应用数学和力学,第 31 卷 第 11 期
2010 年 11 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 31, No. 11, Nov. 15, 2010

文章编号:1000-0887(2010)11-1372-10

R^n上 Plate 方程全局吸引子的正则性和有限维性*

肖海滨[1,2]

(1. 宁波大学 数学系, 浙江 宁波 315211;
2. 南京大学 数学系, 南京 210093)

(李继彬推荐)

摘要: 研究了无界区域 R^n 上 Plate 方程全局吸引子的正则性和有限分形维性. 该方程的全局吸引子在相空间 $H^2(R^n)\times L^2(R^n)$ 的存在性已在先期文章建立,现在进一步证明该全局吸引子具有更好的正则性,即它是 $H^4(R^n)\times H^2(R^n)$ 的有界集并具有有限分形维数.

关 键 词: 全局吸引子; Plate 方程; 正则性; 有限维性; 无界区域

中图分类号: O175.15;O192 **文献标志码**: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.11.010

引 言

在本文,我们应用文献[1]的方法,研究无界区域 R^n 上 Plate 方程初值问题

$$\varepsilon u_{tt}+\Delta^2 u+u_t+\beta(x)u=f(x,u),\qquad x\in R^n,\ t\geqslant 0, \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\qquad x\in R^n, \tag{2}$$

$$u_t(x,0)=u_1(x),\qquad x\in R^n \tag{3}$$

全局吸引子的正则性和有限分形维性,其中 $\varepsilon>0$ 是一个正常数,$\beta:R^n\mapsto\mathbf{R}$ 和 $f:R^n\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是可测函数,具体满足下列假设. 为方便起见,除了对特定区域的强调,我们分别简记函数空间 $L^2(R^n)$,$W^{s,2}(R^n)$ 为 L^2,H^s,其中 $W^{s,2}(R^n)$ 是标准的 Sobolev 空间. $\|\cdot\|$,$(\cdot,\cdot)$ 分别表示 $L^2(R^n)$ 的范数和内积. $|u|$表示 u 的模或绝对值.

假设

(H1) $\beta:R^n\mapsto\mathbf{R}$ 是满足下列性质的可测函数:

1) 对任意的 γ,存在 C_γ 和常数 ν 使得对 $u\in H^2(R^n)$, 成立

$$\int_{R^n}|\beta(x)||u(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\gamma\|u\|_{H^2}^2+C_\gamma\|u\|^2, \tag{4}$$

---

* **收稿日期**: 2009-12-01; **修订日期**: 2010-09-25

基金项目: 浙江省教育厅科研基金资助项目(Y200804289);宁波市自然科学基金资助项目(2010A610102)

作者简介: 肖海滨(1973—),男,江西南康人,副教授(Tel:+86-574-87600725;E-mail:xiaohaibin@nbu.edu.cn).

$$\int_{R^n} |\beta(x)|^2 |u(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant \nu \|u\|^2; \tag{5}$$

2）存在 $\lambda_0 > 0$ 使得 $u \in H^2(R^n)$，成立

$$\|\Delta u\|^2 + \int_{R^n} \beta(x) |u(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant \lambda_0 \|u\|^2. \tag{6}$$

（H2）$f: R^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, (x,u) \mapsto f(x,u)$ 满足 C^1-Carathéodory 条件，即对任意 $u \in \mathbf{R}$，映射 $x \mapsto f(x,u)$ 是 Lebesgue 可测的，而对几乎处处 $x \in R^n$ 映射 $u \mapsto f(x,u)$ 是连续可微的. 定义 f 的原函数为 $F(x,u) := \int_0^u f(x,s)\mathrm{d}s$. 并且 f 还满足下列条件：

1）$f(\cdot,0) \in L^2(R^n)$；（7）

2）增长条件，即几乎处处 $x \in R^n$ 和任意的 $u \in \mathbf{R}$，存在正常数 C_0, p 使得

$$|\partial_u f(x,u)| \leqslant C_0(1 + |u|^p), \qquad p > 0,\ p(n-4) < 4; \tag{8}$$

3）存在可测函数 $c: R^n \mapsto \mathbf{R}, c(\cdot) \in L^1(R^n)$ 使得

$$f(x,u)u \leqslant c(x), \qquad \text{a.e. } x \in R^n,\ u \in \mathbf{R}, \tag{9}$$

$$F(x,u) \leqslant c(x), \qquad \text{a.e. } x \in R^n,\ u \in \mathbf{R}. \tag{10}$$

有一系列的充分条件来保证条件（4）～（6）成立，详细情况请参见文献[2]. 在文献[2]中，我们已经研究了 Cauchy 问题（1）～（3）在相空间 $H^2(R^n) \times L^2(R^n)$ 中的动力学性质，具体地说，我们建立了下列结果.

定理 1　在假设（H1）、（H2）下，任给 $w_0 = (u_0, u_1) \in H^2 \times L^2$ 和 $T > 0$，Cauchy 问题（1）～（3）可转化为 Cauchy 问题

$$w_t + \mathrm{A}w = \tilde{f}(w(t)), \qquad t \geqslant 0, \tag{11}$$

$$w(0) = w_0, \tag{12}$$

其中，$w(t) = (u(t), u_t(t))$，$\tilde{f}(w(t)) = (0, (1/\varepsilon) f(\cdot, u(t)))$，$w_0 = (u_0, u_1)$，且在 $H^2 \times L^2$ 内存在唯一的温和解 $w(t) = (u(t), u_t(t))$ 满足

$$w(t) = \mathrm{e}^{-t\mathrm{A}} w_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)\mathrm{A}} \tilde{f}(w(s))\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{13}$$

其中，$\tilde{f}(w(t)) = (0, (1/\varepsilon) f(\cdot, u(t)))$，A 是线性稠定的闭算子，定义如下：

$$\mathrm{A}(u,v) = \left(-v, \frac{1}{\varepsilon}\Delta^2 u + \frac{1}{\varepsilon} v + \frac{1}{\varepsilon}\beta u\right),$$

$$D(\mathrm{A}) = \{(u,v) \in H^2 \times L^2 \mid v \in H^2, \Delta^2 u + \beta u \in L^2\} = H^4 \times H^2.$$

并且 Cauchy 问题（1）～（3）在 $H^2 \times L^2$ 存在全局的吸引子 $\mathscr{A}$. 它可表征为所有平衡点集 $\mathscr{N}_0$ 的不稳定流形 $\mathscr{M}^u(\mathscr{N}_0)$ 并由满足下列条件的所有完全轨道 $\gamma = \{w(t): t \in \mathbf{R}\}$ 组成：

$$\lim_{t \to -\infty} \mathrm{dist}(w(t), \mathscr{N}_0) = 0,\ \lim_{t \to +\infty} \mathrm{dist}(w(t), \mathscr{N}_0) = 0. \tag{14}$$

众所周知，吸引子的正则形和有限维性在许多应用上起了很重要的作用，国内外有大量的文献涉及这一主题，如文献[3-9]，以及它们引用的文献.

本文的主要结果是：

定理 2　定理 1 中的全局的吸引子 $\mathscr{A}$ 是 $D(\mathrm{A}) = H^4 \times H^2$ 中的有界集.

定理 3　定理 1 中的全局的吸引子 $\mathscr{A}$ 具有有限分形维数，即 $\dim_F \mathscr{A} < \infty$.

1　定理 2 的证明

首先给出两个引理. 记 S_t 为 Cauchy 问题(11)～(12)定义在 $H^2\times L^2$ 中的半群,更详细的了解请参见文献[2].

引理 1　对任意的 $\eta>0$,存在 $\delta>0$ 使得当 $|t_2-t_1|<\delta$ 时,对任意的 $\theta\in\mathscr{A}$, 有

$$\|S_{t_2}\theta-S_{t_1}\theta\|_{H^2\times L^2}<\eta. \tag{15}$$

证明　令 $t_2>t_1,\Delta t=t_2-t_1$. 由式(13)得到

$$\begin{aligned}&\|S_{t_2}\theta-S_{t_1}\theta\|_{H^2\times L^2}=\|S_{\Delta t}S_{t_1}\theta-S_{t_1}\theta\|_{H^2\times L^2}\leqslant\\&\quad\|\mathrm{e}^{-\mathrm{A}\Delta t}S_{t_1}\theta-S_{t_1}\theta\|_{H^2\times L^2}+\int_0^{\Delta t}\|\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(\Delta t-\tau)}\tilde f(S_\tau S_{t_1}\theta)\|_{H^2\times L^2}\mathrm{d}\tau=\\&\quad I_1+I_2.\end{aligned}\tag{16}$$

简单运算知存在常数 $\tilde M>0,\omega>0$ 使得

$$\|\mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\|_{L(H^{2(1+s)}\times H^{2s},H^{2(1+s)}\times H^{2s})}\leqslant\tilde M\mathrm{e}^{-\omega t},\qquad t\geqslant0,\ s\in[-1,1],\tag{17}$$

这样,根据式(8)、(17)和 $\mathscr{A}$ 的不变性得

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^{\Delta t}\|\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(\Delta t-\tau)}\tilde f(S_\tau S_{t_1}\theta)\|_{H^2\times L^2}\mathrm{d}\tau\leqslant\\&\tilde M\int_0^{\Delta t}\mathrm{e}^{-\omega(\Delta t-\tau)}\|\tilde f(S_\tau S_{t_1}\theta)\|_{H^2\times L^2}\mathrm{d}\tau\leqslant\\&\frac{\tilde M}{\varepsilon}\int_0^{\Delta t}\mathrm{e}^{-\omega(\Delta t-\tau)}\|f([S_\tau S_{t_1}\theta]_1)\|\mathrm{d}\tau\leqslant c_{13}\Delta t,\end{aligned}\tag{18}$$

其中, c_{13} 为某常数, $[S_tw_0]_i$ 为 S_tw_0 的第 $i(i=1,2)$ 分量(下同). 另一方面,因为对任意的 $w\in H^2\times L^2$ 有 $\lim_{t\to0^+}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}t}w=w$ 和 $\mathscr{A}$ 在 $H^2\times L^2$ 的紧性,存在 $\delta_1>0$ 使得对任意的 $w\in\mathscr{A}$,有 $\|\mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}w-w\|_{H^2\times L^2}\leqslant\eta/2$, 从而

$$\|\mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}S_{t_1}\theta-S_{t_1}\theta\|_{H^2\times L^2}\leqslant\frac{\eta}{2}.\tag{19}$$

从式(16)、(18)和(19),我们得到式(15).

引理 2　设 K 是 H^2 的紧子集, $s(0\leqslant s\leqslant2)$ 固定,则对任意 $\eta>0$,存在 $\delta>0$ 使得当 $\|v_2-v_1\|_{H^2}<\delta,v_1,v_2\in K,u\in H^s$ 时,有

$$\|[\partial_uf(\cdot,v_2)-\partial_uf(\cdot,v_1)]u\|_{H^{-2+s}}<\eta\|u\|_{H^s}.\tag{20}$$

证明　我们只考虑更有趣的情形 $n\geqslant5$(当 $1\leqslant n<5$ 时,Sobolev 连续嵌入 $H^2\hookrightarrow L^p(p\geqslant2)$ 和增长条件(8)自然成立,因此本文的所有推理均成立). 定义

$$\bar M:=\max\left\{\sup_{v\neq0,v\in H^2}\frac{\|v\|_{L^{2n/(n-2s)}}}{\|v\|_{H^2}},\ \sup_{v\neq0,v\in H^2}\frac{\|v\|_{L^{2n/(n-(4-2s))}}}{\|v\|_{H^2}}\right\}.$$

对任意 $\eta>0$,存在 $\delta_1>0$ 使得当 $\mathrm{mes}(E)<\delta_1$ 时,对任意的 $v\in K$ 有

$$\|\partial_uf(\cdot,v(\cdot))\|_{L^{n/2}(E)}<\frac{\eta}{8\bar M}.\tag{21}$$

令

$$Q_i:=\{x:|v_i(x)|\leqslant\xi,x\in R^n\},\qquad i=1,2,$$

其中

$$\xi = \frac{\bar{M}}{\delta_1^{(n-4)/(2n)}} \sup_{v \in K} \| v \|_{H^2},$$

则得到

$$\operatorname{mes}(R^n \setminus Q_i) \leqslant \frac{1}{\xi^{2n/(n-4)}} \cdot \int_{R^n \setminus Q_i} | v_i(x) |^{2n/(n-4)} \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{1}{\xi^{2n/(n-4)}} \cdot \| v_i \|_{L^{2n/(n-4)}}^{2n/(n-4)} \leqslant \left(\frac{\bar{M}L}{\xi}\right)^{2n/(n-4)} = \delta_1, \qquad i = 1,2, \tag{22}$$

其中 $L = \sup_{v \in K} \| v \|_{H^2}$. 由于对几乎处处 $x \in R^n$ 和固定的 $\xi > 0$, $\partial_u f(x,u)$ 在 $[-\xi,\xi]$ 关于 u 一致连续,所以对任意的 $\eta > 0$,存在 δ_2 使得当 $s_1, s_2 \in [-\xi,\xi]$, $| s_1 - s_2 | < \delta_2$ 时,有

$$| \partial_u f(x,s_1) - \partial_u f(x,s_2) | < \frac{\eta}{4}, \qquad \text{a.e. } x \in R^n. \tag{23}$$

再定义

$$Q_3 := \{ x: | v_2(x) - v_1(x) | \leqslant \delta_2, x \in R^n \},$$

并令 $$\delta = \frac{1}{\bar{M}} \min \{ \delta_1^{1+(n-4)/(2n)}, \delta_2^{1+(n-4)/(2n)} \},$$

则由 $\| v_2 - v_1 \|_{H^2} < \delta$, 得

$$\operatorname{mes}(R^n \setminus Q_3) \leqslant \left(\frac{1}{\delta_2} \| v_2 - v_1 \|_{L^{2n/(n-4)}}\right)^{2n/(n-4)} \leqslant$$

$$\left(\frac{\bar{M}\delta}{\delta_2}\right)^{2n/(n-4)} \leqslant (\bar{M}\delta)^{2n/(3n-4)} \leqslant \delta_1. \tag{24}$$

这样从式(21)~(24),对任意的 $u \in H^s$, $\varphi \in H^{2-s}$ 有

$$\int_{R^n} | \partial_u f(x,v_2) - \partial_u f(x,v_1) | \cdot | u(x) | \cdot | \varphi(x) | \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\int_{\cap_{i=1}^3 Q_i} | \partial_u f(x,v_2) - \partial_u f(x,v_1) | \cdot | u(x) | \cdot | \varphi(x) | \mathrm{d}x +$$

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{R^n \setminus Q_i} | \partial_u f(x,v_2) - \partial_u f(x,v_1) | \cdot | u(x) | \cdot | \varphi(x) | \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{\eta}{4} \| u \| \cdot \| \varphi \| + \sum_{i=1}^{3} \| u \|_{L^{2n/(n-2s)}} \cdot \{ \| \partial_u f(\cdot, v_1(\cdot)) \|_{L^{n/2}(R^n \setminus Q_i)} +$$

$$\| \partial_u f(\cdot, v_2(\cdot)) \|_{L^{n/2}(R^n \setminus Q_i)} \} \cdot \| \varphi \|_{L^{2n/(n+2s-4)}} \leqslant$$

$$\frac{\eta}{4} \| u \|_{H^s} \cdot \| \varphi \|_{H^{2-s}} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\eta}{4\bar{M}} \cdot \bar{M} \cdot \| u \|_{H^s} \cdot \| \varphi \|_{H^{2-s}} =$$

$$\eta \| u \|_{H^s} \cdot \| \varphi \|_{H^{2-s}},$$

即式(20)成立. □

定理 2 的证明　设 $w_0 = (u_0, u_1) \in \mathscr{A}$ 是任意的. 对 $s < t$, 由式(13),得

$$S_t w_0 = S_{t-s} S_s w_0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t-s)} S_s w_0 + \int_0^{t-s} \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t-s-\tau)} \tilde{f}(S_\tau S_s w_0) \mathrm{d}\tau =$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t-s)} S_s w_0 + \int_0^{t-s} \mathrm{e}^{-\mathrm{A}\sigma} \tilde{f}(S_{t-\sigma} w_0) \mathrm{d}\sigma.$$

定义

$$D_h S_t w_0 := \frac{S_t w_0 - S_{t-h} w_0}{h},\ \bar{f}(w)\phi := \left(0, \frac{1}{\varepsilon}\partial_u f(\cdot,[w]_1)[\phi]_1\right),$$

当 $0 < h < t - s$ 时,有

$$\begin{aligned}
D_h S_t w_0 = &\frac{1}{h}(\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t-s)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t-s-h)})S_s w_0 + \frac{1}{h}\int_{t-s-h}^{t-s}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}\sigma}\tilde{f}(S_{t-\sigma-h}w_0)\mathrm{d}\sigma + \\
&\frac{1}{h}\int_0^{t-s}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}\sigma}(\tilde{f}(S_{t-\sigma}w_0) - \tilde{f}(S_{t-\sigma-h}w_0))\mathrm{d}\sigma = \\
&\frac{1}{h}(\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t-s)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t-s-h)})S_s w_0 + \frac{1}{h}\int_{t-s-h}^{t-s}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}\sigma}\tilde{f}(S_{t-\sigma-h}w_0)\mathrm{d}\sigma + \\
&\int_0^{t-s}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}\sigma}\left(\int_0^1 \bar{f}(S_{t-\sigma-h}w_0 + \tau(S_{t-\sigma}w_0 - S_{t-\sigma-h}w_0))D_h S_{t-\sigma}w_0\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\sigma = \\
&\frac{1}{h}(\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t-s)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t-s-h)})S_s w_0 + \frac{1}{h}\int_{t-s-h}^{t-s}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}\sigma}\tilde{f}(S_{t-\sigma-h}w_0)\mathrm{d}\sigma + \\
&\int_0^{t-s}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}\sigma}\left(\int_0^1[\bar{f}(S_{t-\sigma-h}w_0 + \tau(S_{t-\sigma}w_0 - S_{t-\sigma-h}w_0) - \bar{f}(w)]D_h S_{t-\sigma}w_0\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\sigma + \\
&\int_0^{t-s}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}\sigma}\int_0^1 \bar{f}(w)D_h S_{t-\sigma}w_0\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\sigma = K_1 + K_2 + K_3 + K_4,
\end{aligned}\tag{25}$$

对情形 $n \geqslant 5$($n \leqslant 4$ 更简单),由式(8)和式(17)得

$$\lim_{s\to-\infty}\|K_1\|_{H^2\times L^2} \leqslant \lim_{s\to-\infty}\frac{\tilde{M}}{h}(\mathrm{e}^{-\omega(t-s)} + \mathrm{e}^{-\omega(t-s-h)})\cdot\sup_{v\in\mathscr{A}}\|v\|_{H^2\times L^2} = 0,\tag{26}$$

$$\lim_{s\to-\infty}\|K_2\|_{H^2\times L^2} \leqslant \lim_{s\to-\infty}\frac{c_{13}\tilde{M}}{\varepsilon h}\int_{t-s-h}^{t-s}\mathrm{e}^{-\omega\sigma}\mathrm{d}\sigma = 0.\tag{27}$$

由于

$$\lim_{h\to0^+}D_h S_t w_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S_t w_0),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S_t w_0) + \mathrm{A}S_t w_0 = \tilde{f}(S_t w_0),$$

且对任意的 $w_0 \in \mathscr{A}$, $\|\mathrm{A}S_t w_0 - \tilde{f}(S_t w_0)\|_{L^2\times H^{-2}}$ 有界,因此 $D_h S_t w_0$ 关于 t 和 h 在 $L^2 \times H^{-2}$ 中一致有界. 令 $-1 < \mu_1 < 0$ 待定,我们得到

$$\begin{aligned}
&\|K_4\|_{H^{2(1+\mu_1)}\times H^{2\mu_1}} \leqslant \\
&\quad\tilde{M}\int_0^{t-s}\mathrm{e}^{-\omega\sigma}\int_0^1\|\bar{f}(w)D_h S_{t-\sigma}w_0\|_{H^{2(1+\mu_1)}\times H^{2\mu_1}}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\sigma \leqslant \\
&\quad\frac{\tilde{M}}{\varepsilon}\int_0^{t-s}\mathrm{e}^{-\omega\sigma}\int_0^1\|(0, -\partial_u f(\cdot,[w]_1)\cdot[D_h S_{t-\sigma}w_0]_1\|_{H^{2(1+\mu_1)}\times H^{2\mu_1}}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\sigma = \\
&\quad\frac{\tilde{M}}{\varepsilon}\int_0^{t-s}\mathrm{e}^{-\omega\sigma}\int_0^1\|\partial_u f(\cdot,[w]_1)\cdot[D_h S_{t-\sigma}w_0]_1\|_{H^{2\mu_1}}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}\tag{28}$$

进而有

$$\begin{aligned}
&\|\partial_u f(\cdot,[w]_1)\cdot[D_h S_{t-\sigma}w_0]_1\|_{H^{2\mu_1}} \leqslant \\
&\quad c_{14}\{\|[D_h S_{t-\sigma}w_0]_1\|_{H^{2\mu_1}} + \||[w]_1|^p\cdot[D_h S_{t-\sigma}w_0]_1\|_{L^{2n/(n-4\mu_1)}}\} \leqslant \\
&\quad c_{15}\|[D_h S_{t-\sigma}w_0]_1\|_{L^2} + \\
&\quad c_{15}\left\{\int_{R^n}|[w]_1|^{2np/(n-4\mu_1)}\cdot|[D_h S_{t-\sigma}w_0]_1|^{2n/(n-4\mu_1)}\mathrm{d}x\right\}^{(n-4\mu_1)/(2n)} \leqslant
\end{aligned}$$

$$c_{15} \| [D_h S_{t-\sigma} w_0]_1 \|_{L^2} + c_{15} \left\{ \int_{R^n} |[w]_1|^{2np/(-4\mu_1)} \mathrm{d}x \right\}^{(-4\mu_1)/(2n)} \cdot \| [D_h S_{t-\sigma} w_0]_1 \|_{L^2}, \tag{29}$$

其中, c_{14}, c_{15} 为与 w 无关的常数. 注意到 $(n-4)p/4 < 1$, 可选择 μ_1 使得 $-1 < \mu_1 \leqslant -(n-4)p/4$, 即 $2np/(-4\mu_1) \leqslant 2n/(n-4)$. 由式(29)得

$$\begin{aligned} &\| \partial_u f(\cdot, [w]_1) \cdot [D_h S_{t-\sigma} w_0]_1 \|_{H^{2\mu_1}} \leqslant \\ &c_{15} \| [D_h S_{t-\sigma} w_0]_1 \|_{L^2} + c_{16} \| [w]_1 \|_{H^4}^{-4\mu_1 p/(n-4\mu_1)} \cdot \| [D_h S_{t-\sigma} w_0]_1 \|_{L^2} \leqslant \\ &c_{17} \{ 1 + \| [w]_1 \|_{H^4}^{-4\mu_1 p/(n-4\mu_1)} \}, \end{aligned} \tag{30}$$

其中, c_{16}, c_{17} 为与 w 无关的常数.

选取固定的 $\varepsilon\eta_0 > 0$, $\eta_0 \in (0, \omega/\tilde{M})$, 其中 $\omega, \tilde{M}$ 由式(17)给出. 由引理2, 存在 $\eta_1(\eta_0)$ 使得 $\| w_1 - w_2 \|_{H^2 \times L^2} < \eta_1$, $w_1, w_2 \in \mathscr{A}$, 且有

$$\begin{aligned} &\| [\bar{f}(w_1) - \bar{f}(w_2)] \phi \|_{H^{2(1+\mu_1)} \times H^{2\mu_1}} \leqslant \\ &\eta_0 \| \phi \|_{H^{2(1+\mu_1)} \times H^{2\mu_1}}, \qquad \forall \phi \in H^{2(1+\mu_1)} \times H^{2\mu_1}. \end{aligned} \tag{31}$$

又从式(14)知

$$\lim_{t \to -\infty} d(S_t w_0, \mathscr{N}_0) = 0,$$

所以存在 $T_1(w_0, \eta_1) < 0$ 使得

$$d(S_t w_0, \mathscr{N}_0) < \frac{\eta_1}{2}, \qquad t \leqslant T_1. \tag{32}$$

由引理1, 对 $\eta_1/2$, 存在 $\delta(\eta_1)$, 并记 $T_m^1 = T_1 - m\delta (m \in \mathbf{N})$. 则式(15)表明存在 $\mathscr{N}_0$ 的点列 $\{(u_m, 0)\}_{m=1}^{\infty}$ 使得

$$\| S_{T_m^1} w_0 - (u_m, 0) \|_{H^2 \times L^2} < \frac{\eta_1}{2}, \qquad \forall m \in \mathbf{N},$$

若记 $\bar{w}(t) = (u_m, 0) (t \in (T_{m+1}^1, T_m^1], m \in \mathbf{N})$, 我们有

$$\begin{aligned} &\| S_t w_0 - \bar{w}(t) \|_{H^2 \times L^2} \leqslant \| S_t w_0 - S_{T_m^1} w_0 \|_{H^2 \times L^2} + \| S_{T_m^1} w_0 - \bar{w}(t) \|_{H^2 \times L^2} \leqslant \\ &\frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_1}{2} = \eta_1, \qquad \forall t \leqslant T_1, \end{aligned} \tag{33}$$

其中选择 T_m^1 使 $|t - T_m| < \delta$. 另一方面, 从式(5)和式(9)知, $\mathscr{N}_0$ 实际上是 $H^4 \times H^2$ 的有界集. 若记 $\tilde{w}(t-\sigma, h, \tau) := \tau \bar{w}(t-\sigma) + (1-\tau)\bar{w}(t-\sigma-h)$, 则有

$$\| [\tilde{w}(t-\sigma, h, \tau)]_1 \|_{H^4} \leqslant c_{18}, \tag{34}$$

其中常数 c_{18} 与 t, h, τ 和 w_0 无关. 在式(28) ~ (30)用 $\tilde{w}(t-\sigma, h, \tau)$ 替换 w, 则从式(34)和 $D_h S_t w_0$ 在 L^2 中的一致有界性得

$$\| K_4 \|_{H^{2(1+\mu_1)} \times H^{2\mu_1}} \leqslant c_{19}, \tag{35}$$

其中常数 c_{19} 与 t, h, τ 和 w_0 无关. 由式(17)和式(31), 当 $s < t \leqslant T_1$, 有

$$\begin{aligned} &\| K_3 \|_{H^{2(1+\mu_1)} \times H^{2\mu_1}} \leqslant \eta_0 \tilde{M} \int_0^{t-s} \mathrm{e}^{-\omega\sigma} \| D_h S_t w_0 \|_{H^{2(1+\mu_1)} \times H^{2\mu_1}} \mathrm{d}\sigma = \\ &\eta_0 \tilde{M} \int_s^t \mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)} \| D_h S_t w_0 \|_{H^{2(1+\mu_1)} \times H^{2\mu_1}} \mathrm{d}\sigma, \end{aligned} \tag{36}$$

其中 w 也被 $\tilde{w}(t-\sigma, h, \tau)$ 替换, 并且应用了下列事实:

$$\| S_{t-\sigma-h}w_0 + \tau(S_{t-\sigma}w_0 - S_{t-\sigma-h}w_0) - \tilde{w}(t-\sigma,h,\tau) \|_{H^2\times L^2} \leqslant \eta_1, \qquad \forall t \leqslant T_1.$$

在式(25)两边取极限 $s\to-\infty$，则由式(26)、(27)和式(35)、(36)，有

$$\| D_hS_tw_0 \|_{H^{2(1+\mu_1)}\times H^{2\mu_1}} \leqslant c_{19} + \eta_0\tilde{M}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)} \| D_hS_tw_0 \|_{H^{2(1+\mu_1)}\times H^{2\mu_1}}\mathrm{d}\sigma,$$

进而得到

$$\| D_hS_tw_0 \|_{H^{2(1+\mu_1)}\times H^{2\mu_1}} \leqslant c_{19}\left(1 + \frac{\eta_0\tilde{M}}{\omega - \eta_0\tilde{M}}\right), \qquad \forall t \leqslant T_1;\ h > 0. \tag{37}$$

应用式(28)~(30)和式(37)，再重复上述程序，则存在 $T_2(T_2 \leqslant T_1)$ 和 μ_2，$\mu_2 - \mu_1 = 4-(n-4)p > 0$ 使得

$$\| D_hS_tw_0 \|_{H^{2(1+\mu_2)}\times H^{2\mu_2}} \leqslant c_{20}, \qquad \forall t \leqslant T_2;\ h > 0,$$

其中常数 c_{20} 与 t,h,τ 和 w_0 均无关. 一般地，我们重复上述过程不超过 $[(1+\mu_1)/(4-(n-4)p)]+2$ 次，则可得到 $D_hS_tw_0$ 的正则估计，即

$$\| D_hS_tw_0 \|_{H^2\times L^2} \leqslant c_{21}, \qquad \forall t \leqslant T^*;\ h > 0$$

或

$$\left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_tw_0 \right\|_{H^2\times L^2} \leqslant c_{21}, \qquad \forall t \leqslant T^*, \tag{38}$$

其中常数 $T^* < 0$ 和 c_{21} 与 t 和 w_0 无关. 而由式(11)、(38)反过来表明

$$\| S_tw_0 \|_{H^4\times H^2} \leqslant c_{22}, \qquad \forall t \leqslant T^*. \tag{39}$$

因此应用文献[10]的命题4.3.9，有 $w_0 = S_{-T^*}S_{T^*}w_0 \in H^4\times H^2$，即 $\mathscr{A}\subset H^4\times H^2$.

接下来，我们证明 $\mathscr{A}$ 是 $H^4\times H^2$ 的有界集. 对任意的 $\phi_0\in\mathscr{A}$，微分

$$S_t\phi_0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{A}t}\phi_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t-\tau)}\tilde{f}(S_\tau\phi_0)\mathrm{d}\tau,$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_t\phi_0 = -\mathrm{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}t}\phi_0 + \mathrm{e}^{-\mathrm{A}t}\tilde{f}(\phi_0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t-\tau)}\tilde{f}(S_\tau\phi_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_\tau\phi_0\mathrm{d}\tau, \qquad t\geqslant 0.$$

因此对 $t\geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_t\phi_0 \right\|_{H^2\times L^2} \leqslant{}& c_{23}\mathrm{e}^{-\omega t}(\|\phi_0\|_{H^4\times H^2} + \|[\phi_0]_1\|_{H^2}^{p+1} + \|[\phi_0]_1\|_{H^2}) + \\ & \frac{\tilde{M}}{\varepsilon}\int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-\tau)}\left\| \partial_u f(\cdot,[S_\tau\phi_0]_1)\cdot\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}S_\tau\phi_0\right]_1 \right\|\mathrm{d}\tau \leqslant \\ & c_{23}\mathrm{e}^{-\omega t}(\|\phi_0\|_{H^4\times H^2} + \|[\phi_0]_1\|_{H^2}^{p+1} + \|[\phi_0]_1\|_{H^2}) + \\ & c_{24}\int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-\tau)}\left\|\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}S_\tau\phi_0\right]_1\right\| + \left\|\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}S_\tau\phi_0\right]_1\right\|_{H^2}\mathrm{d}\tau \leqslant \\ & c_{23}\mathrm{e}^{-\omega t}(\|\phi_0\|_{H^4\times H^2} + \|[\phi_0]_1\|_{H^2}^{p+1} + \|[\phi_0]_1\|_{H^2}) + \\ & c_{25}\int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-\tau)}\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}S_\tau\phi_0\right\|_{H^2\times L^2}\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{40}$$

其中应用了 $\mathscr{A}$ 在 $H^2\times L^2$ 中的有界性. 令 $\phi_0 = S_{T^*}w_0$，从式(39)、(40)得

$$\left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_tS_{T^*}w_0 \right\|_{H^2\times L^2} \leqslant c_{26} + c_{25}\int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-\tau)}\left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}S_\tau S_{T^*}w_0 \right\|_{H^2\times L^2}\mathrm{d}\tau,$$

这意味着

$$\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_tS_{T^*}w_0\right\|_{H^2\times L^2} \leqslant c_{27}, \qquad t \geqslant 0$$

或

$$\| S_tS_{T^*}w_0 \|_{H^4\times H^2} \leqslant c_{28}, \qquad t \geqslant 0, \tag{41}$$

其中常数 c_{27} 和 c_{28} 与 t 和 w_0 无关. 在式(41) 中让 $t=-T^*$, 即得 $\| w_0 \|_{H^4\times H^2} \leqslant c_{28}$.

2 定理 3 的证明

我们也只讨论情形 $n \geqslant 5$. 对任意的 $w_1, w_2 \in \mathscr{A}$, 从定理 2 知, 当 $\tau \geqslant 0$ 时,

$$\begin{aligned}\| f(\cdot,[S_\tau w_2]_1) - f(\cdot,[S_\tau w_1]_1) \| &\leqslant c_{29} \| [S_\tau w_2]_1 - [S_\tau w_1]_1 \|_{H^{2(1+\mu_0)}} \leqslant \\ & c_{29} \| S_\tau w_2 - S_\tau w_1 \|_{H^{2(1+\mu_0)}\times H^{2\mu_0}},\end{aligned} \tag{42}$$

其中常数 c_{29} 与 w_1, w_2 无关, $\mu_0 \in (-1,0)$ 满足 $1/(1+\mu_0) \leqslant 4/((n-4)p)$. 故由式(42), 当 $t \geqslant 0$ 时, 得

$$\begin{aligned}\| S_tw_2 - S_tw_1 \|_{H^2\times L^2} &\leqslant \tilde{M}\mathrm{e}^{-\omega t} \| w_2 - w_1 \|_{H^2\times L^2} + \\ & c_{30}\mathrm{e}^{-\omega t}\int_0^t \mathrm{e}^{\omega\tau} \| S_\tau w_2 - S_\tau w_1 \|_{H^{2(1+\mu_0)}\times H^{2\mu_0}}\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{43}$$

相似地, 重复上述过程有限次最终得到, 当 $t \geqslant 0$ 时,

$$\begin{aligned}\| S_tw_2 - S_tw_1 \|_{H^2\times L^2} &\leqslant c_{31}\mathrm{e}^{-\omega t}(1+t+t^2+\cdots+t^k) \| w_2 - w_1 \|_{H^2\times L^2} + \\ & c_{31}\mathrm{e}^{-\omega t}\int_0^t\int_0^{\tau_1}\cdots\int_0^{\tau_k}\mathrm{e}^{\omega s} \| S_sw_2 - S_sw_1 \|_{L^2\times H^{-2}}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau_k\cdots\mathrm{d}\tau_1,\end{aligned} \tag{44}$$

其中常数 c_{31} 与 w_1, w_2 无关, k 为某整数. 令 $w_R(t) \coloneqq \varphi(|x|/R)(S_tw_2 - S_tw_1)$, 其中 $\varphi(\cdot)$ 为足够光滑函数满足

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ 1, & s \geqslant 2. \end{cases}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_R(t) + \bar{\mathrm{A}}w_R(t) = f_1(t) + f_2(t), \tag{45}$$

其中

$$\bar{\mathrm{A}} = \mathrm{A} + \frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} -\partial_u f(\cdot,0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \mathrm{A}\left[\varphi\left(\frac{|x|}{R}\right)(S_tw_2 - S_tw_1)\right] - \varphi\left(\frac{|x|}{R}\right)\mathrm{A}(S_tw_2 - S_tw_1) = \\ & \frac{1}{\varepsilon}\left(0, \Delta^2\left[\left(\varphi\left(\frac{|x|}{R}\right)[S_tw_2 - S_tw_1]_1\right)\right] - \right. \\ & \left.\varphi\left(\frac{|x|}{R}\right)\Delta^2([S_tw_2 - S_tw_1]_1)\right), \end{aligned}$$

$$f_2(t) = \left\{\int_0^1 \bar{f}(S_tw_1 + \tau(S_tw_2 - S_tw_1))\mathrm{d}\tau - \frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} \partial_u f(\cdot,0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\cdot w_R(t).$$

由式(9)可知,对几乎处处 $x \in R^n$, $\partial_u f(x,0) \leqslant 0$, 这意味着

$$\| e^{-t\bar{A}} \|_{L(H^{2(1+s)}\times H^{2s}, H^{2(1+s)}\times H^{2s})} \leqslant \tilde{M}' e^{-\omega t}, \qquad t \geqslant 0;\ s \in [-1,1]. \tag{46}$$

注意到存在常数 c_{32} 使得

$$\left| \frac{\partial^{\sum_{i=1}^n m_i}}{\partial_{x_1}^{l_1}\partial_{x_2}^{l_2}\cdots\partial_{x_n}^{l_n}} \varphi\left(\frac{|x|}{R}\right) \right| \leqslant \frac{c_{32}}{R^{\sum_{i=1}^n m_i}}, \qquad \forall 0 \leqslant l_i,\ m_i \leqslant n;\ 1 \leqslant \sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n m_i,$$

我们易得

$$\| f_1(t) \|_{L^2\times H^{-2}} \leqslant c_{33}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^4}\right) e^{\kappa t} \| w_2 - w_1 \|_{H^2\times L^2}, \tag{47}$$

其中, c_{33}, κ 均为常数. 固定 $\bar{\eta}_0 \in (0, \omega/\tilde{M}')$,由引理 2 知,存在 $R_1 = R_1(\bar{\eta}_0) \geqslant 1$ 使得

$$\| f_2(t) \|_{L^2\times H^{-2}} \leqslant \bar{\eta}_0 \| w_R(t) \|_{L^2\times H^{-2}}, \qquad t \geqslant 0;\ R \geqslant R_1. \tag{48}$$

从式(45)~(48)可得

$$\begin{aligned} &\| w_R(t) \|_{L^2\times H^{-2}} \leqslant \\ &\quad C_{34}\left(e^{-(\omega - \tilde{M}'\bar{\eta}_0)t} \| w_R(0) \|_{L^2\times H^{-2}} + \frac{e^{\kappa t}}{R} \| w_2 - w_1 \|_{H^2\times L^2}\right), \qquad t \geqslant 0;\ R \geqslant R_1. \end{aligned} \tag{49}$$

相似的方式得

$$\begin{aligned} \| \bar{w}_R(t) \|_{L^2\times H^{-2}} &\leqslant C_{35}\left(e^{\kappa' t} \| \bar{w}_R(0) \|_{L^2\times H^{-2}} + \frac{e^{\kappa t}}{R} \| w_2 - w_1 \|_{H^2\times L^2}\right) \leqslant \\ &\quad C_{35}\left(e^{\kappa' t} \| \bar{w}_R(0) \|_{L^2\times H^{-2}} + \frac{e^{\kappa t}}{R} \| w_2 - w_1 \|_{H^2\times L^2}\right), \qquad t \geqslant 0, \end{aligned} \tag{50}$$

其中, c_{35}, κ' 为常数,而 $\bar{w}_R(t) := (1 - \varphi(|x|/R))(S_t w_2 - S_t w_1)$. 联合式(44)、(49)和(50),最终得到

$$\begin{aligned} \| S_t w_2 - S_t w_1 \|_{H^2\times L^2} &\leqslant \left[P(t) + \frac{Q(t)}{R}\right] \| w_2 - w_1 \|_{H^2\times L^2} + \\ &\quad Q(t) \| w_2 - w_1 \|_{L^2(B(0,2R))\times H^{-2}(B(0,2R))}, \qquad t \geqslant 0;\ R \geqslant R_1, \end{aligned} \tag{51}$$

其中函数 $P(t)$ 满足 $\lim_{t\to\infty} P(t) = 0$,而函数 $Q(t)$ 是单调增加的. 固定 T 和 $R_0 (R_0 \geqslant R_1)$ 足够大使得

$$\gamma_0 := P(T) + \frac{Q(T)}{R_0} < 1,$$

则有当 $w_1, w_2 \in \mathscr{A}$ 时,

$$\begin{aligned} &\| Lw_2 - Lw_1 \|_{H^2\times L^2} \leqslant \\ &\quad \gamma_0 \| w_2 - w_1 \|_{H^2\times L^2} + Q(T) \| w_2 - w_1 \|_{L^2(B(0,2R_0))\times H^{-2}(B(0,2R_0))}, \end{aligned} \tag{52}$$

其中映射 $L := S_T$. 应用文献[4]中的结果(这里 $n_2 = 0$),立得 $\dim_F \mathscr{A} < \infty$.

致谢 作者衷心感谢审稿人提出的有价值的修改意见,感谢宁波大学王宽存基金的资助.

参考文献:

[1] Khanmamedov A K. Global attractors for the plate equation with a localized damping and a critical exponent in an unbounded domain[J]. *J Diff Equs*, 2006, **225**(2):528-548.

[2] Xiao H B. Asymptotic dynamics of Plate equations with critical exponent on unbounded domain[J]. *Nonlinear Anal*, 2009, **70**(3): 1288-1301.

[3] Babin A V, Vishik M I. *Attractors of Evolution Equations*[M]. Amsterdam: North-Holland, 1992.

[4] Chueshov I, Lasiecka I. Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping[J]. *Mem Am Math Soc*, 2008, **195**(912): 22-27.

[5] Hale J K. *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*[M]. Vidence, RI: Amer Math Soc, 1988.

[6] Sell G R, You Y C. *Dynamics of Evolution Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 2002.

[7] Temam R. *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*[M]. Berlin: Springer-Verlag,1997.

[8] Miranville A, Zelik S. *Attractors for Dissipative Partial Differential Equations in Bounded and Unbounded Domain*[M]. Amsterdam: Elsevier, 2008.

[9] Rausel G. *Global Attractors in Partial Differential Equations*[M]. Amsterdam: North-Holland, 2002.

[10] Cazenave T, Haraux A. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*[M]. Oxford: Clarendon Press, 1998.

Regularity and Finite Dimensionality of Attractor for Plate Equation on R^n

XIAO Hai-bin

(1. *Department of Mathematics*, *Ningbo University*,
Ningbo, *Zhejiang* 315211, *P. R. China*;
2. *Department of Mathematics*, *Nanjing University*, *Nanjing* 210093, *P. R. China*)

Abstract: Regularity and finite dimensionality of global attractor for plate equation on unbounded domain R^n were studied. Existence of the attractor inphase space $H^2(R^n)\times L^2(R^n)$ was established in the author's earlier paper. It is showed that the attractor is actually a bounded set of $H^4(R^n)\times H^2(R^n)$ and has finite fractal dimensionality.

Key words: global attractor; Plate equation; regularity; finite dimensionality; unbounded domain