文章编号:1000-0887(2010)11-1360-12

Oseen 方程的一种新的局部投影稳定化方法*

白艳红[1], 冯民富[2], 王川龙[1]

(1. 太原师范学院 数学系, 太原 030012;
2. 四川大学 数学学院, 成都 610064)

(郭兴明推荐)

摘要: 对 Oseen 方程提出一种新的局部投影稳定化有限元方法,并且速度和压力采用 inf-sup 稳定的非协调有限元空间逼近。局部投影稳定化项仅加在子网格上 ($H \geqslant h$);与 RFB 方法相比,该方法稳定性项简单,并且可以克服对流占优。最后,通过实验证明,数值结果和理论结果完全一致。

关 键 词: Oseen 方程; 局部投影稳定化方法; Crouzeix-Raviart 元

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.11.009

引 言

一般来说,对于 Oseen 方程,混合有限元方法是最自然的重要方法,但它面临两个问题:要求有限元空间满足离散的 inf-sup 稳定性条件;当流动问题产生对流占优,即使满足 inf-sup(或 Babuska-Brezzi)稳定的有限元空间,数值解仍会产生伪振荡。

众所周知,工程上最常使用的 P_1/P_0 元和最低等阶元并不满足 LBB 稳定性条件。尽管 Taylor-Hood 元(例如 $P_k/P_{k-1}, k \geqslant 2$ 三角形元)满足 LBB 稳定性条件,但至少有 $6 \times d + 3$ 个局部自由度(当 $k = 2$ 时),计算量相当大。非协调的 Crouzeix-Raviart(CR)元是最佳的选择,它具有几个很好的性质:与分片常数元相结合满足 inf-sup 稳定化条件、单元局部守恒性、简单的数据结构。

然而,采用混合有限元方法逼近对流占优的流动问题,即使采用 CR 元,数值解仍会产生伪振荡。为了克服对流占优,最有效的方法是稳定化方法,可归于两类。一类是基于最小二乘残差的稳定化方法,例如 SUPG 方法、最小二乘方法、RFB 方法[1-3]、最小二乘 Petrov-Galerkin 方法[4]等,但是这些稳定性项中速度和压力的微分要么消失,要么不能很好地逼近, 给实际应用带来很大的困难并且计算量也大。另一类是基于非残差的稳定化方法,例如子格黏性方法、局部投影方法[5-6]等。这类方法与最小二乘残差方法相比,既保持了最小二乘残差方法的稳定性和逼近性又避免了速度和压力在稳定性项中的强耦合性,正因如此,该类有限元方法近年来备受关注。子格黏性模型最初由 Boussinesq 提出,随后 Taylor 和 Prandlt 改进了此方法。现在,这一

---

* **收稿日期:** 2010-04-27; **修订日期:** 2010-10-05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071184);四川省科技攻关课题资助项目(05GG006-006-2)
作者简介: 白艳红(1982—), 女, 山西清徐人,博士(E-mail: baiyanhong1982@126.com);
冯民富(1964—), 男, 教授(联系人. Tel:+86-28-85460879;E-mail:fmf@wtjs.cn).

模型被改进成各种数值方法[7-15],并且仅在子网格上添加人工黏性项.文献[7],在原有的有限元空间上,采用 bubble 函数作为子格空间进行增强.随后,Layton 将此方法推广到定常的对流扩散问题.在文献[10]中,Kaya-Layton 的工作是与另一种一致稳定化技巧相结合,即变分多极化方法,这一方法已被应用到瞬态的 Navier-Stokes 方程[11-12].在文献[13]中,Kaya-Rivière 对变分多级方法给出了算法及数值实验.然而上面的方法均采用协调有限元空间,据我们所知,仅有一篇论文采用非协调子格方法应用到对流扩散方程[15].Kaya 和 Rivière 对瞬态的 Navier-Stokes 方程提出了间断的子格黏性稳定化方法[12],但是这个稳定化格式含有很多边稳定化项,与非协调有限元方法相比增加了计算量.本文我们对 Oseen 方程提出一种新的局部投影稳定化有限元方法,并且速度和压力采用 inf-sup 稳定的非协调有限元空间逼近.局部投影稳定化项仅加在子网格上($H \geqslant h$),与 RFB 方法相比,本方法稳定项简单,并且可以克服对流占优.最后,通过数值实验证明了:数值结果和理论结果完全一致.

本文的具体结构大致如下:第 1 节,给出了局部投影稳定化格式;第 2、3 节,分别证明了这种新的格式是稳定的、收敛的;第 4 节,给出数值算例支持理论结果.

本文中,$a \lesssim b$ 表示 $a \leqslant Cb$,$a \gtrsim b$ 表示 $a \geqslant Cb$,C 不依赖于 $\alpha, h, \nu + \nu_{\mathrm{add}}$ 和 γ.

1　记号与稳定化格式

我们考虑一般的 Oseen 方程:求 $(\boldsymbol{u}, p)$ 属于 $\Omega \subset R^d, d \in \{2,3\}$,

$$\begin{cases} -\nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \alpha\,\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, & \text{在 } \Gamma = \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{1}$$

这里,$\boldsymbol{b} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^d$,并且在 Ω 中,$\nabla\cdot\boldsymbol{b} = 0$;$\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^d$.

定义有限元空间

$$\boldsymbol{V} := (H_0^1(\Omega))^d,\ Q := L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q\,\mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

上述问题的变分表达式为:求 $(\boldsymbol{u}, p) \in \boldsymbol{V} \times Q$ 满足

$$A((\boldsymbol{u},p),(\boldsymbol{v},q)) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}), \tag{2}$$

对于任意的 $(\boldsymbol{v}, q) \in \boldsymbol{V} \times Q$ 都成立,其中

$$A((\boldsymbol{u},p),(\boldsymbol{v},q)) := a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - (p,\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + (q,\nabla\cdot\boldsymbol{u}),$$

双线性项 a, b, c 如下:

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := \nu(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}), \\ b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := ((\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \\ c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := \alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \end{cases} \quad \forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^d. \tag{3}$$

由于

$$b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = ((\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}\cdot\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}),1) =$$

$$-\frac{1}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{b},\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = 0, \qquad \forall\,\boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^d,$$

这一性质保证了 Lax-Milgram 定理可以被用于散度为 0 的函数子空间.

接下来,根据变分多级方法的思想,定义有限元空间 $\boldsymbol{L} := \{\boldsymbol{l} \in (L^2(\Omega))^{d\times d}\}$.则式(1)对应的变分表达式为:求 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}, p \in Q, \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}$ 满足

$$
\begin{cases}
a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + (\nu_{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{u},\nabla \boldsymbol{v}) - \\
\qquad (\nu_{\mathrm{T}} \boldsymbol{g},\nabla \boldsymbol{v}) - (p,\nabla\cdot \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}), & \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \\
(q,\nabla \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}, & \forall q \in Q, \\
(\boldsymbol{g} - \nabla \boldsymbol{u},\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{0}, & \forall \boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}.
\end{cases} \tag{4}
$$

参数 $\nu_{\mathrm{T}} > 0$ 为子格黏性系数. 当空间是连续的时候本方法将退化到标准的 Oseen 方程,然而在离散的情况下,将导致不同的离散格式.

假设 T_h 和 T_H 是区域 Ω 的正则三角形剖分,h(reap$H$) 表示 T_h(respT_H) 的最大直径并且满足 $h \leqslant H$. $\boldsymbol{\varepsilon}_h$ 表示所有单元 $K \in T_h$ 的 $(d-1)$ 维的面的集合. 对于任意的 $E \in \boldsymbol{\varepsilon}_h$, $\boldsymbol{n}_E$ 表示给定的单元外法向量,当 $\boldsymbol{n}_E$ 在边界面上时,表示 Ω 的单元外法向量. $\boldsymbol{n}_K$ 表示 K 的单元外法向量. 对于分片连续函数 ψ,跳量$[\psi]_E$和均值 $\{\psi\}_E$在面 E 上的定义如下:

$$
[\psi]_E := \begin{cases} (\psi|_K)|_E - (\psi|_{\tilde{K}})|_E, & E \not\subseteq \Gamma, \\ (\psi|_K)|_E, & E \subset \Gamma; \end{cases}
$$

$$
\{\psi\}_E := \begin{cases} \dfrac{1}{2}((\psi|_K)|_E + (\psi|_{\tilde{K}})|_E), & E \not\subseteq \Gamma, \\ (\psi|_K)|_E, & E \subset \Gamma, \end{cases}
$$

K 和 $\tilde{K}$ 满足 $E = \partial K \cap \partial \tilde{K}$ 且 $\boldsymbol{n}_K = \boldsymbol{n}_E$.

跳量和均值在边界面上的定义可以延拓到 Ω 的外部,记为 0. 进一步我们可以得出

$$
[\varphi\psi]_E = [\varphi]_E\{\psi\}_E + \{\varphi\}_E[\psi]_E.
$$

逼近空间 $\boldsymbol{V}_h$ 和 Q_h 定义如下:

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{V}_h := \Big\{ \boldsymbol{v}_h \in (L^2(\Omega))^d : \boldsymbol{v}_h|_K \in (P_1(K))^d, \ \forall K \in T_h, \\
\qquad \displaystyle\int_E [\boldsymbol{v}_h]_E \mathrm{d}s = 0, \ \forall E \in \boldsymbol{\varepsilon}_h \Big\}, \\
Q_h := \{ q_h \in L_0^2(\Omega) : q_h|_K \in P_0(K), \ \forall K \in T_h \},
\end{cases} \tag{5}
$$

$P_n(K)$ 表示单元 K 上所有多项式的次数小于等于 n 的集合.

下面定义离散的双线性形式:

$$
\begin{cases}
a_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h) := \nu \displaystyle\sum_{K \in T_h} (\nabla_h \boldsymbol{u}_h, \nabla_h \boldsymbol{v}_h)_K, \\
b_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h) := \displaystyle\sum_{K \in T_h} ((\boldsymbol{b}\cdot\nabla_h)\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)_K - \sum_{E \in \boldsymbol{\varepsilon}_h} \langle \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_E \cdot [\boldsymbol{u}_h]_E, \{\boldsymbol{v}_h\}_E \rangle_E, \\
c_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h) := \alpha(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h).
\end{cases} \tag{6}
$$

离散的梯度算子∇,散度算子 $\nabla\cdot$ 表示如下:

$$
\begin{cases}
(\nabla_h \boldsymbol{v}_h)|_K := \nabla(\boldsymbol{v}_h|_K), \\
(\nabla_h \cdot \boldsymbol{v}_h)|_K := \nabla\cdot(\boldsymbol{v}_h|_K),
\end{cases} \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h, \ \forall K \in T_h. \tag{7}
$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_E$表示 $L^2(E)$ 上内积. 为了简化表示,我们用∇代替∇_h, 表达形式如式(6). 很显然

$$
a_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \ b_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \ c_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),
$$
$$
\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^d.
$$

按单元定义的双线性项 b_h,对于任意的 $\boldsymbol{v}_h \in (H^1(\Omega))^d$ 是等于0 的. 当函数 $\boldsymbol{v}_h$属于非协调有限元空间 $\boldsymbol{V}_h$ 时,我们仍可以得出同样的结论:

$$
b_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h) =
$$

$$\frac{1}{2}\sum_{K\in T_h}((\boldsymbol{b}\cdot\nabla_h)(\boldsymbol{v}_h\cdot\boldsymbol{v}_h),1)_K-\sum_{E\in\varepsilon_h}\langle\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_E\cdot[\boldsymbol{v}_h]_E,\{\boldsymbol{v}_h\}_E\rangle_E=$$
$$\sum_{E\in\varepsilon_h}\left(\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_E[\boldsymbol{v}_h\cdot\boldsymbol{v}_h]_E,1\rangle_E\right)-\sum_{E\in\varepsilon_h}\langle\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_E\cdot[\boldsymbol{v}_h]_E,\{\boldsymbol{v}_h\}_E\rangle_E=0,\tag{8}$$

类比可以得出 $b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=0$,对于任意的 $\boldsymbol{v}\in(H_0(\Omega))^d$ 均成立.

$\boldsymbol{L}_H\subset\boldsymbol{L}$ 定义如下:

$$\boldsymbol{L}_H^1:=\{\boldsymbol{l}_H\in(L^2(\Omega))^{d\times d}:\boldsymbol{l}_H|_K\in(P_1(K))^{d\times d},\ \forall K\in T_H\},$$
$$\boldsymbol{L}_H^2:=\{\boldsymbol{l}_H\in(L^2(\Omega))^{d\times d}:\boldsymbol{l}_H|_K\in(P_0(K))^{d\times d},\ \forall K\in T_H\}.$$

$P_{L_H}:\boldsymbol{L}\to\boldsymbol{L}_H$ 表示 L^2 正交投影于 $\boldsymbol{L}_H$. 因此我们可以得出

$$\begin{cases}(P_{L_H}\boldsymbol{l},\boldsymbol{g}_H)_K=(\boldsymbol{l},\boldsymbol{g}_H)_K, & \forall\boldsymbol{g}_H\in\boldsymbol{L}_H|_K,\ \forall\boldsymbol{l}\in\boldsymbol{L}|_K,\\ \|\boldsymbol{l}-P_{L_H}\boldsymbol{l}\|\leqslant CH|\boldsymbol{l}|_1, & \forall\boldsymbol{l}\in\boldsymbol{L}\cap(H^1(\Omega))^{d\times d}.\end{cases}\tag{9}$$

我们将在以后的证明中用到下面的结论:

$$\|I-P_{L_H}\|\leqslant 1.$$

由式(4)得稳定化格式为:求 $(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in(\boldsymbol{V}_h,Q_h)$ 满足

$$\begin{cases}a_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)+b_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)+c_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)+G_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)-\\ \qquad\sum\limits_{K\in T_h}(p_h,\nabla\cdot\boldsymbol{v}_h)_K=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_h),\\ \sum\limits_{K\in T_h}(q_h,\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h)_K=0, \qquad \forall\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h,\ \forall q_h\in Q_h,\end{cases}\tag{10}$$

G_h 表示如下:

$$G_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)=\sum_{K\in T_h}(\nu_{\mathrm{T}}(I-P_{L_H})\nabla\boldsymbol{u}_h,(I-P_{L_H})\nabla\boldsymbol{v}_h)_K,\qquad\forall\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h.$$

子格黏性系数 $\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{T}}>0$ 将在后面给出. 由于 P_{L_H} 为 L^2-投影,对于 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$ 和 $\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0>0$, 满足

$$\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{T}}\|(I-P_{L_H})\nabla\boldsymbol{v}\|_0^2=\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{T}}(\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0^2-\|P_{L_H}\nabla\boldsymbol{v}\|_0^2)=$$
$$\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{T}}\left(1-\frac{\|P_{L_H}\nabla\boldsymbol{v}\|_0^2}{\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0^2}\right)\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0^2=:\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{add}}(\boldsymbol{v})\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0^2.\tag{11}$$

此外,由于 $0\leqslant\|P_{L_H}\nabla\boldsymbol{v}\|_0\leqslant\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0$, 我们可以得出

$$0\leqslant\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{add}}(\boldsymbol{v})\leqslant\boldsymbol{\nu}_{\mathrm{T}}.\tag{12}$$

针对对流占优扩散方程我们采用非协调 SUPG 方法时,需要添加跳跃项来控制误差估计. 因此,对于更复杂的 Oseen 方程,也可以得出同样的结论.

$$j_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)=\sum_{E\in\varepsilon_h}\frac{\gamma}{h_E}\langle[\boldsymbol{u}_h]_E,[\boldsymbol{v}_h]_E\rangle_E,$$

γ 为正定常数,对于对流占优扩散方程,我们已证实 $\gamma/h_E\sim 1$, 但是对于 Oseen 方程,需要耦合压力,则应该选取不同的 γ. 注意到解 $(\boldsymbol{u},p)\in(H_0^1(\Omega))^d\times L_0^2(\Omega)$ 满足 $[\boldsymbol{u}]_E=0$,因此 $j_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$ 对于任意的 $\boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^d+\boldsymbol{V}_h$ 都成立.

离散格式做修正后变为:求 $(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in\boldsymbol{V}_h\times Q_h$ 满足:对于任意的 $(\boldsymbol{v}_h,q_h)\in\boldsymbol{V}_h\times Q_h$,

$$\begin{cases}a_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)+b_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)+c_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)+G_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)+j_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)-\\ \qquad\sum\limits_{K\in T_h}(p_h,\nabla\cdot\boldsymbol{v}_h)_K=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_h),\\ \sum\limits_{K\in T_h}(q_h,\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h)_K=0.\end{cases}\tag{13}$$

这里

$$\begin{aligned}&A_h((\boldsymbol{u}_h,p_h),(\boldsymbol{v}_h,q_h))=\\&\quad a_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)+b_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)+c_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)+G_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)+j_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)-\\&\quad\sum_{K\in T_h}(p_h,\nabla\cdot\boldsymbol{v}_h)+\sum_{K\in T_h}(q_h,\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h).\end{aligned}\tag{14}$$

局部投影稳定化格式的等价形式为：求 $(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in\boldsymbol{V}_h\times Q_h$ 满足：对于任意的$(\boldsymbol{v}_h,q_h)\in\boldsymbol{V}_h\times Q_h$，

$$A_h((\boldsymbol{u}_h,p_h),(\boldsymbol{v}_h,q_h))=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_h).\tag{15}$$

与 RFB 方法[2]相比,本方法的稳定性项简单(仅为一项),同时本方法可以看作是 RFB 方法的改进. 局部投影稳定化项为

$$G_h^1(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)=\sum_{K\in T_h}(\nu_{\mathrm{T}}(I-P_{L_H})\nabla\boldsymbol{u}_h,(I-P_{L_H})\nabla\boldsymbol{v}_h)_K,$$

而 RFB 方法的稳定化项为

$$G_h^2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)=\sum_{K\in T_h}\tau_K((\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_h,(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_h)_K-\sum_{K\in T_h}\tau_K(\boldsymbol{f},(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_h)_K,$$

当 $H\sim h$ 时,我们可得到 $G_h^1\sim G_h^2$(如果 G_h^2 舍弃了第2项), 则 G_h^1更具有一般性,从第4节中我们可以看到 G_h^2 中的第 2 项对数值解的影响很小.

2 局部投影方法的稳定性

双线性形式 $A_h(\cdot,\cdot)$ 在内积空间 $\boldsymbol{V}_h\times Q_h$ 中可以定义下面的范数：

$$|||(\boldsymbol{v},q)|||_h=((\nu+\nu_{\mathrm{add}})|\boldsymbol{v}|_{1,h}^2+\alpha\|\boldsymbol{v}\|_0^2+j_h(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})+M_q^{-1}\|q_h\|_0^2)^{1/2}.\tag{16}$$

接下来,我们将证明 $A_h(\cdot,\cdot)$ 在内积空间 $\boldsymbol{V}_h\times Q_h$ 的 inf-sup 稳定性条件.

定理 2.1(稳定性条件) 局部投影方法(15)满足下面的稳定化性质. 对于任意的 $(\boldsymbol{v}_h,q_h)\in\boldsymbol{V}_h\times Q_h$ 满足

$$C_{\mathrm{s}}|||(\boldsymbol{v}_h,q_h)|||_h\leqslant\sup_{(\boldsymbol{w}_h,r_h)\in\boldsymbol{V}_h\times Q_h,|||(\boldsymbol{w}_h,r_h)|||_h\neq0}\frac{A_h((\boldsymbol{v}_h,q_h),(\boldsymbol{w}_h,r_h))}{|||(\boldsymbol{w}_h,r_h)|||_h},\tag{17}$$

系数 M_q 为

$$M_q\sim(\nu+\nu_{\mathrm{add}}+\alpha+\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}+\gamma)\left(1+\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}\min\left(\frac{1}{\nu+\nu_{\mathrm{add}}},\frac{1}{\alpha}\right)\right).$$

常数 C_{s}不依赖于网格的长度,当 $\nu\to0$ 或 $\alpha\to0$ 时,C_{s} 并不会退化.

证明 对于任意的 $(\boldsymbol{v}_h,q_h)\in\boldsymbol{V}_h\times Q_h$,当$(\boldsymbol{w}_h,r_h)=(\boldsymbol{v}_h,q_h)$ 时, 我们可得出

$$A_h((\boldsymbol{v}_h,q_h),(\boldsymbol{v}_h,q_h))=(\nu+\nu_{\mathrm{add}})|\boldsymbol{v}_h|_{1,h}^2+\alpha\|\boldsymbol{v}_h\|_0^2+j_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h),\tag{18}$$

从式(8)可知 $b_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h)=0$.

现在,我们考虑 $(\boldsymbol{w}_h,r_h)$ 的另一种选取方式. 对于任意的 $q_h\in Q_h$ 离散的 LBB-稳定性条件保证存在函数 $\boldsymbol{v}_{q_h}\in\boldsymbol{V}_h$满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{q_h}=q_h$, $|\boldsymbol{v}_{q_h}|_{1,h}\lesssim\|q_h\|_0$. 因此,取$(\boldsymbol{w}_h,r_h)=(-\boldsymbol{v}_{q_h},0)$, 可得到

$$\begin{aligned}&A_h((\boldsymbol{v}_h,q_h),(-\boldsymbol{v}_{q_h},0))=\\&\quad\|q_h\|_0^2+a_h(\boldsymbol{v}_h,-\boldsymbol{v}_{q_h})+b_h(\boldsymbol{v}_h,-\boldsymbol{v}_{q_h})+c_h(\boldsymbol{v}_h,-\boldsymbol{v}_{q_h})+\\&\quad G_h(\boldsymbol{v}_h,-\boldsymbol{v}_{q_h})+j_h(\boldsymbol{v}_h,-\boldsymbol{v}_{q_h}).\end{aligned}\tag{19}$$

根据 $\boldsymbol{v}_{q_h}$的稳定性,可得

$$a_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_{q_h})+G_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_{q_h})=$$

$$(\nu+\nu_{\mathrm{add}})|\boldsymbol{v}_h|_{1,h}|\boldsymbol{v}_{q_h}|_{1,h}\lesssim(\nu+\nu_{\mathrm{add}})|\boldsymbol{v}_h|_{1,h}\|q_h\|_0. \tag{20}$$

对式(19)右边的第3项,我们采用分部积分公式,得

$$\begin{aligned}
b_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_{q_h})=&\sum_{E\in\varepsilon_h}\langle\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_E,[\boldsymbol{v}_h\cdot\boldsymbol{v}_{q_h}]_E\rangle_E-\sum_{K\in T_h}((\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_{q_h},\boldsymbol{v}_h)_K-\\
&\sum_{E\in\varepsilon_h}\langle\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_E[\boldsymbol{v}_h]_E,\{\boldsymbol{v}_{q_h}\}_E\rangle_E=\\
&\sum_{E\in\varepsilon_h}\langle\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_E[\boldsymbol{v}_{q_h}]_E,\{\boldsymbol{v}_h\}_E\rangle_E-\sum_{K\in T_h}((\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_{q_h},\boldsymbol{v}_h)_K\lesssim\\
&\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}|\boldsymbol{v}_{q_h}|_{1,h}\|\boldsymbol{v}_h\|_0\lesssim\\
&\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}\|q_h\|_0\|\boldsymbol{v}_h\|_0.
\end{aligned}\tag{21}$$

$$c_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_{q_h})\leqslant\alpha\|\boldsymbol{v}_h\|_0\|\boldsymbol{v}_{q_h}\|_0\lesssim\alpha\|\boldsymbol{v}_h\|_0\|q_h\|_0. \tag{22}$$

$$j_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_{q_h})\leqslant j_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h)^{1/2}j_h(\boldsymbol{v}_{q_h},\boldsymbol{v}_{q_h})^{1/2}\lesssim j_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h)^{1/2}\gamma^{1/2}\|q_h\|_0. \tag{23}$$

联立上述不等式,并且由 $\nu+\nu_{\mathrm{add}},\alpha,\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}$ 和 γ 的有界性知

$$\begin{aligned}
A_h((\boldsymbol{v}_h,q_h),(-\boldsymbol{v}_{q_h},0))\gtrsim&\\
&\|q_h\|_0^2-(\nu+\nu_{\mathrm{add}})|\boldsymbol{v}_h|_{1,h}\|q_h\|_0-\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}\|q_h\|_0\|\boldsymbol{v}_h\|_0-\\
&\alpha\|\boldsymbol{v}_h\|_0\|q_h\|_0-j_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h)^{1/2}\gamma^{1/2}\|q_h\|_0\gtrsim\\
&\|q_h\|_0^2-\frac{1}{2\epsilon}((\nu+\nu_{\mathrm{add}})|\boldsymbol{v}_h|_{1,h}^2+\alpha\|\boldsymbol{v}_h\|_0^2+j_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h)+\\
&\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}\|\boldsymbol{v}_h\|_0^2)-\frac{\epsilon}{2}(\nu+\nu_{\mathrm{add}}+\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}+\alpha+\gamma)\|q_h\|_0^2.
\end{aligned}\tag{24}$$

定义

$$\epsilon^{-1}:=\nu+\nu_{\mathrm{add}}+\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}+\alpha+\gamma$$

则

$$\begin{aligned}
A_h((\boldsymbol{v}_h,q_h),(-\boldsymbol{v}_{q_h},0))\gtrsim&\\
&\frac{1}{2}\|q_h\|_0^2-\frac{1}{2\epsilon}((\nu+\nu_{\mathrm{add}})|\boldsymbol{v}_h|_{1,h}^2+\alpha\|\boldsymbol{v}_h\|_0^2+\\
&j_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h)+\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}\|\boldsymbol{v}_h\|_0^2)\gtrsim\\
&\frac{1}{2}\|q_h\|_0^2-\frac{1}{2\epsilon}\left(1+\frac{\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}}{\alpha}\right)|||(\boldsymbol{v}_h,0)|||_h^2.
\end{aligned}\tag{25}$$

接下来,我们采用另一种思路估计对流项

$$\begin{aligned}
b_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_{q_h})=&\\
&\sum_{K\in T_h}((\boldsymbol{b}\cdot\nabla_h)\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_{q_h})_K-\sum_{E\in\varepsilon_h}\langle\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_E\cdot[\boldsymbol{v}_h]_E,\{\boldsymbol{v}_{q_h}\}_E\rangle_E\lesssim\\
&\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}|\boldsymbol{v}_h|_{1,h}\|\boldsymbol{v}_{q_h}\|_0\lesssim\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}|\boldsymbol{v}_h|_{1,h}\|q_h\|_0.
\end{aligned}\tag{26}$$

我们可得出类似的估计

$$\begin{aligned}
A_h((\boldsymbol{v}_h,q_h),(-\boldsymbol{v}_{q_h},0))\gtrsim&\\
&\frac{1}{2}\|q_h\|_0^2-\frac{1}{2\epsilon}((\nu+\nu_{\mathrm{add}})|\boldsymbol{v}_h|_{1,h}^2+\alpha\|\boldsymbol{v}_h\|_0^2+\\
&j_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h)+\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}|\boldsymbol{v}_h|_{1,h}^2)\gtrsim\\
&\frac{1}{2}\|q_h\|_0^2-\frac{1}{2\epsilon}\left(1+\frac{\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}}{\nu+\nu_{\mathrm{add}}}\right)|||(\boldsymbol{v}_h,0)|||_h^2.
\end{aligned}\tag{27}$$

设

$$M_q := \epsilon^{-1}\left(1 + \|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}\min\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\nu+\nu_{\mathrm{add}}}\right)\right),$$

可得

$$A_h((\boldsymbol{v}_h,q_h),(-M_q^{-1}\boldsymbol{v}_{q_h},0)) \gtrsim \frac{1}{2M_q}\|q_h\|_0^2 - \frac{1}{2}|||(\boldsymbol{v}_h,0)|||_h^2. \tag{28}$$

取

$$(\boldsymbol{w}_h,r_h) = (\boldsymbol{v}_h - M_q^{-1}\boldsymbol{v}_{q_h},q_h),$$

则有

$$A_h((\boldsymbol{v}_h,q_h),(\boldsymbol{w}_h,r_h)) \gtrsim \frac{1}{2}|||(\boldsymbol{v}_h,q_h)|||_h^2. \tag{29}$$

为了得到定理的结果,我们需要证明下面的结论:

$$|||(\boldsymbol{w}_h,r_h)|||_h \lesssim |||(\boldsymbol{v}_h,q_h)|||_h.$$

采用三角不等式,得

$$|||(\boldsymbol{w}_h,r_h)|||_h \leqslant |||(\boldsymbol{v}_h,q_h)|||_h + |||(M_q^{-1}\boldsymbol{v}_{q_h},0)|||_h.$$

将上式平方并且应用 Young 不等式,得

$$|||(\boldsymbol{w}_h,r_h)|||_h^2 \leqslant 2(|||(\boldsymbol{v}_h,q_h)|||_h^2 + |||(M_q^{-1}\boldsymbol{v}_{q_h},0)|||_h^2).$$

上式右边的第 2 项可估计为

$$\begin{aligned}
&|||(M_q^{-1}\boldsymbol{v}_{q_h},0)|||_h^2 = \\
&\quad \frac{1}{M_q^2}[(\nu+\nu_{\mathrm{add}})|\boldsymbol{v}_{q_h}|_{1,h}^2 + \alpha\|\boldsymbol{v}_{q_h}\|_0^2 + j_h(\boldsymbol{v}_{q_h},\boldsymbol{v}_{q_h})] \lesssim \\
&\quad \frac{1}{M_q^2}(\nu+\nu_{\mathrm{add}}+\alpha+\gamma)\|q_h\|_0^2 \lesssim \frac{1}{M_q}\|q_h\|_0^2 \lesssim |||(\boldsymbol{v}_h,q_h)|||_h^2.
\end{aligned} \tag{30}$$

因此

$$|||(\boldsymbol{w}_h,r_h)|||_h \lesssim |||(\boldsymbol{v}_h,q_h)|||_h. \tag{31}$$

将式(29)和(31)结合,定理则证. □

3 局部投影方法的收敛性

引理 3.1 $(\boldsymbol{u},p) \in ((H_0^1(\Omega))^d \cap (H^2(\Omega))^d) \times (L_0^2(\Omega) \cap H^1(\Omega))$ 为式(2)的解,$(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{V}_h \times Q_h$ 为式(15)的离散解. 则一致误差估计为

$$\begin{aligned}
&R((\boldsymbol{u},p),(\boldsymbol{v}_h,q_h)) := A_h((\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,p-p_h),(\boldsymbol{v}_h,q_h)) = \\
&\quad \sum_{E\in\varepsilon_h}\left\{\left\langle \nu\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}_E},[\boldsymbol{v}_h]_E\right\rangle_E - \langle p,[\boldsymbol{v}_h]_E\cdot\boldsymbol{n}_E\rangle_E\right\} + G_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h).
\end{aligned} \tag{32}$$

进一步,可得

$$\begin{aligned}
&|R((\boldsymbol{u},p),(\boldsymbol{v}_h,q_h))| \lesssim \\
&\quad [(\nu^{1/2}h + \nu_{\mathrm{add}}^{1/2}H)|\boldsymbol{u}|_2 + \gamma^{-1/2}h|p|_1]\,|||(\boldsymbol{v}_h,q_h)|||_h.
\end{aligned} \tag{33}$$

证明 将 $(\boldsymbol{u},p)$ 代入式(15),并且采用分部积分公式得式(32). 接下来,我们估计式(32)右端的每一个项.

$$\left|\sum_{E\in\varepsilon_h}\left\langle \nu\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}_E},[\boldsymbol{v}_h]_E\right\rangle_E\right| \lesssim \nu h|\boldsymbol{u}|_2|\boldsymbol{v}_h|_{1,h} \lesssim \nu^{1/2}h|\boldsymbol{u}|_2\,|||(\boldsymbol{v}_h,q_h)|||_h. \tag{34}$$

$$\left|\sum_{E\in\varepsilon_h}\langle p,[\boldsymbol{v}_h]_E\cdot\boldsymbol{n}_E\rangle_E\right| \lesssim \sum_{E\in\varepsilon_h}\frac{\gamma^{1/2}}{h_E^{1/2}}\|[\boldsymbol{v}_h]_E\|_0\frac{h_E}{\gamma^{1/2}}\|p\|_{0,h,w(E)} \lesssim$$

$$\gamma^{-1/2}h|p|_1\sqrt{j_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h)}\lesssim\gamma^{-1/2}h|p|_1|||(\boldsymbol{v}_h,q_h)|||_h.\tag{35}$$

最后根据式(9),得

$$G_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h)\lesssim\nu_{\mathrm{T}}H|\boldsymbol{u}|_2|\boldsymbol{v}_h|_{1,h}\lesssim\nu_{\mathrm{T}}^{1/2}H|\boldsymbol{u}|_2|||(\boldsymbol{v}_h,q_h)|||_h.\tag{36}$$

将上述估计结合,则得到引理的结论. □

注 3.1 $(\boldsymbol{u},p)\in((H_0^1(\Omega))^d\cap(H^2(\Omega))^d)\times(L_0^2(\Omega)\cap H^1(\Omega))$ 为式(2)的解,$(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in\boldsymbol{V}_h\times Q_h$ 为式(15)的离散解. 当 $\nu_{\mathrm{add}}\sim1,H\sim h,\gamma\sim1,\boldsymbol{L}_H=\boldsymbol{L}_H^1$ 时,可知

$$|R((\boldsymbol{u},p),(\boldsymbol{v}_h,q_h))|\lesssim[(\nu^{1/2}+\nu_{\mathrm{add}}^{1/2})h|\boldsymbol{u}|_2+\gamma^{-1/2}h|p|_1]|||(\boldsymbol{v}_h,q_h)|||_h;\tag{37}$$

当 $\nu_{\mathrm{add}}=\beta h,\ \beta\sim1,\ H\sim\sqrt{h},\ \gamma\sim1,\ \boldsymbol{L}_H=\boldsymbol{L}_H^2$ 时,得

$$|R((\boldsymbol{u},p),(\boldsymbol{v}_h,q_h))|\lesssim[(\nu^{1/2}+\beta^{1/2})h|\boldsymbol{u}|_2+\gamma^{-1/2}h|p|_1]|||(\boldsymbol{v}_h,q_h)|||_h.\tag{38}$$

接下来,我们将分析插值误差. 首先,我们知道散度为 0 的函数在每个单元 K 上也为 0. χ_K 表示单元 K 上的特征函数,$|K|$ 和 $|\Omega|$ 分别表示 K 和 Ω 的体积. 因为 $\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h$ 是散度为 0 的函数,则 $\nabla_h\cdot\boldsymbol{v}_h$ 是分片常数,因此,我们取 $q_h=\chi_K-|K|/|\Omega|\in Q_h$,

$$\begin{aligned}0&=(q_h,\nabla_h\cdot\boldsymbol{v}_h)=(1,\nabla_h\cdot\boldsymbol{v}_h)-\frac{|K|}{|\Omega|}(1,\nabla_h\cdot\boldsymbol{v}_h)_\Omega=\\&|K|(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_h|_K)-\frac{|K|}{|\Omega|}\sum_{K\in T_h}\langle1,\boldsymbol{v}_h\cdot\boldsymbol{n}_K\rangle_{\partial K}=\\&|K|(\nabla\cdot(\boldsymbol{v}_h|_K)).\end{aligned}\tag{39}$$

引理 3.2 Canon 插值 $I_h:(H_0^1(\Omega))^d\to\boldsymbol{V}_h$,

$$\frac{1}{|E|}\int_E(I_h\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v})\mathrm{d}s=0,\qquad\forall E\in\varepsilon_h$$

满足

$$\begin{cases}(q_h,\nabla_h\cdot I_h\boldsymbol{v})=(q_h,\nabla_h\cdot\boldsymbol{v}),&\forall q_h\in Q_h,\ \boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^d,\\\|\boldsymbol{v}-I_h\boldsymbol{v}\|_{0,K}+h_K|\boldsymbol{v}-I_h\boldsymbol{v}|_{1,K}\lesssim h_K^2|v|_{2,K},&\forall\boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^d\cap(H^2(\Omega))^d.\end{cases}\tag{40}$$

引理 3.3 $(\boldsymbol{u},p)\in((H_0^1(\Omega))^d\cap(H^2(\Omega))^d)\times(L_0^2(\Omega)\cap H^1(\Omega))$ 为式(2)的解,$(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in\boldsymbol{V}_h\times Q_h$ 是式(15)的离散解. 则 $I_h:(H_0^1(\Omega))^d\to\boldsymbol{V}_h$ 为 Canon 插值,$J_h:L_0^2(\Omega)\to Q_h$ 为 L^2 投影, 则存在常数 C 不依赖于 $\nu,\nu_T,\alpha,\gamma,\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}$, 并且满足

$$\begin{aligned}&|A_h((\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u},p-J_hp),(\boldsymbol{v}_h,q_h))|\leqslant\\&C\Bigg[\Bigg((\nu+\nu_{\mathrm{add}})^{1/2}h+\frac{\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}}{\gamma^{1/2}}h^2+\frac{\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}}{(\nu+\nu_{\mathrm{T}})^{1/2}}h^2+\\&\gamma^{1/2}h\Bigg)|\boldsymbol{u}|_2\Bigg]|||(\boldsymbol{v}_h,q_h)|||_h\end{aligned}\tag{41}$$

对任意的 $(\boldsymbol{v}_h,q_h)\in\boldsymbol{V}_h\times Q_h$ 都成立.

证明 根据 $|||\cdot|||_h$ 的定义,我们分别估计 $A_h(\cdot,\cdot)$ 中的每一项.

$$\begin{aligned}&A_h((\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u},p-J_hp),(\boldsymbol{v}_h,q_h))=\\&a_h(\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h)+b_h(\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h)+c_h(\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h)+\\&G_h(\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h)+j_h(\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h)-\sum_{K\in T_h}(p-J_hp,\nabla\cdot\boldsymbol{v}_h)+\\&\sum_{K\in T_h}(q_h,\nabla\cdot(\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u})).\end{aligned}\tag{42}$$

采用标准的估计有

$$
\begin{aligned}
&|a_h(\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h)+G_h(\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h)|\lesssim \\
&\quad(\nu+\nu_{\mathrm{add}})h|\boldsymbol{u}|_2|\boldsymbol{v}_h|_{1,h}\lesssim(\nu+\nu_{\mathrm{add}})^{1/2}h|\boldsymbol{u}|_2 \,|||\,(\boldsymbol{v}_h,q_h)\,|||_h. \qquad (43)
\end{aligned}
$$

利用分部积分公式,得

$$
\begin{aligned}
&b_h(\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h)= \\
&\quad\sum_{E\in\mathcal{E}_h}\langle\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_E[\boldsymbol{v}_h]_E,\{\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u}\}_E\rangle_E-\sum_{K\in T_h}(\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u},(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_h)_K. \qquad (44)
\end{aligned}
$$

式(44)右端的第1项估计如下:

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{E\in\varepsilon_h}\langle\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_E[\boldsymbol{v}_h]_E,\{\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u}\}_E\rangle_E\right|\lesssim \\
&\quad\sum_{E\in\varepsilon_h}\frac{\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}}{\gamma^{1/2}}h_E^{3/2}|\boldsymbol{u}|_{2,w(E)}\gamma^{1/2}\|[\boldsymbol{v}_h]_E\|_{0,E}\lesssim \\
&\quad\frac{\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}}{\gamma^{1/2}}h^2|\boldsymbol{u}|_2\,|||\,(\boldsymbol{v}_h,q_h)\,|||_h, \qquad (45)
\end{aligned}
$$

第2项为

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{K\in T_h}(\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u},(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_h)_K\right|\lesssim \\
&\quad\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}h^2|\boldsymbol{u}|_2|\boldsymbol{v}_h|_{1,h}\lesssim\frac{\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}}{(\nu+\nu_{\mathrm{T}})^{1/2}}h^2|\boldsymbol{u}|_2\,|||\,(\boldsymbol{v}_h,q_h)\,|||_h. \qquad (46)
\end{aligned}
$$

接下来

$$
\begin{aligned}
&|j_h(\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h)|\lesssim\sum_{E\in\varepsilon_h}\gamma^{1/2}h_E^{1/2}|\boldsymbol{u}|_2\gamma^{1/2}\|[\boldsymbol{v}_h]_E\|_{0,E}\lesssim \\
&\quad\gamma^{1/2}h|\boldsymbol{u}|_2\,|||\,(\boldsymbol{v}_h,q_h)\,|||_h. \qquad (47)
\end{aligned}
$$

L^2 投影 J_h 的正交性及任意的散度为0的函数在每个单元上也是散度为0的,因此最后两项都等于0,即

$$
\begin{cases}(p-J_hp,\nabla_h\cdot\boldsymbol{v}_h)=0, & \forall\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h,\\ (q_h,\nabla_h\cdot(\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u}))=0, & \forall q_h\in Q_h.\end{cases} \qquad (48)
$$

联立上面的估计及引理3.1,我们可得到本引理的结论. □

定理3.1(先验误差估计) 假设 $(\boldsymbol{u},p)$ 是式(2)的解,$(\boldsymbol{u}_h,p_h)$ 是式(15)的离散解,我们有

$$
\begin{aligned}
&|||\,(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,p-p_h)\,|||_h\lesssim \\
&\quad(\nu^{1/2}h+\nu_{\mathrm{add}}^{1/2}H+(\nu+\nu_{\mathrm{add}})^{1/2}h+\gamma^{1/2}h)|\boldsymbol{u}|_2+\gamma^{-1/2}h|p|_1. \qquad (49)
\end{aligned}
$$

证明 利用定理2.1,有

$$
\begin{aligned}
&|||\,(\boldsymbol{u}_h-I_h\boldsymbol{u},p_h-J_hp)\,|||_h\lesssim \\
&\quad C_s^{-1}\sup_{(\boldsymbol{w}_h,r_h)\in\boldsymbol{V}_h\times Q_h,|||(\boldsymbol{w}_h,r_h)|||_h\neq0}\frac{A_h((\boldsymbol{u}_h-I_h\boldsymbol{u},p_h-J_hp),(\boldsymbol{w}_h,r_h))}{|||\,(\boldsymbol{w}_h,r_h)\,|||_h}\lesssim \\
&\quad C_s^{-1}\sup_{(\boldsymbol{w}_h,r_h)\in\boldsymbol{V}_h\times Q_h,|||(\boldsymbol{w}_h,r_h)|||_h\neq0}\frac{A_h((\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u},p_h-p),(\boldsymbol{w}_h,r_h))}{|||\,(\boldsymbol{w}_h,r_h)\,|||_h}+ \\
&\quad C_s^{-1}\sup_{(\boldsymbol{w}_h,r_h)\in\boldsymbol{V}_h\times Q_h,|||(\boldsymbol{w}_h,r_h)|||_h\neq0}\frac{A_h((\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u},p-J_hp),(\boldsymbol{w}_h,r_h))}{|||\,(\boldsymbol{w}_h,r_h)\,|||_h}. \qquad (50)
\end{aligned}
$$

采用三角不等式,第1项可以由引理3.1控制,第2项可以由引理3.3控制,

$$
\begin{aligned}
&|||(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h, p-p_h)|||_h \lesssim \\
&\quad |||(\boldsymbol{u}-I_h\boldsymbol{u}, p-J_h p)|||_h + |||(\boldsymbol{u}_h-I_h\boldsymbol{u}, p_h-J_h p)|||_h \lesssim \\
&\quad \Big(\nu^{1/2}h+\nu_{\mathrm{add}}^{1/2}H+(\nu+\nu_{\mathrm{add}})^{1/2}h+\frac{\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}}{\gamma^{1/2}}h^2+ \\
&\quad \frac{\|\boldsymbol{b}\|_{(L^\infty(\Omega))^d}}{(\nu+\nu_{\mathrm{T}})^{1/2}}h^2+\gamma^{1/2}h\Big)|\boldsymbol{u}|_2+\gamma^{-1/2}h|p|_1 \lesssim \\
&\quad (\nu^{1/2}h+\nu_{\mathrm{add}}^{1/2}H+(\nu+\nu_{\mathrm{add}})^{1/2}h+\gamma^{1/2}h)|\boldsymbol{u}|_2+\gamma^{-1/2}h|p|_1. \qquad (51)
\end{aligned}
$$

由此,得到本定理的结论. □

注 3.2　设 $(\boldsymbol{u},p)$ 是式(2)的解,$(\boldsymbol{u}_h,p_h)$ 是式(15)的离散解. 当 $\nu_{\mathrm{add}}\sim 1$, $H\sim h$, $\gamma\sim 1$, $\boldsymbol{L}_H=\boldsymbol{L}_H^1$ 时,有

$$
\begin{aligned}
&|||(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h, p-p_h)|||_h \lesssim \\
&\quad (\nu^{1/2}h+\nu_{\mathrm{add}}^{1/2}h+(\nu+\nu_{\mathrm{add}})^{1/2}h+\gamma^{1/2}h)|\boldsymbol{u}|_2+\gamma^{-1/2}h|p|_1; \qquad (52)
\end{aligned}
$$

当 $\nu_{\mathrm{add}}=\beta h$, $\beta\sim 1$, $H\sim\sqrt{h}$, $\gamma\sim 1$, $\boldsymbol{L}_H=\boldsymbol{L}_H^2$ 时,有

$$
\begin{aligned}
&|||(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h, p-p_h)|||_h \lesssim \\
&\quad (\nu^{1/2}h+\beta^{1/2}h+(\nu+\nu_{\mathrm{add}})^{1/2}h+\gamma^{1/2}h)|\boldsymbol{u}|_2+\gamma^{-1/2}h|p|_1. \qquad (53)
\end{aligned}
$$

4　数 值 算 例

本节,我们通过数值算例说明理论结果. 我们考虑一般的 Oseen 方程,连续解 $\boldsymbol{u}=(u,v)$ 定义在 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$ 上. 算例如下:

$$
\begin{cases}
u=2x^2(1-x)^2y(1-y)(1-2y),\\
v=-2y^2(1-y)^2x(1-x)(1-2x),\\
p=x^3+y^3-0.5,
\end{cases} \qquad (54)
$$

对流域

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{b}=(b_1,b_2),\\
b_1=\sin(x)\sin(y),\\
b_2=\cos(x)\cos(y),
\end{cases} \qquad (55)
$$

参数 $\nu=10^{-5}$, $\sigma=100$. $\sigma=100$ 是因为非定常 Navier-Stokes 方程的时间步长取为 0.01. 我们采用非协调的 P_1^{nc}/P_0 元逼近速度和压力,

$$
\boldsymbol{L}_H^1:=\left\{\boldsymbol{l}_H\in(L^2(\Omega))^{d\times d}:\boldsymbol{l}_H|_K\in(P_1(K))^{d\times d},\ \forall K\in T_H,\ \int_E[\boldsymbol{l}_H]_E\,\mathrm{d}s=0,\ \forall E\in\varepsilon_H\right\};
$$

$$
\boldsymbol{L}_H^2:=\{\boldsymbol{l}_H\in(L^2(\Omega))^{d\times d}:\boldsymbol{l}_H|_K\in(P_0(K))^{d\times d},\forall K\in T_H\}.
$$

我们将本文的方法与 RFB[2] 方法、标准的有限元方法进行了对比,参见表 1 ~ 表 4.

表 1　局部投影方法 ($H=h$, $\gamma=5$, $\boldsymbol{L}_H^1$)

h	L^2	H^1
1/4	0.002 501 880	0.041 478 3
1/8	0.000 670 581	0.021 892 2
1/16	0.000 167 525	0.010 785 2
1/32	4.407 99E-005	0.005 329 2

表 2　局部投影方法 ($H=h/2$, $\gamma=5$, $\boldsymbol{L}_H^2$)

h	L^2	H^1
1/4	0.002 611 320	0.042 032 9
1/8	0.000 687 103	0.022 367 4
1/16	0.000 174 352	0.011 576 3
1/32	4.415 47E-005	0.005 465 2

表 3 RFB 方法（$\gamma = 5$，$\tau_K = 0.09h^2$）

h	L^2	H^1
1/4	0.002 470 870	0.041 288 30
1/8	0.000 669 238	0.021 879 60
1/16	0.000 166 802	0.010 790 80
1/32	4.382 87E-005	0.005 334 65

表 4 标准的有限元方法

h	L^2	H^1
1/4	0.009 665 5	0.163 895
1/8	0.010 598 8	0.317 703
1/16	0.012 145 4	0.624 745
1/32	0.016 415 9	1.237 700

通过数值算例，我们得出局部投影稳定化方法与理论结果吻合. 更重要的是：与 RFB 方法相比，我们的稳定性项简单，可以达到同样的数值结果.

参考文献：

[1] BAI Yan-hong, FENG Min-fu, KONG Hua. Analysis of a nonconforming RFB stabilized method for the nonstationary convection-dominated diffusion equation[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2009, **31**(4): 363-378.

[2] Franca L P, John V, Matthies G, Tobiska L. An inf-sup stable and residual-free bubble element for the Oseen equations[R]. UCDHSC / CCM Report, No 236, University of Colorado at Denver and Health Sciences Center, USA, 2007.

[3] GE Zhi-hao, FENG Min-fu, HE Yin-nian. A stabilized nonconforming finite element method based on multiscale enrichment for the stationary Navier-Stokes equations[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, **202**(2): 700-707.

[4] ZHOU Tian-xiao, FENG Min-fu. A least squares Petrov-Galerkin finite element method for the stationary Navier-Stokes equations[J]. *Mathematics of Computation*, 1993, **60**(202): 531-543.

[5] Lube G, Rapin G, Löwe G. Local projection stabilization for incompressible flows: equal-order vs inf-sup stable interpolation[J]. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 2008, **32**: 106-122.

[6] 骆艳，冯民富. 可压缩 Navier-Stokes 方程的压力梯度局部投影间断有限元法[J]. 应用数学和力学，2008，**29**(2): 157-168.

[7] Guermod J L. Stabilization of Galerkin approximations of transport equations by subgrid modeling[J]. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 1999, **33**(6): 1293-1316.

[8] Guermond J L, Marra A, Quartapelle L. Subgrid stabilized projection method for 2D unsteady flows at high Reynolds numbers[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, **195**(44/47): 5857-5876.

[9] Hughes T J R, Mazzei L, Jansen K E. Large eddy simulation and the variational multiscale method[J]. *Comput Visual Sci*, 2000, **3**(1/2): 47-59.

[10] Kaya S, Layton W. Subgrid-scale eddy viscosity methods are variational multiscale methods [R]. Technical report, TR-MATH 03-05. Pittsburgh, PA: University of Pittsburgh, 2003.

[11] John V, Kaya S. Finite element error analysis of a variational multiscale method for the Navier- Stokes equations[J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2008, **28**(1): 43-61.

[12] Kaya S, Riviére B. A discontinuous subgrid eddy viscosity method for the time-dependent Navier-Stokes equations[J]. *SIAM J Numer Anal*, 2005, **43**(4): 1572-1595.

[13] Kaya S, Riviére B. A two-grid stabilization method for solving the steady-state Navier-Stokes equations[J]. *Numerical Methods for Partial Differential*, 2006, **22**(3): 728-743.

[14] Kaya S, Layton W, Riviére B. Subgrid stabilized defect correction methods for the Navier-Stokes equations[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2006, **44**(4): 1639-1654.

[15] Linda El Alaoui, Alexandre Ern. Nonconforming finite element methods with subgrid viscosity applied to advection-diffusive-reaction equations[J]. *Numerical Methods for Partical Differential Equations*, 2006, **22**(5):1106-1126.

A New Nonconforming Local Projection Stabilization for Generalized Oseen Equations

BAI Yan-hong[1], FENG Min-fu[2], WANG Chuan-long[1]

(1. *Department of Mathematics*, *Taiyuan Teachers College*, *Taiyuan* 030012, *P. R. China*;
2. *Department of Mathematics*, *Sichuan University*, *Chengdu* 610064, *P. R. China*)

Abstract: A new method of nonconforming local projection stabilization for the generalized Oseen equations was proposed by a nonconforming inf-sup stable element pair for approximating the velocity and pressure. The method has several attractive feature. It adds an local projection term only on the sub-scale ($H \geqslant h$). The stabilized term is simple compared with the residual-free bubble element method can handle the influence of strong convection. The numerical illustrations agree with the theoretical expectation very well.

Key words: generalized Oseen equations; local projection stabilization; Crouzeix-Raviart element