应用数学和力学,第 31 卷 第 12 期
2010 年 12 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 31, No. 12, Dec. 15, 2010

文章编号:1000-0887(2010)12-1445-09

高精度特征解及其外推求解位势方程*

程 攀[1,2], 黄 晋[1], 曾 光[1]

(1. 电子科技大学 数学科学院,成都 611731;
2. 重庆交通大学 理学院, 重庆 400074)

摘要: 根据位势理论,基本边界特征值问题可转化为具有对数奇性的边界积分方程. 利用机械求积方法求解特征值和特征向量,以及利用这些特征解求解 Laplace 方程. 特征解和 Laplace 方程的解具有高精度和低的计算复杂度. 利用 Anselone 聚紧和渐近紧理论,证明了方法的收敛性和稳定性. 此外,还给出了误差的奇数阶渐近展开. 利用 h^3-Richardson 外推,不仅误差近似的精度阶大为提高,而且,得到的后验误差估计可以构造自适应算法. 具体的数值例子说明了算法的有效性.

关 键 词: 位势方程; 机械求积法; Richardson 外推; 后验误差估计

中图分类号: O24;O39 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.12.005

引 言

广义三角级数的近似方法常被用来求解方程的边界值问题[1-2]. 在这些经典近似方法中,基函数总是关于区域 Ω 正交.

从积分方程的描述中看到,位势解主要以边界值的线性表示给出. 因此,求解积分方程时,基函数关于边界 Γ 正交更为恰当. 并且基函数可以通过求解如方程(1)形式的特征值问题得到. 方程(1)中,特征参数出现在边界条件中:

$$\begin{cases} \triangle \tilde{u} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \boldsymbol{n}} = \tilde{t} = \lambda \tilde{u}, & \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset R^2$ 是具有光滑边界 Γ 的有界单联通区域,$\partial/(\partial \boldsymbol{n})$ 是边界 Γ 上的单位外法向导数,以及 λ 是特征值.

此细微的变化使它与一般特征值问题产生了区别:

1) 在区域中,特征向量 $\tilde{u}$ 满足整个方程;

2) 对于适定边界条件的微分方程,特征向量序列 $\{\tilde{u}_{(l)}\}$ 可作为求解方程的一个基.

Laplace 方程的基本特征解定义如下:求定义在区域 Ω 和边界 Γ 的非零位势解 $\tilde{u}$ 满足方程(1).

根据广义 Fourier 分析[3],至少存在一个特征解 $(\lambda, \tilde{u})$,方程(1)的特征值 $\lambda_{(l)}$($l=1, 2,$

---

* **收稿日期:** 2010-07-29; **修订日期:** 2010-11-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871034)

作者简介: 程攀(1976—),男,重庆人,讲师,博士(联系人. E-mail: cheng_pass@sina.com).

…）是实的，以及所有的非零特征值是正的. 特征向量集合 $\{\tilde{u}_{(l)}\}$ 是完备的和正交的，即

$$\int_\Gamma \tilde{u}_{(m)}\tilde{u}_{(l)}\mathrm{d}s = \delta_{ml}, \qquad m,l = 1,2,\cdots.$$

其中 δ_{ml} 是 Kronecker 函数. 对于 Neumann 和 Dirichlet 边值问题，边界值可以按级数展开为

$$\begin{cases} u = \sum_{l=1}^{\infty} q_l \tilde{u}_{(l)}, & \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \\ t = \sum_{l=1}^{\infty} q_l \lambda_{(l)} \tilde{u}_{(l)}, & \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \end{cases} \tag{2}$$

对于 Dirichlet 问题，当边界 Γ 上位势为 $u = f(\boldsymbol{x}) \in L_2$ 时，系数值 $q_l = \int_\Gamma f\,\tilde{u}_{(l)}\mathrm{d}s$；对于 Neumann 问题，当边界 Γ 上张力为 $t = g(\boldsymbol{x}) \in L_2$ 时，系数值

$$q_l = \frac{1}{\lambda_{(l)}}\int_\Gamma g\tilde{u}_{(l)}\mathrm{d}s, \qquad \lambda_{(l)} \neq 0,$$

且 $g(\boldsymbol{x})$ 满足相容条件

$$\int_\Gamma g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s = 0.$$

因此，特征解问题可以用来求解 Laplace 方程的边值问题.

本文的一个目标是求解出 $\lambda, \tilde{u}_{(l)}$，并得到

$$\lambda_h - \lambda = d_1 h^3 + d_2 h^5 + o(h^5), \ \tilde{\boldsymbol{u}}_{(l)h} - \tilde{u}_{(l)} = w_{l1}h^3 + w_{l2}h^5 + o(h^5). \tag{3}$$

利用位势理论，方程(1)转化为边界积分方程[4-5]（BIE）：

$$\alpha(\boldsymbol{y})\tilde{u}(\boldsymbol{y}) - \int_\Gamma k^*(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\tilde{u}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}} = \int_\Gamma h^*(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\tilde{t}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}}, \qquad \boldsymbol{y} \in \Gamma, \tag{4}$$

其中 $\alpha(\boldsymbol{y}) = \theta(\boldsymbol{y})/(2\pi)$ 是与在区域 Ω 内的内角 $\theta(\boldsymbol{y})$ 相关的函数，当 $\boldsymbol{y}$ 位于边界光滑点上时，$\alpha = 1/2$，以及 $h^*(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ 是基本解：

$$h^*(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = -1/(2\pi)\ln r, \ k^*(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \partial h^*(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})/(\partial \boldsymbol{n}), \tag{5}$$

r 是点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的距离.

在方程(4)中代入边界条件可以求得特征解 $(\lambda, \tilde{u}_{(l)})$，再根据方程(2)可计算得到边界 Γ 上的 u 和 t. 因此，对所有的 $\boldsymbol{y} \in \Omega$，位势值可由下式计算[4-5]：

$$u(\boldsymbol{y}) = \int_\Gamma k^*(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}} + \int_\Gamma h^*(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\, t(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s_{\boldsymbol{x}}. \tag{6}$$

Hadjesfandiari 等[3]给出了位势方程基本边界特征解的一般理论. 并利用特征值和特征向量构造得到广义离散 Fourier 级数的一般性质. Amini 等[6]利用 Galerkin 方法和多重小波基函数方法研究 Laplace 方程的边界解. 吕等[7]应用 Nyström 逼近和外推方法求解弱奇异积分并得到高精度解. Li[5]在 Trefftz 方法中，探求基本解和奇性特解的组合技巧，同时还给出基本解和一般有限元组合的方法. Liu[8]应用改进的间接 Trefftz 方法求解 Laplace 方程的 Cauchy 奇性并用简便的配置法求解方程.

在本文第 1 节中，构造 MQMs 近似基本边界特征解并求出特征值和特征向量；第 2 节给出特征解的误差和收敛性分析；第 3 节得到误差的渐近展开；在第 4 节，数值算例说明此方法的优越性.

1 机械求积法

假设 Γ 是光滑封闭曲线，且有参数变换 $\boldsymbol{x}(s) = (x_1(s), x_2(s))$：$[0,2\pi] \to \Gamma$，满足 $|\boldsymbol{x}'(s)|^2$

$= |x_1'(s)|^2 + |x_2'(s)|^2 > 0$. 设 $C^{2m}[0,2\pi]$ 为具有周期 2π 的 $2m$ 次可微周期函数且有 $x_i(s) \in C^{2m}[0,2\pi], i = 1,2$. 定义在 $C^{2m}[0,2\pi]$ 上的积分算子：

$$\begin{cases} (Ku)(s) = 2\int_0^{2\pi} k(t,s)u(t)\mathrm{d}t, \\ (Hu)(s) = 2\int_0^{2\pi} h(t,s)u(t)\mathrm{d}t, \end{cases} \tag{7}$$

其中，$u(t) = \tilde{u}(x_1(t), x_2(t)), k(t,s) = k^*(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(s))|\boldsymbol{x}'(t)|$ 是光滑函数，和 $h(t,s) = h^*(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(s))|\boldsymbol{x}'(t)|$ 是对数弱奇异函数. 则方程(4)等价为

$$\begin{cases} (I - K)u = \lambda Hu, \\ \|u\|_{0,\Gamma}^2 = \int_0^{2\pi} u^2(s)|\boldsymbol{x}'(s)|\mathrm{d}s = 1, \end{cases} \tag{8}$$

其中，I 是恒等算子，$\|\cdot\|_{0,\Gamma}$ 是定义在边界 Γ 上的 L_2 范数.

设网格宽度为 $h = 2\pi/n, (n \in \mathbf{N})$ 和节点为 $t_j = s_j = jh(j = 0,1,\cdots,n-1)$. 由于 K 是 2π 为周期的光滑积分算子，由梯形公式[9-10]构造高精度的 Nyström 近似：

$$(\boldsymbol{K}_h u)(s) = h\sum_{j=0}^{n-1} k(t_j, s)u(t_j), \tag{9}$$

其误差估计为

$$(Ku)(s) - (\boldsymbol{K}_h u)(s) = O(h^{2m}). \tag{10}$$

对于对数弱奇异算子 H，定义其连续逼近核 $h_n(t,\tau)$ 为

$$h_n(t,s) = \begin{cases} h(t,s), & |t - s| \geqslant h, \\ \ln\left(\frac{h}{2\pi}|\boldsymbol{x}'(s)|\right), & |t - s| < h. \end{cases} \tag{11}$$

根据 Sidi 求积公式[9]，得到 Nyström 近似：

$$(\boldsymbol{H}_h u)(s) = h\sum_{j=0}^{n-1} h_n(t_j, s)u(t_j), \tag{12}$$

其误差为

$$(Hu)(s) - (\boldsymbol{H}_h u)(s) = 2\sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{\zeta'(-2\mu)}{(2\mu)!}\cdot u^{(2\mu)}(s)h^{2\mu+1} + O(h^{2m}), \tag{13}$$

其中 $\zeta'(t)$ 是 Riemann zeta 函数的导数. 因此，我们得到方程(8)的数值近似方程：

$$\begin{cases} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_h)\boldsymbol{u}_h = \lambda_h \boldsymbol{H}_h \boldsymbol{u}_h, \\ h\sum_{j=1}^{n-1} (\boldsymbol{u}_h(t_j))^2 |\boldsymbol{x}'(t_j)| = 1, \end{cases} \tag{14}$$

其中，$\boldsymbol{K}_h$ 和 $\boldsymbol{H}_h$ 是对应于 K 和 H 的 n 阶离散矩阵. 显然，式(14)是以 $(\lambda_h, \boldsymbol{u}_h)$ 为未知数的线性方程组.

2 求积法的误差分析

根据对数容度理论[11]，K 和 $\boldsymbol{K}_h$ 的特征值都不等于1. 因此方程(8)和(14)可写为：求 γ 和 $u \in C[0,2\pi]$ 满足

$$Lu = (I - K)^{-1}Hu = \gamma u, \quad \|u\|_{0,\Gamma}^2 = 1, \tag{15}$$

以及求 $\boldsymbol{\gamma}_h$ 和 $\boldsymbol{u}_h$ 满足

$$\boldsymbol{L}_h\boldsymbol{u}_h=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_h)^{-1}\boldsymbol{H}_h\boldsymbol{u}_h=\gamma_h\boldsymbol{u}_h,\ h\sum_{j=0}^{n-1}(\boldsymbol{u}_h(t_j))^2|\boldsymbol{x}'(t_j)|=1, \tag{16}$$

其中，$\gamma=1/\lambda$，$\gamma_h=1/\lambda_h$。

定理 1 近似算子序列 $\{\boldsymbol{L}_h\}$ 是 $C[0,2\pi]$ 上的渐近紧序列且收敛于 L，即

$$\boldsymbol{L}_h\xrightarrow{\text{a.c.}}L. \tag{17}$$

证明 由于 $h_n(t,\tau)$ 是 $h(t,\tau)$ 的连续逼近，故近似算子 $\{\boldsymbol{H}_h\}$ 是 $C[0,2\pi]$ 上渐近紧收敛于 H，即 $\boldsymbol{H}_h\xrightarrow{\text{a.c.}}H, n\to\infty$。其表明对任意有界序列 $\{y_m\in C^{(m)}[0,2\pi]\}$，都存在一个收敛的子列 $\{\boldsymbol{H}_h y_m\}$。不失一般性，假设 $\boldsymbol{H}_h y_m\to z$ 当 $m\to\infty$。由渐近紧的性质和求积方法[9,12]，我们有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{L}_h y_m-(I-K)^{-1}z\| &\leqslant \|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_h)^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{H}_h y_m-z\|+\\ &\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_h)^{-1}(\boldsymbol{K}_h-K)(I-K)^{-1}z\|\to 0,\qquad \text{当 } m\to\infty \text{ 和 } h\to 0,\end{aligned}$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 $\mathscr{L}(C^{(m)}[0,2\pi],C^{(m)}[0,2\pi])$ 的范数。因此 $\{\boldsymbol{L}_h\}$ 是渐近紧序列。

下面将证明 $\boldsymbol{L}_h$ 逐点收敛于 L，当 $n\to\infty$。由于对 $\forall y\in C^{(m)}[0,2\pi]$，有 $\boldsymbol{H}_h\xrightarrow{\text{a.c.}}H$，因此

$$\|\boldsymbol{H}_h y-Hy\|\to 0,\qquad \text{当 } h\to 0. \tag{18}$$

根据求积方法[9]，得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{L}_h y-Ly\| &\leqslant \|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_h)^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{H}_h y-Hy\|+\\ &\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_h)^{-1}(\boldsymbol{K}_h-K)(I-K)^{-1}Hy\|\to 0,\qquad \text{当 } h\to 0.\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{L}_h$ 逐点收敛于 L。

由于 $\boldsymbol{L}_h$ 是渐近紧序列且逐点收敛于 L，故得到本定理结论。 □

推论 1 在定理 1 条件下，有性质

$$\begin{cases}\|(\boldsymbol{L}_h-L)L\|\to 0,\\ \|(\boldsymbol{L}_h-L)\boldsymbol{L}_h\|\to 0,\qquad \text{当 } h\to 0.\end{cases} \tag{19}$$

定理 2 若 $u(s)\in C^{(2l)}[0,2\pi]$，则有渐近展开式：

$$(\boldsymbol{L}_h-L)u(s)=\sum_{j=1}^{l-1}\psi_j(s)h^{2j+1}+O(h^{2l}), \tag{20}$$

其中 $\psi_j(s)\in C^{2(l-j)}[0,2\pi]$ $(j=1,\cdots,l-1)$ 是与 h 无关的函数。

由于 γ 是方程(15)的独立特征值，其所对应的特征空间的维数是有限的，且其共轭复数 $\bar{\gamma}$ 也是共轭算子 $\bar{L}$ 的特征值。设 $\bar{V}_\gamma=\operatorname{span}\{\bar{u}_{(1)},\cdots,\bar{u}_{(\chi)}\}$ 和 $V_\gamma=\operatorname{span}\{u_{(1)},\cdots,u_{(\chi)}\}$ 分别是 $\bar{L}$ 和 L 的特征空间，它们构成了一个双正交系统：

$$\langle u_{(i)},\bar{u}_{(j)}\rangle=\delta_{ij},\qquad i,j=1,\cdots,\chi, \tag{21}$$

其中 $\|u_{(i)}\|=1(i=1,\cdots,\chi)$。设 γ_h 和 $V_{\gamma h}$ 分别是 $\boldsymbol{L}_h$ 的特征值和特征空间，则有 $\dim V_{\gamma h}=\chi_1\leqslant\dim V_\gamma\leqslant\chi$。且设 $\{\boldsymbol{u}_{(i)h}\}$ 和 $\{\bar{\boldsymbol{u}}_{(i)h}\}$ 是 $\{u_{(i)}\}$ 和 $\{\bar{u}_{(i)}\}$ $(i=1,\cdots,\chi_1)$ 的近似特征向量，则满足正则化条件：

$$\begin{cases}\langle\boldsymbol{u}_{(i)h},\bar{\boldsymbol{u}}_{(j)h}\rangle=\delta_{ij},\qquad i,j=1,\cdots,\chi_1,\\ \langle\boldsymbol{u}_{(i)h},\bar{\boldsymbol{u}}_{(i)}\rangle=1,\qquad i=1,\cdots,\chi_1.\end{cases} \tag{22}$$

定理 3 在推论 1 的前提假设下，有

$$|\gamma_h-\gamma|=O(\|L(L-\boldsymbol{L}_h)\|),\quad \|u_{(i)}-\boldsymbol{u}_{(i)h}\|=O(\|L(L-\boldsymbol{L}_h)\|). \tag{23}$$

推论 2[13] 设 $\{\gamma_h,\boldsymbol{u}_{(i)h}\}$ 是方程(18)的特征值和特征向量，且 $u_{(i)}$，$\bar{u}_{(i)}\in C^{(2)}[0,2\pi]$ $(i=1,\cdots,\chi_1)$，则

$$|\gamma_h - \gamma| = O(h^2), \ \|u_{(i)} - \boldsymbol{u}_{(i)h}\| = O(h^2), \ \|\bar{u}_{(i)} - \bar{\boldsymbol{u}}_{(i)h}\| = O(h^2). \tag{24}$$

3 误差的渐近展开和 Richardson 外推

定理 4 在推论 2 的前提假设下,若 $\{\gamma, u_{(i)}\}$ 和 $\{\boldsymbol{\gamma}_h, \boldsymbol{u}_{(i)h}\}$ 分别是方程(15)、(16) 的特征解,则存在常数 d_1 和与 h 无关的向量函数 $w_i \in C^{(3)}[0,2\pi]$ $(i = 1,\cdots,\chi_1)$, 使得

$$\gamma_h - \gamma = d_1 h^3 + o(h^3), \ \boldsymbol{u}_{(i)h} - u_{(i)} = w_i h^3 + o(h^3). \tag{25}$$

证明 由定理 2 得

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}_h(u_{(i)} + w_i h^3) - (\gamma + d_1 h^3)(u_{(i)} + w_i h^3) = \\ &\quad (\boldsymbol{L}_h - L)u_{(i)} + h^3(\boldsymbol{L}_h w_i - d_1 u_{(i)} - \gamma w_i) - d_1 w_i h^6 = \\ &\quad h^3(\boldsymbol{L}_h w_i - d_1 u_{(i)} - \gamma w_i + \psi) + o(h^3). \end{aligned} \tag{26}$$

选取常数 d_1 和函数 w_i 满足算子方程:

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}_h w_i - \gamma w_i = d_1 u_{(i)} - \psi, \\ \langle d_1 u_{(i)} - \psi, \phi \rangle = 0, \qquad \forall \phi \in \bar{V}_\gamma^\perp. \end{cases} \tag{27}$$

在此条件下,方程(27)有唯一解 w_i. 取 $\phi = \bar{u}_{(i)}$,得 $d_1 = \langle \psi, \bar{u}_{(i)} \rangle$.

因此,方程(26)转化为

$$\boldsymbol{L}_h(u_{(i)} + w_i h^3) - (\gamma + d_1 h^3)(u_{(i)} + w_i h^3) = o(h^3). \tag{28}$$

由于 $\{\boldsymbol{\gamma}_h, \boldsymbol{u}_{(i)h}\}$ 满足

$$\boldsymbol{L}_h \boldsymbol{u}_{(i)h} - \gamma_h \boldsymbol{u}_{(i)h} = 0, \tag{29}$$

由方程(28)、(29),得

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}_h(\boldsymbol{u}_{(i)h} - u_{(i)} - w_i h^3) - \gamma_h(\boldsymbol{u}_{(i)h} - u_{(i)} - w_i h^3) - \\ &\quad (\gamma_h - \gamma - d_1 h^3)(u_{(i)} + w_i h^3) = o(h^3). \end{aligned} \tag{30}$$

由推论 2 得

$$\begin{aligned} &\langle u_{(i)}, \bar{\boldsymbol{u}}_{(i)h} \rangle = \langle u_{(i)}, \bar{u}_{(i)} \rangle + \langle u_{(i)}, \bar{\boldsymbol{u}}_{(i)h} - \bar{u}_{(i)} \rangle = \\ &\quad 1 + \langle u_{(i)} - \boldsymbol{u}_{(i)h}, \bar{\boldsymbol{u}}_{(i)h} - \bar{u}_{(i)} \rangle = 1 + o(h^3). \end{aligned} \tag{31}$$

在方程(30)的两边用 $\bar{\boldsymbol{u}}_{(i)h}$ 作内积,并利用等式(22)得

$$\gamma_h - \gamma - d_1 h^3 = o(h^3). \tag{32}$$

把方程(32)代入方程(30)得

$$(\boldsymbol{L}_h - \gamma_h \boldsymbol{I})(\boldsymbol{u}_{(i)h} - u_{(i)} - w_i h^3) = o(h^3). \tag{33}$$

显然,在下面的不变子空间的限制下

$$V_{\gamma_h}^\perp = \{ \boldsymbol{v} : \langle \boldsymbol{v}, \bar{\boldsymbol{u}}_{(i)h} \rangle = 0, \ i = 1,\cdots,\chi_1 \},$$

算子 $(\boldsymbol{L}_h - \gamma_h \boldsymbol{I})$ 是可逆的且$(\boldsymbol{L}_h - \gamma_h \boldsymbol{I})^{-1}$ 是一致有界的. 一般地,$\boldsymbol{u}_{(i)h} - u_{(i)} - w_i h^3 = g \notin V_{\gamma_h}^\perp$, 但 $g - P^h g \in V_{\gamma_h}^\perp$, 其中

$$P^h g = \sum_{i=1}^{\chi_1} \langle g, \bar{\boldsymbol{u}}_{(i)h} \rangle \boldsymbol{u}_{(i)h} \tag{34}$$

是 g 在 $V_{\gamma(l)}$ 中的投影. 根据方程(31),我们得到误差估计

$$\begin{aligned} &|\langle g, \bar{\boldsymbol{u}}_{(i)h} \rangle| = |\langle g, \bar{\boldsymbol{u}}_{(i)h} - \bar{u}_{(i)} \rangle| \leqslant \\ &\quad |\langle \boldsymbol{u}_{(i)h} - u_{(i)}, \bar{\boldsymbol{u}}_{(i)h} - \bar{u}_{(i)} \rangle| + |\langle w_i, \bar{\boldsymbol{u}}_{(i)h} - \bar{u}_{(i)} \rangle| h^3 = o(h^3), \end{aligned}$$

因此可得 $\|P^h g\| = o(h^3)$. 然而,由方程(33)得

$$o(h^3)=\|(\boldsymbol{L}_h-\gamma_h\boldsymbol{I})g\|\geqslant\|(\boldsymbol{L}_h-\gamma_h\boldsymbol{I})(g-P^hg)\|-o(h^3)\geqslant a\|g-P^hg\|-o(h^3).$$

即 $\|g-P^hg\|=o(h^3)$. 故我们有 $g=\boldsymbol{u}_{(i)h}-u_{(i)}-w_ih^3=o(h^3)$, 此即为定理4 的证明. □

推论3 在定理4 的前提下,存在常数 d_1,d_2 和与 h 无关的向量函数 $w_{i1},w_{i2}\in C^{(5)}[0,2\pi](i=1,\cdots,\chi_1)$ 使

$$\gamma_h-\gamma=d_1h^3+d_2h^5+o(h^5),\ \boldsymbol{u}_{(i)h}-u_{(i)}=w_{i1}h^3+w_{i2}h^5+o(h^5).\tag{35}$$

3.1 外推算子

设 $(\gamma_h,\boldsymbol{u}_h)$ 和 $(\gamma_{h/2},\boldsymbol{u}_{h/2})$ 是关于网格宽度 h 和 $h/2$ 的特征解. 根据推论3 得到特征解的 h^3-Richardson 外推[14]:

$$\tilde{\gamma}_h=(8\gamma_{h/2}-\gamma_h)/7\tag{36}$$

和

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{(i)h}(s_j)=(8\boldsymbol{u}_{(i)h/2}(s_j)-\boldsymbol{u}_{(i)h}(s_j))/7,\qquad s_j=jh,\ j=0,\cdots,n-1,\tag{37}$$

误差分别为 $|\tilde{\gamma}_h-\gamma|=O(h^5)$ 和 $\|\tilde{\boldsymbol{u}}_{(i)h}(s_j)-u_{(i)}(s_j)\|=O(h^5)$.

由方程(2)和推论3,可得位势和张力的误差估计:

$$\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{y})=O(h^3),\boldsymbol{t}_h(\boldsymbol{y})-t(\boldsymbol{y})=O(h^3),\qquad \boldsymbol{y}\in\bar{\Omega}.\tag{38}$$

再由 h^3-Richardson 外推得到在 $\bar{\Omega}$ 内,位势$\boldsymbol{u}_h$ 和张力 $\boldsymbol{t}_h$ 的计算:

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_h(\boldsymbol{y})=(8\boldsymbol{u}_{h/2}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{y}))/7,\ \tilde{\boldsymbol{t}}_h(\boldsymbol{y})=(8\boldsymbol{t}_{h/2}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{t}_h(\boldsymbol{y}))/7,\qquad \boldsymbol{y}\in\bar{\Omega}.\tag{39}$$

误差分别为 $\|\tilde{\boldsymbol{u}}_h-u\|=O(h^5)$ 和 $\|\tilde{\boldsymbol{t}}_h-t\|=O(h^5)$.

3.2 后验误差估计

此外,由误差渐近展开式(35),可得特征值和特征向量的后验误差估计:

$$|\gamma_{h/2}-\gamma|\leqslant\left|\frac{8}{7}\gamma_{h/2}-\frac{1}{7}\gamma_h-\gamma\right|+\frac{1}{7}|\gamma_{h/2}-\gamma_h|\leqslant\frac{1}{7}|\gamma_{h/2}-\gamma_h|+O(h^5)$$

和

$$\|\boldsymbol{u}_{(i)h/2}(s_j)-u_{(i)}(s_j)\|\leqslant\left\|\frac{8}{7}\boldsymbol{u}_{(i)h/2}(s_j)-\frac{1}{7}\boldsymbol{u}_{(i)h}(s_j)-u_{(i)}(s_j)\right\|+\frac{1}{7}\|\boldsymbol{u}_{(i)h/2}(s_j)-\boldsymbol{u}_{(i)h}(s_j)\|\leqslant\frac{1}{7}\|\boldsymbol{u}_{(i)h/2}(s_j)-\boldsymbol{u}_{(i)h}(s_j)\|+O(h^5),\tag{40}$$

它们可用来构造自适应算子.

4 数值例子

设网格宽度为 $h=2\pi/n(n\in\mathbf{N})$ 以及节点为 $s_j=jh(j=0,1,\cdots,n-1)$. 记号 $e_i^h=|\lambda_{(i)h}-\lambda_{(i)}|$, $r_i^h=e_i^h/e_i^{h/2}$, $\tilde{e}_i^h=|\tilde{\lambda}_{(i)h}-\lambda_{(i)}|$表示外推后误差,$p_i^h=(1/7)|\lambda_{(i)h/2}-\lambda_{(i)h}|$表示后验误差.

例1 考虑平面上半径为 a 的各向同性圆周面,Hadjesfandiari 等[3]给出了此问题特征值的解析解:

$$\lambda_{(i)}=i/a,\qquad i=1,2,\cdots.\tag{41}$$

设其半径为 $a=1$, 在表1 中,我们由方程(14)计算特征解并列出了相关误差.

从表1 可以看到误差间的关系 $e_i^h(\theta)/e_i^{h/2}(\theta)\approx2^3$,$\tilde{e}_i^h(\theta)/\tilde{e}_i^{h/2}(\theta)\approx2^5$,此结果和定理4 完全一致且经过外推后特征值$\lambda_h$ 的收敛速度为 $O(h^5)$. 同时从数值上表明了该方法的正确性. 此外,

由于 $\tilde{e}_i^h/\tilde{e}_i^{h/2} \approx 2^5$ 我们可以利用进一步的外推得到更高的精度.

表 1 误差 $e_i^h,\tilde{e}_i^h$ 和后验误差估计 $p_i^h(i=1,2,3)$

n	16	32	64	128
e_1^h	5.89E-04	7.34E-05	9.17E-06	1.15E-06
$\tilde{e}_1^h$		1.70E-07	5.96E-09	1.96E-10
p_1^h		7.36E-05	9.18E-06	1.15E-06
e_2^h	9.47E-03	1.18E-03	1.47E-04	1.83E-05
$\tilde{e}_2^h$		8.17E-06	3.39E-07	1.19E-08
p_2^h		1.19E-03	1.47E-04	1.84E-05
e_3^h	4.82E-02	5.98E-03	7.44E-04	9.29E-05
$\tilde{e}_3^h$		6.23E-05	3.39E-06	1.28E-07
p_3^h		6.04E-03	7.47E-04	9.30E-05

下面,我们利用特征解计算位势 u 在边界 Γ 上的值,说明本文方法的有效性.得到特征解后,我们考虑 Neumann 边界条件:$t=2\cos(3\theta)+2\cos(2\theta)\cos\theta(\theta\in[0,2\pi])$ 的微分方程,以此计算边界 Γ 上的位势.在表 2 中列出了由公式(2) 所计算出的在边界上位势 $\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{y})$ 的误差,其中 $e_v^h(\theta)=|\boldsymbol{u}_h(\theta)-u(\theta)|$,$\tilde{e}_v^h(\theta)=|\tilde{\boldsymbol{u}}_h(\theta)-u(\theta)|$外推后误差,以及 $p_v^h(\theta)$ 是后验误差.

表 2 $\boldsymbol{u}_h$ 在边界 Γ 上的误差 ($\theta_1=0,\theta_2=\pi/8$)

n	16	32	64	128
$e_v^h(\theta_1)$	1.69E-2	2.07E-3	2.57E-4	3.21E-5
$\tilde{e}_v^h(\theta_1)$		5.40E-5	1.63E-6	5.06E-8
$p_v^h(\theta_1)$		2.12E-3	2.59E-4	3.22E-5
$e_v^h(\theta_2)$	6.80E-3	8.32E-4	1.03E-4	1.29E-5
$\tilde{e}_v^h(\theta_2)$		2.08E-5	6.29E-7	1.95E-8
$p_v^h(\theta_2)$		8.52E-4	1.04E-4	1.29E-5

由表 2,得到误差间关系为 $e_v^h(\theta_i)/e_v^{h/2}(\theta_i)\approx 2^3$,$\tilde{e}_v^h(\theta_i)/\tilde{e}_v^{h/2}(\theta_i)\approx 2^5$ 此结果和方程(39)是一致的且表明经过外推后,位势 $\boldsymbol{u}_h$ 的误差为 $O(h^5)$.

得到特征解后,还可以用来计算一类线性的 Neumann 边界条件的方程,边界为 $t=1/2u+2\cos(3\theta)+2\cos(2\theta)\cos\theta(\theta\in[0,2\pi])$.在表3 中列出了根据公式(2) 计算出的在边界 Γ 上的位势 $\boldsymbol{u}_h$, 其中,我们利用与表 2 相同的记号.

表 3 $\boldsymbol{u}_h$ 在边界 Γ 上的误差 ($\theta_1=0,\theta_2=\pi/8$)

n	16	32	64	128
$e_v^h(\theta_1)$	2.60E-2	3.17E-3	3.94E-4	4.92E-5
$\tilde{e}_v^h(\theta_1)$		8.82E-5	2.52E-6	7.57E-8
$p_v^h(\theta_1)$		3.26E-3	3.96E-4	4.93E-5
$e_v^h(\theta_2)$	1.12E-2	1.37E-3	1.71E-4	2.13E-5
$\tilde{e}_v^h(\theta_2)$		3.43E-5	9.78E-7	2.94E-8
$p_v^h(\theta_2)$		1.41E-3	1.72E-4	2.13E-5

由表 3,可见 $e_v^h(\theta_i)/e_v^{h/2}(\theta_i)\approx 2^3$,$\tilde{e}_v^h(\theta_i)/\tilde{e}_v^{h/2}(\theta_i)\approx 2^5$.

既然在边界 Γ 上的所以值都已计算,我们可以根据公式(6)得到区域上任意点的位势值.

例 2 考虑长短轴分别为 $a=3,b=2$ 的椭圆面 $x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant 1$.由方程(14)计算出边界数值特征解并在表 4 中列出其近似值.此处我们用与例 1 相同的记号.

表 4 误差 e_i^h，$\tilde{e}_i^h$ 和后验误差估计 $p_i^h (i = 1,2,3)$

n	16	32	64	128
e_1^h	1.67E-04	2.08E-05	2.59E-06	3.24E-07
$\tilde{e}_1^h$		1.28E-07	4.10E-09	1.27E-10
p_1^h		2.09E-05	2.60E-06	3.24E-07
e_2^h	4.93E-04	6.11E-05	7.62E-06	9.52E-07
$\tilde{e}_2^h$		5.74E-07	1.58E-08	4.70E-10
p_2^h		6.16E-05	7.64E-06	9.53E-07
e_3^h	3.83E-03	4.73E-04	5.89E-05	7.35E-06
$\tilde{e}_3^h$		7.00E-06	2.22E-07	7.09E-09
p_3^h		4.80E-04	5.91E-05	7.36E-06

由表 4，我们看到其数值关系 $e_i^h(\theta)/e_i^{h/2}(\theta) \approx 2^3$，$\tilde{e}_i^h(\theta)/\tilde{e}_i^{h/2}(\theta) \approx 2^5$，可以发现，特征值 λ_h 的收敛速度为 $O(h^3)$，以及外推后收敛速度为 $O(h^5)$，其结果和定理 4 一致.

此外，类似例 1，我们可以用特征解计算相关的 Neumann 问题、Dirichlet 问题等.

5 结 论

对于边值问题的数值解，基本边界特征解理论给出了一个新的视角且机械求积法的谱分析应用第一次提出. 我们可得如下结论：

数值结果表明机械求积法不仅具有高精度，而且可以利用 h^3-Richardson 外推得到更高的精度. 由于离散矩阵是满阵，当计算量越大时，该方法就越有效.

本文仅讨论了在光滑边界上的机械求积法和外推，希望把此方法可以进一步推广到一般的奇性边界问题，例如凹曲线、裂缝、双组合材料等等.

参考文献：

[1] Courant R, Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*[M]. New York: John Wiley and Sons, 1953.

[2] Lanczos C. *Discourse on Fourier Series*[M]. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1966.

[3] Hadjesfandiari A R, Dargush G F. Theory of boundary eigensolutions in engineering mechanics[J]. *J Appl Mech*, 2001, **68**(1): 101-108.

[4] Banerjee P K. *The Boundary Element Methods in Engineering*[M]. London: McGraw-Hill, 1994.

[5] Li Z C. Combinations of method of fundamental solutions for Laplace's equation with singularities[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2008, **32**(10): 856-869.

[6] Amini S. Nixon S P. Preconditioned multiwavelet Galerkin boundary element solution of Laplace's equation[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2006, **30**(7): 523-530.

[7] 吕涛, 黄晋. 第二类弱奇异积分方程的高精度 Nyström 方法与外推[J]. 计算物理, 1997, **14**(3): 349-355.

[8] Liu C S. A modified collocation Trefftz method for the inverse Cauchy problem of Laplace equation[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2008, **32**(9): 778-785.

[9] Sidi A, Israrli M. Quadrature methods for periodic singular and weakly singular Fredholm integral equations[J]. *J Sci Comput*, 1988, **3**(2): 201-231.

[10] Huang J, Wang Z. Extrapolation algorithm for solving mixed boundary integral equations of the Helmholtz equation by mechanical quadrature methods[J]. *SIAM J Sci Comput*, 2009, **31**(6): 4115-4129.

[11] Sloan I H, Spence A. The Galerkin method for integral equations of the first kind with logarithmic kernel: theorem[J]. *IMA J Numer Anal*, 1988, **8**(1): 105-122.

[12] Anselone P M. *Collectively Compact Operator Approximation Theory*[M]. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1971.

[13] Chatelin F. *Spectral Approximation of Linear Operator*[M]. Academic Press, 1983.

[14] Lin C B, Lü T, Shih T M. *The Splitting Extrapolation Method*[M]. Singapore: World Scientific, 1995.

High Accuracy Eigensolution and Its Extrapolation for Potential Equations

CHENG Pan[1,2], HUANG Jin[1], ZENG Guang[1]

(1. *School of Mathematical Science*, *University of Electronic Science & Technology of China*, *Chengdu* 611731, *P. R. China*;

2. *School of Science*, *Chongqing Jiaotong University*, *Chongqing* 400074, *P. R. China*)

Abstract: By the potential theorem, fundamental boundary eigenproblems were converted into boundary integral equations(BIE) with logarithmic singularity. Mechanical quadrature methods (MQMs) were presented to obtain eigensolutions which were used to solve Laplace's equations. And the MQMs possess high accuracies and low computing complexities. The convergence and stability were proved based on Anselone's collective compact and asymptotical compact theory. Furthermore, an asymptotic expansion with odd powers of the errors is presented. Using h^3-Richardson extrapolation algorithm(EA), the accuracy order of the approximation can be greatly improved, and a posterior error estimate can be obtained as the self-adaptive algorithms. The efficiency of the algorithm is illustrated by examples.

Key words: potential equation; mechanical quadrature methods; Richardson extrapolation; posteriori error estimate