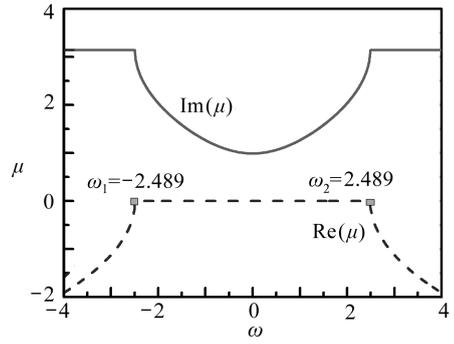
(e)  $\gamma = 3$ (f)  $\gamma = -3$ 

图4 传播相常数 ( $\text{Im}(\mu)$ , 实线)及衰减常数 ( $\text{Re}(\mu)$ , 虚线)随频率的变化关系(入射波强度  $y_0 = 1$ )

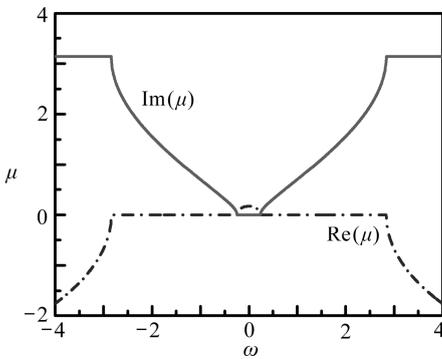
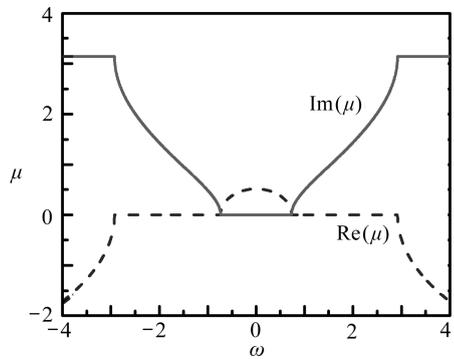
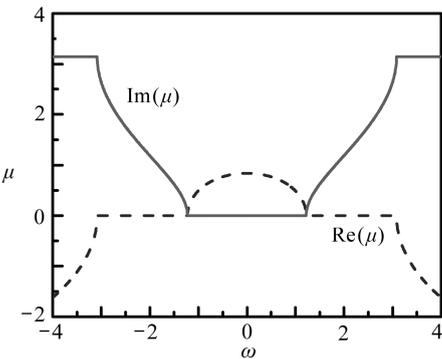
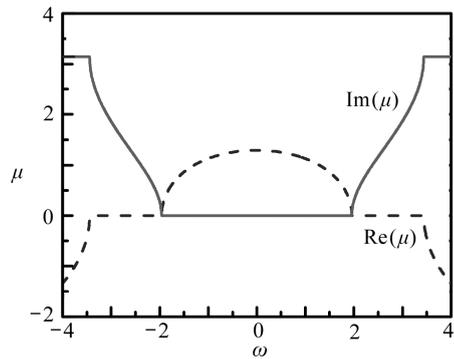
(a)  $y_0 = 1$ (b)  $y_0 = 3$ (c)  $y_0 = 5$ (d)  $y_0 = 8$ 

图5 传播相常数 ( $\text{Im}(\mu)$ , 实线)及衰减常数 ( $\text{Re}(\mu)$ , 虚线)随频率的变化关系(非线性强度  $\gamma = 0.1$ )

通过对比可知,非线性情况下 ( $\gamma \neq 0$ ) 传播通带宽度明显小于线性情况 ( $\gamma = 0$ ), 且  $\gamma > 0$  时,原来 ( $\gamma = 0$  及  $\gamma < 0$  时)为传播通带的区域出现了传播禁带,从而明显削弱了结构的传播能力.为了进一步研究非线性的作用,我们比较了非线性强度的大小对传播性能的影响,如图4所示,随着非线性强度  $|\gamma|$  的增大,传播通带逐渐演变为传播禁带,也就是说,非线性的引入减小了通带的宽度,增大了禁带的宽度,且随着非线性强度的增大,通带宽度逐渐减小,最

后当  $|\gamma|$  达到某一临界值时,通带完全消失,则整个结构对弹性波具有隔离作用,振动无法在结构中传播。

与线性结构不同,对于非线性周期结构链,传播常数  $\mu$  不仅与频率  $\omega$  有关,而且也会随着入射波强度  $y_0$  的大小而变化,如图 5 所示. 与非线性强度对传播特性的影响类似,随着入射波强度的增大,传播通带宽度逐渐减小,禁带宽度逐渐延长,同样存在一个临界值  $|y_0|$ , 当入射波强度高于这个临界值时,整个结构对弹性波是“隐形”的,即不具备传播能力. 弹性波在非线性结构中传播的振幅依赖性可以使传播通带转变为传播禁带,或者相反,使传播禁带转变为传播通带。

#### 4 辛数学方法有效性验证

为了验证辛数学方法的有效性,我们对离散非线性方程(4)进行迭代求解,采用与上节相同的系统参数且设频率与传播常数间的关系为  $\omega(\mu) = 2\cos(\mu)^{[26]}$ . 设入射波强度满足  $[y_0, y_1] = [1, \exp(i\mu)]$ , 取  $n = 10^3$  组非线性弹簧振子, 传输系数设为  $T = |y_n|^2 / |y_0|^2$ , 其中  $y_n$  为结构链末端的传播强度,  $y_0$  为入射波强度。

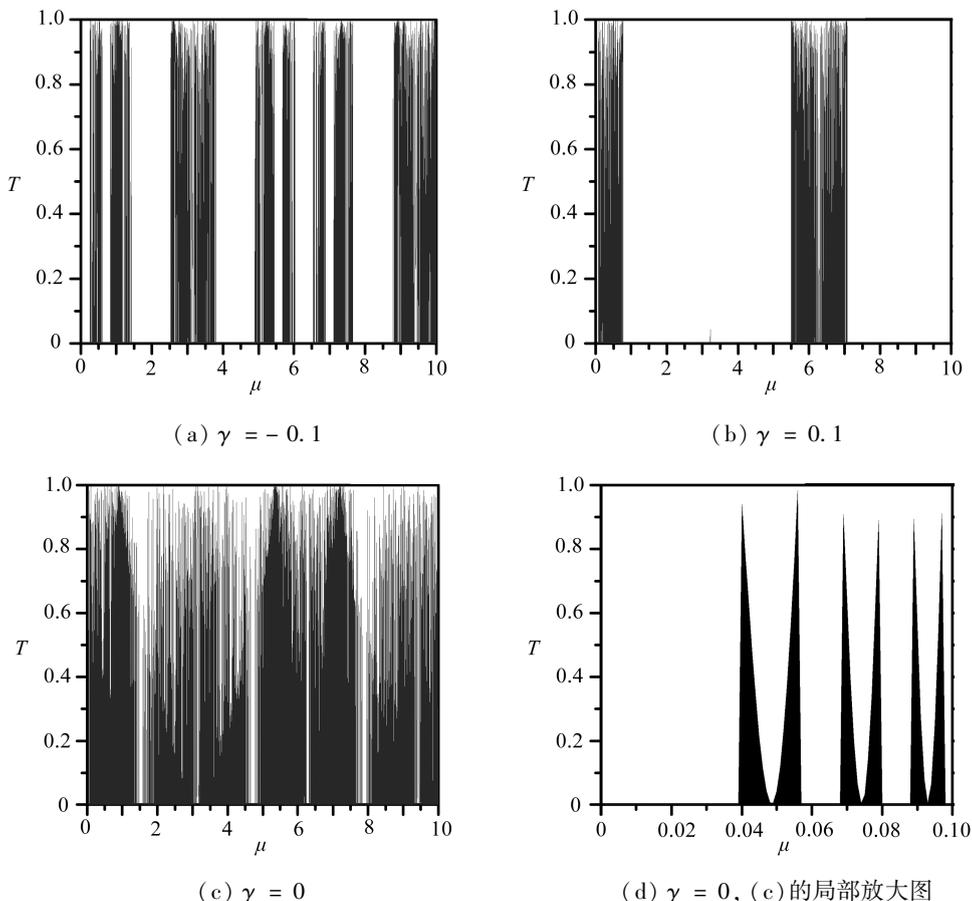


图 6 传输系数随传播常数的变化关系(入射波强度  $y_0 = 7$ , 深色区域:通带;白色区域:禁带)

不同的非线性强度下传输系数  $T$  随传播常数  $\mu$  的变化关系如图 6 及图 7 所示. 由图 6(a)

~图 6(c) 的比较分析可知非线性系数的正负对弹性波的传播性能影响很大. 线性条件下, 整个结构链几乎可以完整地传输输入射波能量, 只在  $\mu$  空间的局部存在很窄的传播禁带. 而非线性作用下, 传播通带宽度逐渐减小, 禁带宽度逐渐增大, 且  $\gamma > 0$  的传播通带宽度要明显小于  $\gamma < 0$  的通带宽度. 当  $\gamma$  由负(图 6(a))转为正(图 6(b))时, 第 1 个禁带消失了, 第 2 个禁带到第 4 个禁带之间的区域合并为一个禁带, 从而大大地削弱了结构的传播能力.

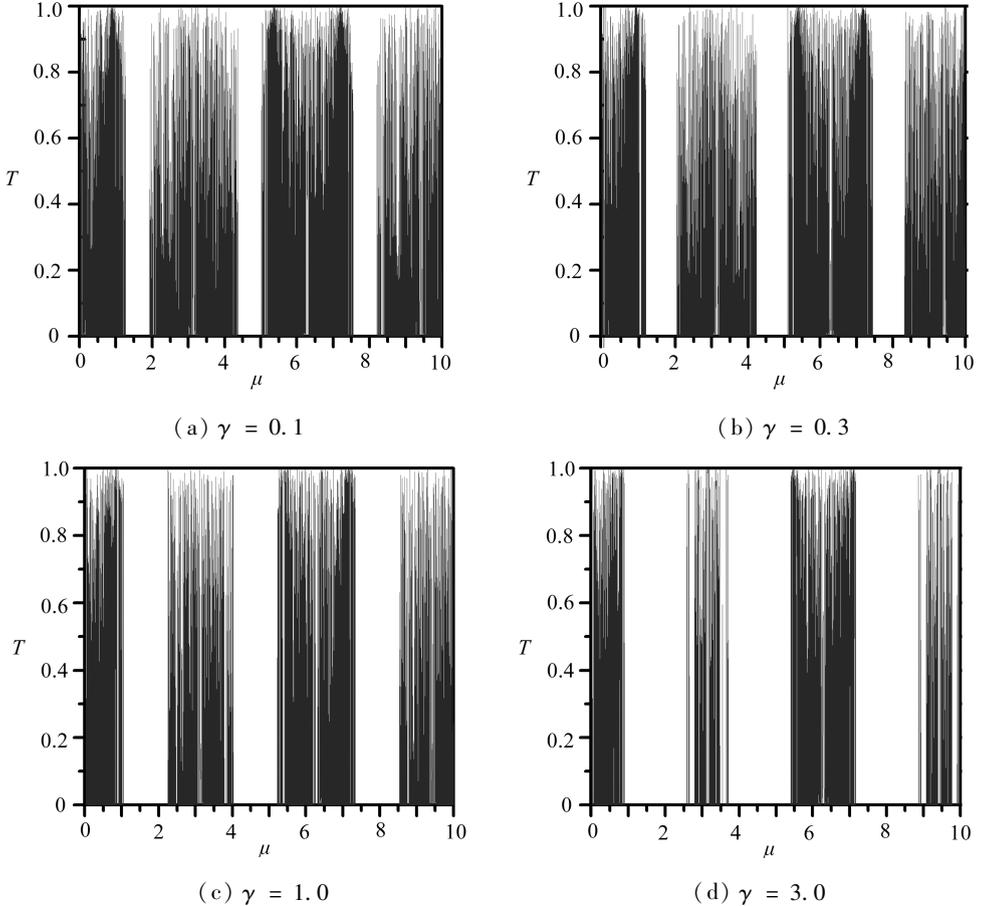


图 7 传输系数随传播常数的变化关系(入射波强度  $y_0 = 1$ , 深色区域:通带;白色区域:禁带)

禁带的宽度取决于系数  $|\gamma|$  的大小, 如图 7 所示, 随着非线性强度  $|\gamma|$  的增大, 传播禁带的宽度逐渐增大, 且原来的通带也随着  $\gamma$  的增大逐渐演化为禁带. 由此可推知, 当非线性系数增大到一定程度时, 弹性波是无法在结构链中传播的. 通过观察图 7 亦可知, 传播常数在  $\mu = N\pi (N = 1, 2, 3, \dots)$  等点附近取值时, 整个结构链均处于传播通带,  $\mu = 0$  除外, 见图 6(d).

与上节相同, 我们进一步分析了入射波强度对弹性波传播性能的影响. 由图 8 可知, 传播禁带的宽度随入射波强度的增大而增大, 且存在一个临界值  $y_0^{cri}$ , 当入射波强度超过这个临界值时, 相邻的传播通带合并入临近的禁带中, 最后导致弹性波无法在整个结构链中传播<sup>[26]</sup>. 这种临界值现象在线性结构中并不存在, 是非线性结构特有的性质, 在线性结构中总是存在传播通带的, 即使在一些特定情况下带宽会很小. 对于给定的传播常数  $\mu$ , 增大入射波强度会使原来的传播通带转变为传播禁带, 相反, 减小入射波强度会使原来的传播禁带转变为传播通带. 即非线性周期结构中, 入射波强度直接影响弹性波的传播性能.

本节的研究与上节所得结果一致,故有效地证明了辛数学方法的有效性,即辛数学方法可以准确地分析弹性波在非线性周期结构中的传播特性.同时,辛数学方法充分利用结构的周期性,采用子结构之间的传递矩阵求解其能带特性,结构链长度的增大不会增加计算量,故与迭代方法相比,大大缩短了求解所需的时间,从而提高了计算效率.

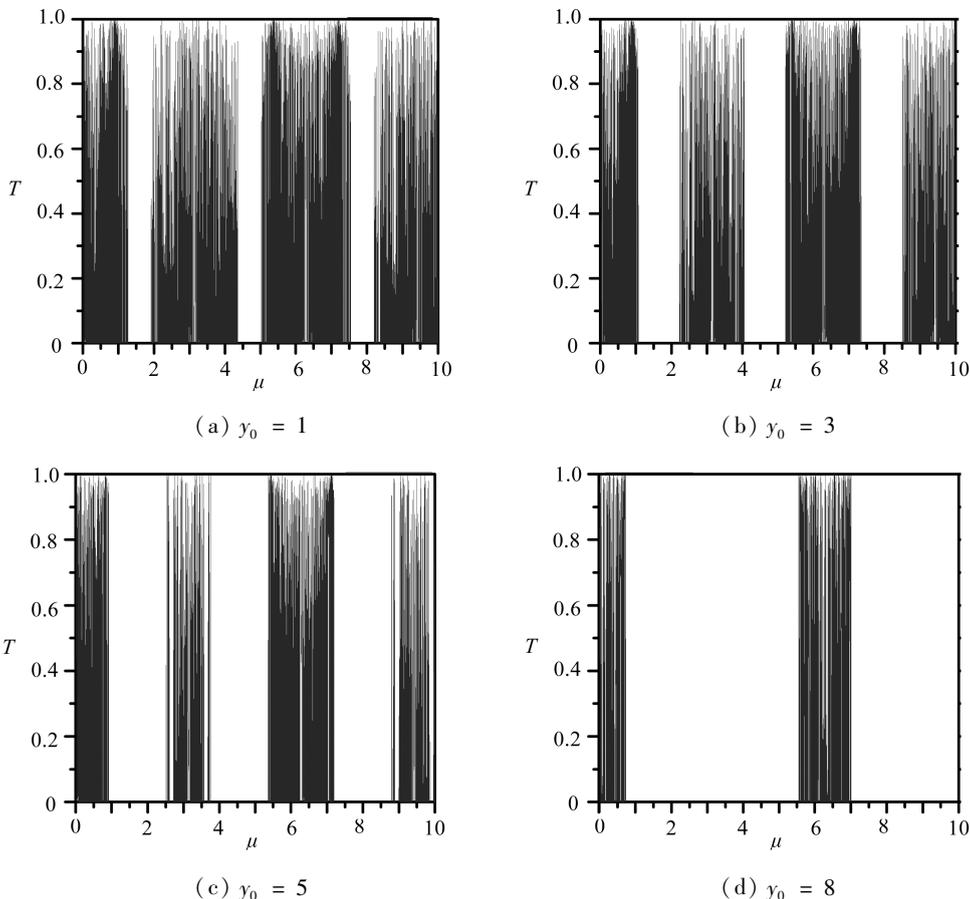


图8 传输系数随传播常数的变化关系(非线性强度  $\gamma = 0.1$ , 深色区域:通带;白色区域:禁带)

## 5 结 论

本文首次将辛数学方法应用到非线性周期结构弹性波的传播问题研究中,并对该方法的有效性及优越性进行了验证.质量-弹簧周期结构中的刚度非线性改变了整体结构的传播性能.首先,非线性系数的正负对弹性波传播性能影响很大;其次,随着入射波强度  $|\gamma_0|$  及非线性强度  $|\gamma|$  的增大,结构的传播能力逐渐减弱,且当这两种强度高于某一临界值时,弹性波无法在结构中传播.这点与线性情况不同,在线性结构中总是存在传播通带的,即使带宽很小.对比线性结构与非线性结构的带隙特征,对于相同的传播常数  $\mu$ ,我们会发现非线性结构中的禁带宽度会明显大于相应的线性结构,即弹性波的传播能力会明显减弱.这种传播性能的变化对工程实际应用具有一定的指导意义.

致谢 特此感谢西北工业大学博士创新基金(CX200908),西北工业大学基础研究基金

(JC200938)的资助.

### 参考文献:

- [1] Mead D M. Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from southampton, 1964-1995[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, **190**(3): 495-524.
- [2] Yan Z Z, Wang Y S. Calculation of band structures for surface waves in two-dimensional phononic crystals with a wavelet-based method[J]. *Physical Review B(Condensed Matter and Materials Physics)*, 2008, **78**(9): 4306-4316.
- [3] Jensen J S. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass-spring structures[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, **266**(5): 1053-1078.
- [4] Zhang Y P, Wu B. Composition relation between gap solitons and Bloch waves in nonlinear periodic systems[J]. *Physical Review Letters*, 2009, **102**(9): 3905-3908.
- [5] 刘志芳, 王铁锋, 张善元. 梁中非线性弯曲波传播特性的研究[J]. *力学学报*, 2007, **39**(2): 238-244.
- [6] Yagi D, Kawahara T. Strongly nonlinear envelope soliton in a lattice model for periodic structure[J]. *Wave Motion*, 2001, **34**(1): 97-107.
- [7] Richoux O, Depollier C, Hardy J. Propagation of mechanical waves in a one-dimensional nonlinear disordered lattice[J]. *Physical Review E*, 2006, **73**(2): 6611-6621.
- [8] Marathe A, Chatterjee A. Wave attenuation in nonlinear periodic structures using harmonic balance and multiple scales[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, **289**(4/5): 871-888.
- [9] Georgiou I T, Vakakis A F. An invariant manifold approach for studying waves in a one-dimensional array of non-linear oscillators[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1996, **31**(6): 871-886.
- [10] Romeo F, Rega G. Wave propagation properties in oscillatory chains with cubic nonlinearities via nonlinear map approach[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, **29**(3): 606-617.
- [11] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京:高等教育出版社, 2006.
- [12] Zhong W X, Williams F W, Leung A Y T. Symplectic analysis for periodical electro-magnetic waveguides[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, **267**(2): 227-244.
- [13] 冯康, 秦孟兆. 哈密尔顿系统的辛几何算法[M]. 杭州:浙江科学技术出版社, 2002.
- [14] Feng K. On difference schemes and symplectic geometry[C]//*Proceeding of the 1984 Beijing Symposium on D D*. Beijing: Science Press, 1984.
- [15] 张素英, 邓子辰. 非线性动力学系统的几何积分理论及应用[M]. 西安:西北工业大学出版社, 2005.
- [16] Elmaimouni L, Lefebvre J E, Zhang V, Gryba T. A polynomial approach to the analysis of guided waves in anisotropic cylinders of infinite length[J]. *Wave Motion*, 2005, **42**(2): 177-189.
- [17] Wu C J, Chen H L, Huang X Q. Sound radiation from a finite fluid-filled/submerged cylindrical shell with porous material sandwich[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **238**(3): 425-441.
- [18] Bridges T J. Multi-symplectic structures and wave propagation[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1997, **121**(1): 147-190.
- [19] Reich S. Multi-symplectic Runge-Kutta collocation method for Hamiltonian wave equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, **157**(2): 473-499.
- [20] Marsden J E, Pekarsky S, Shkoller S, West M. Variational methods, multisymplectic geometry and continuum mechanics[J]. *Journal of Geometry and Physics*, 2001, **38**(3/4): 253-

284.

- [21] Williams F W, Zhong W X, Bennett P N. Computation of the eigenvalues of wave propagation in periodic substructural systems[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1993, **115**(4): 422-426.
- [22] Zhou M, Zhong W X, Williams F W. Wave propagation in substructural chain-type structures excited by harmonic forces[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1993, **35**(11): 953-964.
- [23] 张洪武, 姚征, 钟万勰. 界带分析的基本理论和计算方法[J]. *计算力学学报*, 2006, **23**(3): 257-263.
- [24] Zhang H W, Yao Z, Wang J B, Zhong W X. Phonon dispersion analysis of carbon nanotubes based on inter-belt model and symplectic solution method[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, **44**(20): 6428-6449.
- [25] 姚征, 张洪武, 王晋宝. 基于界带模型的碳纳米管声子谱的辛分析[J]. *固体力学学报*, 2008, **29**(1): 13-22.
- [26] Hennig D, Tsironis G P. Wave transmission in nonlinear lattices[J]. *Physics Reports*, 1999, **307**(5/6): 333-432.

## Symplectic Analysis for Wave Propagation in One-Dimensional Nonlinear Periodic Structures

HOU Xiu-hui<sup>1</sup>, DENG Zi-chen<sup>1,2</sup>, ZHOU Jia-xi<sup>3</sup>

(1. *Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P. R. China;*

2. *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P. R. China;*

3. *College of Mechanical & Vehicle Engineering, Hunan University, Changsha 410082, P. R. China*)

**Abstract:** The wave propagation problem in nonlinear periodic mass-spring structure chain was analyzed using the symplectic mathematical method. Firstly the energy method was applied to construct the dynamical equation and then the nonlinear dynamical equation was linearized using the small parameter perturbation method. The eigen-solutions of the symplectic matrix were applied to analyze the wave propagation problem in nonlinear periodic lattices. Nonlinearity in the mass-spring chain, arising from the nonlinear spring stiffness effect, has profound effects on the overall transmission of the chain. The wave propagation characteristics are not only altered due to the nonlinearity but also related with the incident wave intensity, which is a genuine nonlinear effect that is not present in the corresponding linear model. Numerical results show how the increase of nonlinearity or incident wave amplitude leads to a closing of the transmitting gaps. Comparison with the normal recursive approach demonstrates the effectiveness and superiority of the symplectic method in wave propagation problem for nonlinear periodic structures.

**Key words:** symplectic mathematical method; nonlinear periodic structure; elastic wave propagation