

平面弹性方程的非协调有限元分析*

杨永琴¹, 肖留超², 陈绍春¹

(1. 郑州大学 数学系, 郑州 450001;

2. 河南工业大学 理学院, 郑州 450001)

(傅衣铭推荐)

摘要: 针对纯位移平面弹性问题,构造了两个无闭锁非协调有限元,单元对于 Lamé 常数 λ 一致收敛,证明了能量模和 L^2 模误差分别为 $O(h^2)$ 和 $O(h^3)$. 最后给出了数值试验验证了理论分析的正确性.

关键词: 平面弹性; 无闭锁; 非协调有限元

中图分类号: O242.21 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.12.006

引 言

对于均匀介质、各向同性的平面弹性问题,当 Lamé 常数 $\lambda \rightarrow \infty$ 时,即对于几乎不可压材料,通常的低阶协调有限元格式的解往往不收敛于真解或达不到最优收敛,这就是所谓的 Locking 现象^[1-3]. 原因在于,离散散度空间的核太小,或标准有限元估计中的系数依赖于 Lamé 常数 λ ,当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时系数趋于 ∞ .

为了克服 Locking,已经提出了一些有效的有限元方法. 其中最直接的方法是采用高阶单元^[4],由此提出了 p -型和 hp -型方法(见文献[5-6]). 第2种方法是基于 Hellinger-Reissner 变分原理的混合有限元方法^[1-2,7]. 该方法通过选择合适的有限元空间,同时逼近应力和速度,得到关于 λ 的一致收敛结果. 混合元的难点在于应力张量要求满足对称性,在文献[8-9]中已经提出了一些解决方法.

第3种方法是非协调有限元法^[10-13]. 不借助于混合元分析方法,采用非协调有限元方法,可以保持标准的变分形式,并且最终求解的线性方程组是正定的,这给实际计算带来方便. 在文献[10]中给出了 P_1 非协调三角形元^[14]对于纯位移平面弹性的逼近分析,并得到了能量模误差的 $O(h)$ 估计结果. 其他的非协调有限元分析见文献[13,15-16].

本文主要讨论纯位移平面弹性问题. 我们构造了一个非协调矩形元和一个三角形单元,证明了这两个单元关于 λ 有一致最优收敛阶. 由于单元形函数空间包含完整的二次多项式,且单元在边上具有某种弱连续性,其能量模和 L^2 模误差分别为 $O(h^2)$ 和 $O(h^3)$,比文献[10,15]中

* 收稿日期: 2010-01-21; 修订日期: 2010-09-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771198;11071226);河南省国际科技合作项目

作者简介: 杨永琴(1978—),女,河南焦作人,讲师,博士(联系人. E-mail: yangyongqin@zzu.edu.cn).

的结果高一阶.最后给出了数值试验验证了理论分析的可靠性.

各向同性且均匀介质的纯位移平面弹性问题为

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{u} - (\mu + \lambda) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{f}, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (1)$$

相应的变分问题为

$$\begin{cases} \text{求 } \mathbf{u} \in V \text{ 使得} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $V = (H_0^1(\Omega))^2$, $(\mathbf{f}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx dy$,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} [\mu \operatorname{grad} \mathbf{u} : \operatorname{grad} \mathbf{v} + (\mu + \lambda) (\operatorname{div} \mathbf{u}) (\operatorname{div} \mathbf{v})] dx dy,$$

$\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, $0 < \mu_1 < \mu_2$, $\lambda \in (0, \infty)$ 是 Lamé 常数, $\Omega \subset R^2$ 为矩形区域. 因为双线性型 $a(\cdot, \cdot)$ 是 V-椭圆的, 所以问题(2)有唯一解^[11].

本文中, 我们采用和文献[11]相同的记号. 为了简便, 记 C 为广义的常数, 不同地方可以取不同的值. $P_k(\Omega)$ 为 Ω 上次数不超过 k 的多项式空间, $Q_{kj}(\Omega)$ 表示 Ω 上第 1、第 2 个分量分别不超过 k 次和 j 次的多项式空间.

1 非协调矩形元

设 (ξ, η) 平面上的正方形参考元为 \hat{T} , 其顶点和边分别为 $\hat{A}_1(-1, -1), \hat{A}_2(1, -1), \hat{A}_3(1, 1), \hat{A}_4(-1, 1), \hat{e}_i = \hat{A}_i \hat{A}_{i+1} (i = 1, 2, 3, 4, \text{mod}(4))$. 设

$$\begin{aligned} W_1(\hat{T}) &= (Q_{32}(\hat{T}) / \{\xi \eta^2, \xi^2 \eta\}) \oplus \{\eta^3\}, \\ W_2(\hat{T}) &= (Q_{23}(\hat{T}) / \{\eta^3, \xi \eta^2\}) \oplus \{\xi^3\}. \end{aligned}$$

定义有限元 $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ 如下:

形函数空间为

$$\hat{P} = \{\hat{\mathbf{p}} : \hat{\mathbf{p}} \in W_1(\hat{T}) \times W_2(\hat{T}), \operatorname{div} \hat{\mathbf{p}} \in P_1(\hat{T})\}. \quad (3)$$

记 $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2)^T$, 自由度为

$$\hat{\Sigma} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{|\hat{e}_i|} \int_{\hat{e}_i} \hat{v}_j d\hat{s}, \quad i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2; \right. \\ \left. \frac{1}{|\hat{e}_i|} \int_{\hat{e}_i} \hat{v}_j \xi d\hat{s}, \quad i = 1, 3; j = 1, 2; \right. \\ \left. \frac{1}{|\hat{e}_i|} \int_{\hat{e}_i} \hat{v}_j \eta d\hat{s}, \quad i = 2, 4; j = 1, 2; \right. \\ \left. \frac{1}{|\hat{T}|} \int_{\hat{T}} \xi \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} d\xi d\eta, \right. \\ \left. \frac{1}{|\hat{T}|} \int_{\hat{T}} \eta \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} d\xi d\eta. \right. \end{cases} \quad (4)$$

显然单元形函数空间 \hat{P} 的维数和自由度个数都为 18. 经过简单计算可得, 该有限元是适定的, 且 $\forall \hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2)^T \in \hat{P}$ 可以表示为

$$\hat{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{|\hat{e}_i|} \int_{\hat{e}_i} \hat{p}_1 d\hat{s} \hat{\mathbf{q}}_{1,i} + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{|\hat{e}_i|} \int_{\hat{e}_i} \hat{p}_2 d\hat{s} \hat{\mathbf{q}}_{2,i} +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1,3} \frac{1}{|\hat{e}_i|} \int_{\hat{e}_i} \hat{p}_1 \xi d\hat{s} \hat{q}_{1,i+4} + \sum_{i=2,4} \frac{1}{|\hat{e}_i|} \int_{\hat{e}_i} \hat{p}_1 \eta d\hat{s} \hat{q}_{1,i+4} + \\
& \sum_{i=1,3} \frac{1}{|\hat{e}_i|} \int_{\hat{e}_i} \hat{p}_2 \xi d\hat{s} \hat{q}_{2,i+4} + \sum_{i=2,4} \frac{1}{|\hat{e}_i|} \int_{\hat{e}_i} \hat{p}_2 \eta d\hat{s} \hat{q}_{2,i+4} + \\
& \frac{1}{|\hat{T}|} \int_{\hat{T}} \xi \operatorname{div} \hat{p} d\xi d\eta \hat{\phi}_1 + \frac{1}{|\hat{T}|} \int_{\hat{T}} \eta \operatorname{div} \hat{p} d\xi d\eta \hat{\phi}_2, \tag{5}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\hat{q}_{1,1} &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\eta + \frac{3}{4}\eta^2 - \frac{5}{4}\eta^3, 0 \right)^T, \\
\hat{q}_{1,2} &= \left(\frac{3}{4} + \frac{13}{16}\xi - \frac{3}{4}\eta^2 + \frac{5}{24}\xi^3 - \frac{25}{16}\xi^3\eta^2, -\frac{5}{16}\eta - \frac{5}{8}\xi^2\eta + \frac{25}{16}\xi^2\eta^3 \right)^T, \\
\hat{q}_{1,3} &= \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\eta + \frac{3}{4}\eta^2 + \frac{5}{4}\eta^3, 0 \right)^T, \\
\hat{q}_{1,4} &= \left(\frac{3}{4} - \frac{13}{16}\xi - \frac{3}{4}\eta^2 - \frac{5}{24}\xi^3 + \frac{25}{16}\xi^3\eta^2, \frac{5}{16}\eta + \frac{5}{8}\xi^2\eta - \frac{25}{16}\xi^2\eta^3 \right)^T, \\
\hat{q}_{1,5} &= \left(\frac{15}{16}\xi - \frac{15}{4}\xi\eta - \frac{5}{8}\xi^3 + \frac{15}{4}\xi^3\eta + \frac{75}{16}\xi^3\eta^2, \right. \\
& \quad \left. -\frac{5}{8} + \frac{15}{16}\eta + \frac{15}{8}\xi^2 + \frac{15}{8}\eta^2 + \frac{15}{8}\xi^2\eta - \frac{45}{8}\xi^2\eta^2 - \frac{75}{16}\xi^2\eta^3 \right)^T, \\
\hat{q}_{1,6} &= \left(\frac{15}{4}\eta - \frac{9}{4}\xi\eta - \frac{15}{4}\eta^3 + \frac{15}{4}\xi^3\eta, \frac{3}{8} + \frac{9}{8}\xi^2 + \frac{9}{8}\eta^2 - \frac{45}{8}\xi^2\eta^2 \right)^T, \\
\hat{q}_{1,7} &= \left(\frac{15}{16}\xi + \frac{15}{4}\xi\eta - \frac{5}{8}\xi^3 - \frac{15}{4}\xi^3\eta + \frac{75}{16}\xi^3\eta^2, \right. \\
& \quad \left. \frac{5}{8} + \frac{15}{16}\eta - \frac{15}{8}\xi^2 - \frac{15}{8}\eta^2 + \frac{15}{8}\xi^2\eta + \frac{45}{8}\xi^2\eta^2 - \frac{75}{16}\xi^2\eta^3 \right)^T, \\
\hat{q}_{1,8} &= \left(\frac{15}{4}\eta + \frac{9}{4}\xi\eta - \frac{15}{4}\eta^3 - \frac{15}{4}\xi^3\eta, -\frac{3}{8} - \frac{9}{8}\xi^2 - \frac{9}{8}\eta^2 + \frac{45}{8}\xi^2\eta^2 \right)^T, \\
\hat{q}_{2,1} &= \left(\frac{5}{16}\xi - \frac{5}{24}\xi^3 - \frac{5}{16}\xi^3\eta^2, \frac{3}{4} - \frac{13}{16}\eta - \frac{3}{4}\xi^2 + \frac{5}{8}\xi^2\eta + \frac{5}{16}\xi^2\eta^3 \right)^T, \\
\hat{q}_{2,2} &= \left(0, -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\xi + \frac{3}{4}\xi^2 + \frac{5}{4}\xi^3 \right)^T, \\
\hat{q}_{2,3} &= \left(-\frac{5}{16}\xi + \frac{5}{24}\xi^3 + \frac{5}{16}\xi^3\eta^2, \frac{3}{4} + \frac{13}{16}\eta - \frac{3}{4}\xi^2 - \frac{5}{8}\xi^2\eta - \frac{5}{16}\xi^2\eta^3 \right)^T, \\
\hat{q}_{2,4} &= \left(0, -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\xi + \frac{3}{4}\xi^2 - \frac{5}{4}\xi^3 \right)^T, \\
\hat{q}_{2,5} &= \left(-\frac{3}{8} - \frac{9}{8}\xi^2 - \frac{9}{8}\eta^2 + \frac{45}{8}\xi^2\eta^2, \frac{15}{4}\xi + \frac{9}{4}\xi\eta - \frac{15}{4}\xi^3 - \frac{15}{4}\xi\eta^3 \right)^T, \\
\hat{q}_{2,6} &= \left(\frac{5}{8} + \frac{15}{16}\xi - \frac{15}{8}\xi^2 - \frac{15}{8}\eta^2 - \frac{5}{8}\xi^3 + \frac{45}{8}\xi^2\eta^2 - \frac{15}{16}\xi^3\eta^2, \right. \\
& \quad \left. -\frac{15}{16}\eta + \frac{15}{4}\xi\eta + \frac{15}{8}\xi^2\eta - \frac{15}{4}\xi\eta^3 + \frac{15}{16}\xi^2\eta^3 \right)^T, \\
\hat{q}_{2,7} &= \left(\frac{3}{8} + \frac{9}{8}\xi^2 + \frac{9}{8}\eta^2 - \frac{45}{8}\xi^2\eta^2, \frac{15}{4}\xi - \frac{9}{4}\xi\eta - \frac{15}{4}\xi^3 + \frac{15}{4}\xi\eta^3 \right)^T,
\end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{q}}_{2.8} = \left(-\frac{5}{8} + \frac{15}{16}\xi + \frac{15}{8}\xi^2 + \frac{15}{8}\eta^2 - \frac{5}{8}\xi^3 - \frac{45}{8}\xi^2\eta^2 - \frac{15}{16}\xi^3\eta^2, \right. \\ \left. -\frac{15}{16}\eta - \frac{15}{4}\xi\eta + \frac{15}{8}\xi^2\eta + \frac{15}{4}\xi\eta^3 + \frac{15}{16}\xi^2\eta^3 \right)^T, \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 = \left(-2 + \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{3}{2}\eta^2, 0 \right)^T, \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}}_2 = \left(0, -2 + \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{3}{2}\eta^2 \right)^T.$$

设 \mathcal{T}_h 为 Ω 的拟一致矩形剖分, 对任一矩形 $T \in \mathcal{T}_h$, 其顶点和边分别记为 $A_1(x_0 - h_1, y_0 - h_2), A_2(x_0 + h_1, y_0 - h_2), A_3(x_0 + h_1, y_0 + h_2), A_4(x_0 - h_1, y_0 + h_2), e_i = A_i A_{i+1} (i = 1, 2, 3, 4)$. 记 $h_T = \max(h_1, h_2), h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$, 则仿射变换 $F_T: \hat{T} \rightarrow T$ 如下:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F_T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

在 Piola 变换下, 对任意 $\hat{\mathbf{v}} \in \hat{T}, \mathbf{v} \in T$ 定义如下:

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{v}} = (h_1\hat{v}_1 \circ F_T^{-1}, h_2\hat{v}_2 \circ F_T^{-1})^T. \tag{7}$$

那么一般单元 T 上的形函数空间定义为

$$P(T) = \{ \mathbf{p}: \mathbf{p} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{p}} \circ F_T^{-1}, \hat{\mathbf{p}} \in \hat{P} \}. \tag{8}$$

设 $\hat{\Pi}$ 和 Π_T 分别为定义在 \hat{P} 和 $P(T)$ 上的有限元插值算子, 由变换(7) 知, $\text{div} \mathbf{v} = \text{div} \hat{\mathbf{v}} \circ F_T^{-1}, \forall \mathbf{v} \in (H^1(T))^2$. 则有限元是仿射等价的, 即

$$\widehat{\Pi_T} \mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1} \Pi_T \mathbf{v} \circ F_T^{-1} = \hat{\Pi} \hat{\mathbf{v}}, \tag{9}$$

并且算子 Π_T 满足如下性质:

$$\frac{1}{|e|} \int_e p \mathbf{v} ds = \frac{1}{|e|} \int_e p \Pi_T \mathbf{v} ds, \quad p \in P_1(e), e \text{ 是 } T \text{ 的边}; \tag{10}$$

$$\frac{1}{|T|} \int_T p \text{div} \mathbf{v} dx dy = \frac{1}{|T|} \int_T p \text{div} \Pi_T \mathbf{v} dx dy, \quad p \in P_1(T). \tag{11}$$

设 Π_h 为整体有限元插值算子, 则定义非协调有限元空间为

$$V_h = \left\{ \mathbf{v}_h: \mathbf{v}_h|_T \in P(T), \int_e \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{q} ds = 0, \mathbf{q} \in (P_1(e))^2, e \subset \partial\Omega \right\}, \tag{12}$$

这里 $P(T)$ 由式(8) 给出. 显然, 对于任意 $\mathbf{v}_h \in V_h$ 有 $\int_e [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{q}] ds = 0, \forall \mathbf{q} \in (P_1(e))^2$, 其中 $[v]$ 表示 v 跨过边 e 的跳跃值.

2 非协调三角形元

本节中, 我们给出一个 14 自由度的无闭锁三角形单元.

设平面 (ξ, η) 上的三角形参考单元为 \hat{T} , 其顶点和边分别为 $\hat{A}_1(0, 0), \hat{A}_2(1, 0), \hat{A}_3(0, 1), \hat{e}_i = \hat{A}_{i+1}\hat{A}_{i+2} (i = 1, 2, 3, \text{mod}(3))$. 在 \hat{T} 上定义有限元 $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ 如下:

自由度为

$$\hat{\Sigma} = \left\{ \frac{1}{|\hat{e}_i|} \int_{\hat{e}_i} \hat{v} p d\hat{s}, \forall p \in P_1(\hat{e}_i), \frac{1}{|\hat{T}|} \int_{\hat{T}} q \text{div} \hat{\mathbf{v}} d\xi d\eta, \forall q \in P_1(\hat{T}) \right\}; \tag{13}$$

形函数空间为

$$\hat{P} = \{ \hat{\mathbf{v}}: \hat{\mathbf{v}} \in (P_3(\hat{T}))^2, \text{div} \hat{\mathbf{v}} \in P_1(\hat{T}), \text{rot} \hat{\mathbf{v}} \in P_1(\hat{T}) \}. \tag{14}$$

经过简单计算, 容易推导出上述有限元是适定的.

注1 针对自由度式(13), 我们可以选取不同的形函数空间, 显然式(13)中有14个自由度, 而式(14)中 $\dim(P_3(\hat{T}))^2 = 20$. 因此, 为了使形函数空间的维数与自由度个数相等, 必须添加6个约束条件. 由后面的误差估计知, 条件 $\operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} \in P_1(\hat{T})$ 是必需的, 它保证了有限元插值算子和散度算子之间有某种可交换性, 进而保证有限元是无闭锁的. 而条件 $\operatorname{rot} \hat{\mathbf{v}} \in P_1(\hat{T})$ 不是必要的, 我们也可以选取其他约束条件, 但必须保证有限元 $\hat{\Sigma}$ 是 \hat{P} 唯一可解的.

设 \mathcal{T}_h 为多边形区域 Ω 的拟一致三角形剖分, 对任一 $T \in \mathcal{T}_h$, 其顶点和边分别为 $A_i(x_i, y_i)$, $e_i = A_{i+1}A_{i+2}$ ($i = 1, 2, 3, \text{mod}(3)$). 记 $h_T = \max_{1 \leq i \leq 3} |e_i|$, $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$.

仿射变换 $F_T: \hat{T} \rightarrow T$ 定义如下:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} \triangleq \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

对 \hat{T} 上任意的向量函数 $\hat{\mathbf{v}}$ 采用 Piola 变换, 则 $\hat{\mathbf{v}}$ 在 T 上的对应向量为

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{v}} = ((b_{11}\hat{v}_1 + b_{12}\hat{v}_2) \circ F_T^{-1}, (b_{21}\hat{v}_1 + b_{22}\hat{v}_2) \circ F_T^{-1})^T. \quad (16)$$

一般单元 T 上的形函数空间定义为

$$P(T) = \{ \mathbf{v}; \mathbf{v} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{v}} \circ F_T^{-1}, \forall \hat{\mathbf{v}} \in \hat{P} \}. \quad (17)$$

设 $\hat{\Pi}$ 和 Π_T 分别为 \hat{P} 和 $P(T)$ 上的插值算子, 同样地该单元是仿射等价的, 即

$$\widehat{\Pi}_T \mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1} \Pi_T \mathbf{v} \circ F_T^{-1} = \hat{\Pi} \hat{\mathbf{v}},$$

并且满足类似于式(10)和(11)的性质.

对任意 $\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2$, 令 $\Pi_h \mathbf{v}|_T = \Pi_T \mathbf{v}$. 定义有限元空间 V_h 如下:

$$V_h = \left\{ \mathbf{v}_h; \mathbf{v}_h|_T \in P(T), \int_e \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{q} ds = 0, \mathbf{q} \in (P_1(e))^2, e \subset \partial\Omega \right\}, \quad (18)$$

其中 $P(T)$ 由式(17)确定. 与第1节中矩形元的性质类似,

$$\int_e [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{q}] ds = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \mathbf{q} \in (P_1(e))^2.$$

该性质保证了相容误差项有二阶收敛结果.

3 误差分析

令

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_T \int_T [\mu \operatorname{grad} \mathbf{u}_h : \operatorname{grad} \mathbf{v}_h + (\mu + \lambda)(\operatorname{div} \mathbf{u}_h)(\operatorname{div} \mathbf{v}_h)] dx dy$$

为空间 V_h 上的双线性形, 则问题(2)的逼近形式为

$$\begin{cases} \text{求 } \mathbf{u}_h \in V_h \text{ 满足} \\ a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \end{cases} \quad (19)$$

显然, $\|\mathbf{v}_h\|_h = a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)^{1/2}$ 是 V_h 上的模, 因此, 逼近问题(19)有唯一解^[11].

由于算子 $\hat{\Pi}$ 对空间 $(P_2(T))^2$ 中的多项式精确成立, 可以得到下面的插值误差估计.

引理1 存在与 h_T 和 T 无关的正常数 C 使得

$$\|\mathbf{v} - \Pi_T \mathbf{v}\|_{0,T} + h_T \|\mathbf{v} - \Pi_T \mathbf{v}\|_{1,T} \leq Ch_T^3 \|\mathbf{v}\|_{3,T}, \quad \forall \mathbf{v} \in (H^3(T))^2. \quad (20)$$

令 γ_T 表示 $L^2(T)$ 到 $P_1(T)$ 上的 L^2 投影算子, 根据式(10)和(11)、插值理论和仿射等价技巧^[17], 我们有如下结果.

引理2 存在与 h_T 和 T 无关的正常数 C 使得

$$\operatorname{div} \Pi_T \mathbf{v} = \gamma_T \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in (H^1(T))^2, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (21)$$

$$\|w - \gamma_T w\|_{L^2(T)} \leq Ch_T^2 |w|_{2,T}, \quad \forall w \in H^2(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (22)$$

定理 1 设 $\mathbf{u} \in (H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ 和 $\mathbf{u}_h \in V_h$ 分别为问题(2) 和(19) 的解, 则存在与 h 无关的正常数 C 使得

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h \leq Ch^2(|\mathbf{u}|_{3,\Omega} + \lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{2,\Omega}). \quad (23)$$

证明 由第二 Strang 引理^[17], 我们有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h \leq C \left\{ \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_h + \sup_{0 \neq \mathbf{w}_h \in V_h} \frac{|a_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - (\mathbf{f}, \mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_h} \right\}. \quad (24)$$

利用引理 1 和 2, 可得到逼近误差估计结果:

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_h &\leq \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_h = \\ &\left(\mu \sum_T |\mathbf{u} - \Pi_T \mathbf{u}|_{1,T}^2 + (\mu + \lambda) \sum_T \|\operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div} \Pi_T \mathbf{u}\|_{0,T}^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\left(Ch^4 \sum_T |\mathbf{u}|_{3,T}^2 + (\mu + \lambda) \sum_T \|\operatorname{div} \mathbf{u} - \gamma_T \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,T}^2 \right)^{1/2} \leq \\ &Ch^2(|\mathbf{u}|_{3,\Omega} + \lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{2,\Omega}). \end{aligned} \quad (25)$$

下面给出相容误差估计. 由 Green 公式有

$$\begin{aligned} E_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) &= a_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - (\mathbf{f}, \mathbf{w}_h) = \\ &\mu \sum_T \int_{\partial T} \partial_\nu \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_h \, ds + (\mu + \lambda) \sum_T \int_{\partial T} \mathbf{w}_h \cdot \boldsymbol{\nu} \operatorname{div} \mathbf{u} \, ds, \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $\boldsymbol{\nu}$ 是边 ∂T 的单位外法向量.

令

$$P_0^e(w) = \frac{1}{|e|} \int_e w \, ds.$$

对区域 Ω 的矩形(三角形) 剖分 \mathcal{T}_h , 设 $I_h(w)$ 为 $w \in H^2(\Omega)$ 定义在单元上的分片双线性(线性) 插值, 显然 $I_h(w) \in C^0(\Omega)$. 记 $\mathbf{U} = \partial_\nu \mathbf{u}$. 由式(10)、迹定理和插值理论^[17] 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_T \int_{\partial T} \partial_\nu \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, ds \right| &= \\ \left| \sum_T \sum_{e \subset \partial T} \int_e (\mathbf{U} - I_h(\mathbf{U})) \cdot (\mathbf{w}_h - P_0^e(\mathbf{w}_h)) \, ds \right| &\leq \\ C \sum_T \sum_{e \subset \partial T} h_T \|\mathbf{B}\hat{\mathbf{U}} - \hat{I}_h(\mathbf{B}\hat{\mathbf{U}})\|_{0,\hat{e}} \|\mathbf{B}\hat{\mathbf{w}}_h - \hat{P}_0^e(\mathbf{B}\hat{\mathbf{w}}_h)\|_{0,\hat{e}} &\leq \\ C \sum_T h_T \|\mathbf{B}\hat{\mathbf{U}} - \hat{I}_h(\mathbf{B}\hat{\mathbf{U}})\|_{1,\hat{T}} \|\mathbf{B}\hat{\mathbf{w}}_h - \hat{P}_0^e(\mathbf{B}\hat{\mathbf{w}}_h)\|_{1,\hat{T}} &\leq \\ C \sum_T h_T |\mathbf{B}\hat{\mathbf{U}}|_{2,\hat{T}} |\mathbf{B}\hat{\mathbf{w}}_h|_{1,\hat{T}} &\leq Ch^2 \sum_T |\mathbf{U}|_{2,T} |\mathbf{w}_h|_{1,T} \leq \\ Ch^2 |\mathbf{u}|_{3,\Omega} \|\mathbf{w}_h\|_h, \end{aligned} \quad (27)$$

类似地

$$\begin{aligned} \left| \sum_T \int_{\partial T} \mathbf{w}_h \cdot \boldsymbol{\nu} \operatorname{div} \mathbf{u} \, ds \right| &= \\ \left| \sum_T \sum_{e \subset \partial T} \int_e (\operatorname{div} \mathbf{u} - I_h(\operatorname{div} \mathbf{u})) (\mathbf{w}_h - P_0^e(\mathbf{w}_h)) \cdot \boldsymbol{\nu} \, ds \right| &\leq \\ Ch^2 |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{2,\Omega} \|\mathbf{w}_h\|_h. \end{aligned} \quad (28)$$

将式(27)和(28)代入式(26)得到

$$|E_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h)| \leq Ch^2(|\mathbf{u}|_{3,\Omega} + \lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{2,\Omega}) \|\mathbf{w}_h\|_h. \quad (29)$$

组合式(24)、(25)和(29)即得定理结论.

下面, 根据对偶技巧^[17], 我们给出 L^2 模误差估计.

引理 3 设 $\mathbf{u} \in (H^3(T))^2, \mathbf{v} \in (H^1(T))^2, T \in \mathcal{T}_h, e \subset \partial T$, 则存在与 h_T 无关的正常数 C 使得

$$\left| \int_e \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} - \Pi_T \mathbf{u}) \, ds \right| \leq Ch_T^3 |\mathbf{v}|_{1,T} |\mathbf{u}|_{3,T}, \quad (30)$$

$$\left| \int_e \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} - \Pi_T \mathbf{u}) \, ds \right| \leq Ch_T^3 |\mathbf{v}|_{2,T} |\mathbf{u}|_{2,T}. \quad (31)$$

证明 设 $\hat{e} \subset \partial \hat{T}, e = F_T(\hat{e}), \mathbf{B}$ 是从 \hat{T} 到 T 变换矩阵. 定义

$$b(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{u}}) = \int_{\hat{e}} \mathbf{B} \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{B}(\hat{\mathbf{u}} - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{u}}) \, d\hat{s}.$$

由迹定理和插值定理^[17], 我们有

$$|b(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{u}})| \leq C \|\mathbf{B}\|^2 \|\hat{\mathbf{v}}\|_{1,\hat{T}} \|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{u}}\|_{1,\hat{T}} \leq C \|\mathbf{B}\|^2 \|\hat{\mathbf{v}}\|_{1,\hat{T}} \|\hat{\mathbf{u}}\|_{2,\hat{T}},$$

即, $b(\cdot, \cdot)$ 是 $(H^1(\hat{T}))^2 \times (H^3(\hat{T}))^2$ 上的有界双线性型, 并且 $\|b\| \leq C \|\mathbf{B}\|^2$. 根据插值算子 $\hat{\Pi}$ 的定义有

$$b(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{u}}) = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{p}} \in (P_1(\hat{T}))^2, \hat{\mathbf{u}} \in (H^3(\hat{T}))^2.$$

因为 $\hat{\Pi}$ 对空间 $(P_2(\hat{T}))^2$ 精确成立, 可得

$$b(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{q}}) = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in (H^1(\hat{T}))^2, \hat{\mathbf{q}} \in (P_2(\hat{T}))^2.$$

由双线性引理^[17], 我们有

$$|b(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{u}})| \leq C \|b\| \|\hat{\mathbf{v}}\|_{1,\hat{T}} \|\hat{\mathbf{u}}\|_{3,\hat{T}} \leq C \|\mathbf{B}\|^2 \|\hat{\mathbf{v}}\|_{1,\hat{T}} \|\hat{\mathbf{u}}\|_{3,\hat{T}}, \quad (32)$$

$$|b(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{u}})| \leq C \|b\| \|\hat{\mathbf{v}}\|_{2,\hat{T}} \|\hat{\mathbf{u}}\|_{2,\hat{T}} \leq C \|\mathbf{B}\|^2 \|\hat{\mathbf{v}}\|_{2,\hat{T}} \|\hat{\mathbf{u}}\|_{2,\hat{T}}. \quad (33)$$

利用式(32)、仿射变换技巧和剖分正则性可得

$$\left| \int_e \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} - \Pi_T \mathbf{u}) \, ds \right| = \frac{|e|}{|\hat{e}|} |b(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{u}})| \leq$$

$$Ch_T \|\mathbf{B}\|^2 \|\hat{\mathbf{v}}\|_{1,\hat{T}} \|\hat{\mathbf{u}}\|_{3,\hat{T}} \leq Ch_T^3 |\mathbf{v}|_{1,T} |\mathbf{u}|_{3,T}.$$

利用式(33), 式(31)同样可证.

注 2 根据变分问题(2)的正则性结果(见文献[10])

$$\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} + \lambda \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq C \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}, \quad (34)$$

采用和定理 1 相似的证明过程, 可以得到: 存在与 h 和 λ 无关的正常数 C 使得

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h \leq Ch, \quad \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_h \leq Ch. \quad (35)$$

定理 2 设 $\mathbf{u} \in (H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ 和 $\mathbf{u}_h \in V_h$ 分别为问题(2)和式(19)的解, 则存在与 h 和 λ 无关的正常数 C 使得

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^3(|\mathbf{u}|_{3,\Omega} + \lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{2,\Omega}). \quad (36)$$

证明 根据模的定义有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} = \sup_{0 \neq \mathbf{w} \in (L^2(\Omega))^2} \left(\left| \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{w} \, dx \right| / \|\mathbf{w}\|_{0,\Omega} \right). \quad (37)$$

对 $\mathbf{w} \in (L^2(\Omega))^2$, 设 $\zeta \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ 是下列方程的解:

$$\begin{cases} -\mu \Delta \boldsymbol{\zeta} - (\mu + \lambda) \text{grad}(\text{div} \boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{w}, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (38)$$

则 $\boldsymbol{\zeta}$ 满足如下变分方程:

$$a(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} dx dy, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (39)$$

假设 $\boldsymbol{\zeta}_h \in V_h$ 是下面离散方程的解:

$$a_h(\boldsymbol{\zeta}_h, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} dx dy, \quad \forall \mathbf{v} \in V_h. \quad (40)$$

由式(34)和(35), 存在与 h 和 λ 无关的正常数 C 使得

$$\|\boldsymbol{\zeta}\|_{2,\Omega} + \lambda \|\text{div} \boldsymbol{\zeta}\|_{1,\Omega} \leq C \|\mathbf{w}\|_{0,\Omega}, \quad (41)$$

$$\|\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_h\|_h \leq Ch \|\mathbf{w}\|_{0,\Omega}, \quad \|\boldsymbol{\zeta} - \Pi_h \boldsymbol{\zeta}\|_h \leq Ch \|\mathbf{w}\|_{0,\Omega}. \quad (42)$$

利用式(39)和(40), 我们有

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{w} dx \right| = & | a_h(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_h, \mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}) + a_h(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_h, \Pi_h \mathbf{u}) + \\ & a_h(\boldsymbol{\zeta}_h - \Pi_h \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + a_h(\Pi_h \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) | \leq \\ & \|\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_h\|_h \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_h + \|\boldsymbol{\zeta}_h - \Pi_h \boldsymbol{\zeta}\|_h \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h + \\ & | a_h(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_h, \Pi_h \mathbf{u}) | + | a_h(\Pi_h \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) | . \end{aligned} \quad (43)$$

根据式(25)和(42), 可得

$$\|\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_h\|_h \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_h \leq Ch^3 (\|\mathbf{u}\|_{3,\Omega} + \lambda \|\text{div} \mathbf{u}\|_{2,\Omega}) \|\mathbf{w}\|_{0,\Omega}, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\zeta}_h - \Pi_h \boldsymbol{\zeta}\|_h \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h \leq & (\|\boldsymbol{\zeta}_h - \boldsymbol{\zeta}\|_h + \|\boldsymbol{\zeta} - \Pi_h \boldsymbol{\zeta}\|_h) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h \leq \\ & Ch^3 (\|\mathbf{u}\|_{3,\Omega} + \lambda \|\text{div} \mathbf{u}\|_{2,\Omega}) \|\mathbf{w}\|_{0,\Omega}. \end{aligned} \quad (45)$$

对于式(43)的最后两项, 运用引理 3 和式(41)有

$$\begin{aligned} | a_h(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_h, \Pi_h \mathbf{u}) | = & \left| a_h(\boldsymbol{\zeta}, \Pi_h \mathbf{u}) - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \Pi_h \mathbf{u} dx \right| \leq \\ & \mu \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\text{grad} \boldsymbol{\zeta}) \boldsymbol{\nu} \cdot \Pi_h \mathbf{u} ds \right| + (\mu + \lambda) \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\text{div} \boldsymbol{\zeta}) \boldsymbol{\nu} \cdot \Pi_h \mathbf{u} ds \right| = \\ & \mu \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\text{grad} \boldsymbol{\zeta}) \boldsymbol{\nu} \cdot (\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}) ds \right| + \\ & (\mu + \lambda) \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\text{div} \boldsymbol{\zeta}) \boldsymbol{\nu} \cdot (\Pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}) ds \right| \leq \\ & C\mu h^3 \|\boldsymbol{\zeta}\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{3,\Omega} + C(\mu + \lambda) h^3 \|\text{div} \boldsymbol{\zeta}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{3,\Omega} \leq \\ & Ch^3 \|\mathbf{u}\|_{3,\Omega} \|\mathbf{w}\|_{0,\Omega}. \end{aligned} \quad (46)$$

类似地

$$| a_h(\Pi_h \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) | \leq Ch^3 (\|\mathbf{u}\|_{3,\Omega} + \lambda \|\text{div} \mathbf{u}\|_{2,\Omega}) \|\mathbf{w}\|_{0,\Omega}. \quad (47)$$

将式(43) ~ (47)代入式(37), 定理可证.

注3 本文中提出的单元满足离散的第二 Korn 不等式, 因此还可以用于求解纯应力弹性问题, 详见文献 [18].

4 数值试验

本节中,为了验证单元的无闭锁性和较高的收敛性,我们给出了文中构造的两个单元的 L^2 模和能量模误差数值试验结果,并给出了著名的 C-R 元^[14]的数值结果.考虑纯位移平面弹性问题如下:

令 $\Omega = [0, 1]^2$, $\mu = 1$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$, 其中

$$f_1 = \pi^2 \left[4\sin 2\pi y(-1 + 2\cos 2\pi x) - \cos \pi(x + y) + \frac{2}{1 + \lambda} \sin \pi x \sin \pi y \right],$$

$$f_2 = \pi^2 \left[-4\sin 2\pi x(-1 + \cos 2\pi y) - \cos \pi(x + y) + \frac{2}{1 + \lambda} \sin \pi x \sin \pi y \right].$$

可得方程(1)的真解为

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T,$$

$$u_1 = \sin 2\pi y(-1 + \cos 2\pi x) + \frac{1}{1 + \lambda} \sin \pi x \sin \pi y,$$

$$u_2 = -\sin 2\pi x(-1 + \cos 2\pi y) + \frac{1}{1 + \lambda} \sin \pi x \sin \pi y.$$

将区域 Ω 分为 $n \times n$ 个正方形, 边长 $h = 1/n$. 将每个正方形对分成两个三角形即得三角形剖分. 下面我们分别给出各个单元的 L^2 模和能量模误差结果, 其中 α 表示平均收敛阶.

表 1 18 自由度矩形元误差 $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}$

λ	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	$h = 0.03125$	$h = 0.015625$	α
1E0	6.142 651E-3	6.186 388E-4	6.985 179E-5	8.333 317E-6	3.175 3
1E4	6.357 675E-3	6.252 127E-4	6.999 614E-5	8.328 410E-6	3.192 1
1E8	6.357 833E-3	6.252 387E-4	7.003 371E-5	9.280 637E-6	3.140 0

表 2 18 自由度矩形元误差 $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h$

λ	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	$h = 0.03125$	$h = 0.015625$	α
1E0	3.820 934E-1	8.577 144E-2	1.956 642E-2	4.642 017E-3	2.121 0
1E4	3.880 816E-1	8.588 486E-2	1.950 425E-2	4.620 000E-3	2.123 3
1E8	3.880 838E-1	8.588 496E-2	1.950 425E-2	4.620 084E-3	2.123 3

表 3 14 自由度三角形元误差 $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}$

λ	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	$h = 0.03125$	$h = 0.015625$	α
1E0	3.339 147E-3	4.268 650E-4	5.400 170E-5	6.785 872E-6	2.980 9
1E4	3.304 267E-3	4.217 711E-4	5.330 773E-5	6.705 549E-6	2.981 6
1E8	3.304 848E-3	4.249 263E-4	5.332 385E-5	6.693 218E-6	2.965 7

表 4 14 自由度三角形元误差 $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h$

λ	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	$h = 0.03125$	$h = 0.015625$	α
1E0	2.571 391E-1	6.523 671E-2	1.638 598E-2	4.102 980E-3	1.989 9
1E4	2.568 818E-1	6.516 434E-2	1.638 266E-2	4.096 744E-3	1.990 2
1E8	2.568 629E-1	6.514 451E-2	1.644 392E-2	4.080 437E-3	1.992 0

表 5

C-R 元误差 $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$

λ	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	$h = 0.03125$	$h = 0.015625$	α
1E0	6.950815E-2	1.790365E-2	4.516291E-3	1.131893E-3	1.9801
1E4	7.031642E-2	1.837091E-2	4.656548E-3	1.168997E-3	1.9702
1E8	7.053239E-2	1.837119E-2	4.656432E-3	1.168650E-3	1.9718

表 6

C-R 元误差 $\|u - u_h\|_h$

λ	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	$h = 0.03125$	$h = 0.015625$	α
1E0	2.382238E-0	1.207121E-0	6.057565E-1	3.031701E-1	0.9914
1E4	2.361003E-0	1.197003E-0	6.008141E-1	3.007209E-1	0.9910
1E8	2.361002E-0	1.197003E-0	6.008137E-1	3.007206E-1	0.9910

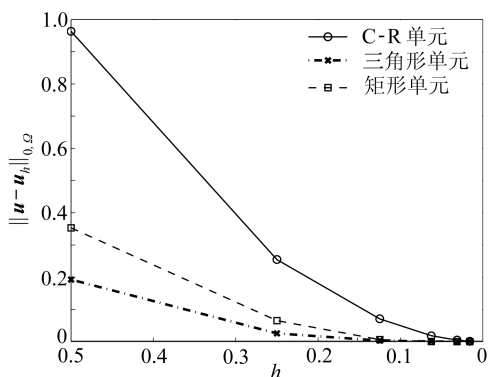


图 1 $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$

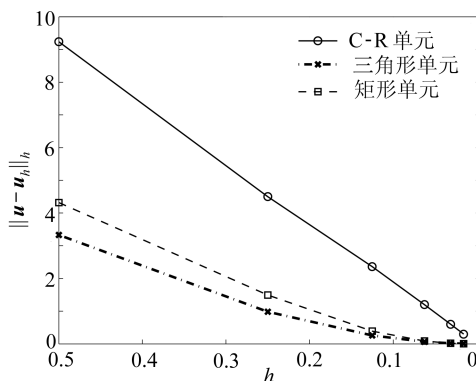


图 2 $\|u - u_h\|_h$

从表 1 ~ 6 中数据可以看出本文中构造的两个单元的 L^2 模和能量模的收敛阶分别为 3 和 2, 并且关于 λ 是一致收敛的. 显然, 它们比 C-R 元的收敛阶都高. 图 1、2 也表明我们所构造的单元比 C-R 元具有更好的逼近效果.

参考文献:

- [1] Arnold D N, Douglas J, Gupta C P. A family of higher order mixed finite element methods for plane elasticity[J]. *Numer Math*, 1984, **45**(1): 1-22.
- [2] Arnold D N, Falk R S. A new mixed formulation for elasticity[J]. *Numer Math*, 1988, **53**(1/2): 13-30.
- [3] Babuska I, Suri M. Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems [J]. *Numer Math*, 1992, **62**(1): 439-463.
- [4] Scott L R, Vogelius M. Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials[J]. *Math Model Numer Anal*, 1985, **19**(1): 113-143.
- [5] Vogelius M. An analysis of the p -version of the finite element method for nearly incompressible materials, uniformly valid, optimal order estimates[J]. *Numer Math*, 1983, **41**(1): 39-53.
- [6] Stenberg R, Suri M. Mixed hp finite element methods for problems in elasticity and Stokes flow[J]. *Numer Math*, 1996, **72**(3): 367-389.
- [7] Stenberg R. A family of mixed finite elements for the elasticity problem[J]. *Numer Math*, 1988, **53**(5): 513-538.
- [8] Morley M. A mixed family of elements for linear elasticity[J]. *Math Comp*, 1977, **55**: 633-

- 666.
- [9] Zhang Z. Analysis of some quadrilateral nonconforming elements for incompressible elasticity [J]. *SIAM J Numer Anal*, 1997, **34**(2): 640-663.
 - [10] Brenner S C, Sung L Y. Linear finite element methods for planar linear elasticity [J]. *Math Comp*, 1992, **59**(220): 321-330.
 - [11] Brenner S C, Scott L R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods* [M]. New York: Springer-Verlag, 1994.
 - [12] Falk R S. Nonconforming finite element methods for the equations of linear elasticity [J]. *Math Comp*, 1991, **51**(196): 529-550.
 - [13] Capatina D, Thomas J M. Nonconforming finite element methods without numerical locking [J]. *Numer Math*, 1998, **81**(2): 163-186.
 - [14] Crouzeix M, Raviart P A. Conforming and nonconforming finite element methods for solving stationary Stokes equations [J]. *RAIRO Anal Numer*, 1973, **7**(R-3): 33-76.
 - [15] 王烈衡, 齐禾. 关于平面弹性问题 Locking-free 有限元格式 [J]. 计算数学, 2002, **24**(2): 243-256.
 - [16] 明平兵. 非协调元 vs Locking 问题 [D]. 博士学位论文. 北京: 中国科学院计算数学所, 1999.
 - [17] Ciarlet P G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems* [M]. New York: North-Holland, 1978.
 - [18] YANG Yong-qin, CHEN Shao-chun. A locking-free nonconforming triangular element for planar elasticity with pure traction boundary condition [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2010, **233**(10): 2703-2710.

Nonconforming Finite Elements for the Equation of Planar Elasticity

YANG Yong-qin¹, XIAO Liu-chao², CHEN Shao-chun¹

(1. Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, P. R. China;

2. College of Science, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, P. R. China)

Abstract: Two new locking-free nonconforming finite elements for the pure displacement planar elasticity problem were presented. Convergence rates of the elements were uniformly optimal with respect to λ . The energy norm and L^2 norm errors were proved to be $O(h^2)$ and $O(h^3)$, respectively. Lastly, numerical tests are carried out, which coincide with the theoretical analysis.

Key words: planar elasticity; locking-free; nonconforming finite element