

# 基于混合物理论的非饱和土的热-水-力耦合分析模型(I)\*

秦冰<sup>1</sup>, 陈正汉<sup>1</sup>, 方振东<sup>1</sup>, 孙树国<sup>1</sup>, 方祥位<sup>1</sup>, 王驹<sup>2</sup>

(1. 后勤工程学院 军事建筑工程系, 重庆 401311;

2. 核工业北京地质研究院, 北京 100029)

(本刊编委陈正汉来稿)

**摘要:** 以混合物理论为基础研究了非饱和土的热-水-力多场耦合问题. 将非饱和土视为由土骨架、液态水、水蒸气、干燥气体及溶解气体共5种组分构成的混合物, 在组分的质量、动量守恒方程及整体能量守恒方程的基础上, 引入了37个补充方程以形成封闭方程组. 其中, 利用水与水蒸气的化学势改变量相同, 推导了在气压力变化条件下水与水蒸气相变平衡所满足的限制方程. 最终控制方程以增量形式给出, 6个方程求解6个未知量(3个土骨架位移、水压力、气压力及温度), 充分反映了热膨胀、热渗流、水的相变、气体溶解及土骨架变形等多种现象的耦合过程.

**关键词:** 非饱和土; 温度; 热-水-力; 混合物理论

**中图分类号:** TL942      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.12.008

## 引言

非饱和土是一种含固、液、气三相的多孔多组分介质. 在核废料深地质处置、地热存储与利用等实际工程中, 非饱和土将经受高温的考验<sup>[1-3]</sup>. 在非饱和土中, 热过程与水(气)流动过程、力学过程之间存在复杂的交叉影响作用. 为评价核废料处置库的安全性及地热利用的效率, 有必要建立非饱和土的热-水-力多场耦合模型. 近些年, 这一领域得到了国内外学者越来越多的关注.

由于气体的热膨胀, 在非等温状态下气压力会发生改变. 气压力的变化会影响水蒸气的迁移、土对水的吸持等多种物理过程<sup>[4-5]</sup>. 但为了简化问题, 已有的非饱和热-水-力多场耦合模型大多假设气压力始终保持不变<sup>[6-11]</sup>. 尽管在少数非饱和热-水-力多场耦合模型中考虑了气压力的变化与气体的运动<sup>[12-20]</sup>, 但是对气压力变化及其对其它物理过程的影响的认识尚不全面. 土中水蒸气与液态水之间的相变是非等温条件下的一个重要物理过程<sup>[6]</sup>, 以往均是利用 Kel-

\* 收稿日期: 2010-07-19; 修订日期: 2010-10-15

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(10672182; 11072265); 重庆市自然科学基金资助项目(CSTC, 2009BB7343)

**作者简介:** 秦冰(1984—), 男, 山东昌乐人, 博士生(E-mail: bingqin1984@163.com);  
陈正汉(1947—), 男, 教授, 博士生导师(联系人. E-mail: chenzhenghan47@163.com);  
方振东(1962—), 男, 教授, 博士生导师(E-mail: fzdhg@tom.com).

vin 方程描述水蒸气与水之间的相变平衡关系<sup>[6-20]</sup>。但是 Kelvin 方程仅适用于气压力不变的情况<sup>[21]</sup>。在过去的非饱和土热-水-力耦合分析中,尚未考虑气压力变化对水蒸气与水之间的相变的影响。另外,已有研究表明,非饱和土的饱和度是吸力、应力、温度的函数<sup>[22]</sup>,而现有的非饱和热-水-力耦合模型却很少考虑温度和应力对饱和度的影响。

基于混合物理论,陈正汉等人建立了一个用于分析非饱和土固结问题的水-力多场耦合模型<sup>[23]</sup>,并相继将非线性、弹塑性及弹塑性损伤本构模型融入到该水-力耦合模型<sup>[24-25]</sup>。本文是上述研究工作<sup>[23-25]</sup>在非等温条件下的拓展。本文将非饱和土视为由土骨架、液态水、水蒸气、干燥气体及溶解气体共 5 种组分构成的混合物,在组分的质量守恒方程、动量守恒方程及整体能量守恒方程的基础上,再引入相变平衡条件、密度、内能、热流密度、内热源、扩散阻力、变形及饱和度本构方程等 37 个方程以建立封闭方程组。最终控制方程以增量形式给出,以土骨架位移、孔隙水压力、孔隙气压力及温度为独立变量。本文将重点考虑气压力变化对土中水与水蒸气之间的相变平衡的影响以及温度与应力对土-水特征曲线的影响等。

## 1 基本假设

本文将非饱和土视为由土骨架、液态水、水蒸气、干燥气体及溶于水的干燥气体共 5 种组分构成的三相多孔介质。液态水与溶解气体组成土中的液相,水蒸气与干燥气体组成土中的气相。液态水与水蒸气之间、干燥气体与溶解气体之间均存在相互转化。

为简化问题,特作如下基本假设:① 满足热力学局部平衡;② 土颗粒、孔隙水不可压缩;③ 孔隙水视为理想流体,孔隙气体视为理想气体,且水、气各自连通、流动缓慢;④ 土体各向同性,小位移;⑤ 土颗粒的矿物成分不发生改变,不考虑孔隙水中的溶质存在。

按土力学中的习惯,文中应力、应变均以压为正。

## 2 场方程

### 2.1 质量守恒方程

根据混合物理论<sup>[26-27]</sup>,土骨架、液态水、水蒸气、干燥气体及溶解气体的质量守恒方程可分别表示为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\phi_s \rho_s) + \nabla \cdot (\phi_s \rho_s \mathbf{v}_s) = 0, & \frac{\partial}{\partial t}(\phi_w \rho_w) + \nabla \cdot (\phi_w \rho_w \mathbf{v}_w) = \hat{c}_w, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\phi_v \rho_v) + \nabla \cdot (\phi_v \rho_v \mathbf{v}_v) = \hat{c}_v, & \frac{\partial}{\partial t}(\phi_a \rho_a) + \nabla \cdot (\phi_a \rho_a \mathbf{v}_a) = \hat{c}_a, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\phi_{aw} \rho_{aw}) + \nabla \cdot (\phi_{aw} \rho_{aw} \mathbf{v}_{aw}) = \hat{c}_{aw}, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\phi_i$ ,  $\rho_i$ ,  $\mathbf{v}_i$  分别表示组分  $i$  的体积分数、真密度、速度,  $\hat{c}_i$  代表组分  $i$  的质量改变率,下标  $i$  取  $s, w, v, a, aw$ , 分别代表土骨架、液态水、水蒸气、干燥气体、溶解气体。各组分的体积分数可分别表示为

$$\phi_s = 1 - n, \quad \phi_w = ns, \quad \phi_v = \phi_a = \phi_g = n(1 - s), \quad \phi_{aw} = Hns, \quad (2)$$

其中,  $n, s$  分别为土的孔隙率与饱和度,  $H$  为气体在水中的体积可溶性系数,下标  $g$  代表土中的气相,包括干燥气体与水蒸气。

### 2.2 动量守恒方程

本文将非饱和土视为 5 种组分构成的混合物,故只能给出 5 个相互独立的动量守恒方程,选用混合物整体、液态水、水蒸气、气相及溶解气体的动量守恒方程,可分别表达为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{b}, \nabla(\phi_w P_w) = \phi_w \rho_w \mathbf{b} + \hat{\mathbf{p}}_w, \nabla(\phi_v P_v) = \phi_v \rho_v \mathbf{b} + \hat{\mathbf{p}}_v, \\ \nabla(\phi_g P_g) = \phi_g \rho_g \mathbf{b} + \hat{\mathbf{p}}_g, \nabla(\phi_{aw} P_{aw}) = \phi_{aw} \rho_{aw} \mathbf{b} + \hat{\mathbf{p}}_{aw}, \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $\boldsymbol{\sigma}$  为土的总应力张量,  $\mathbf{b}$  为单位质量体力(本文中即为重力加速度),  $P_i$  代表流体组分  $i$  的压力(相对压力),  $\hat{\mathbf{p}}_i$  为组分  $i$  流动时所受的扩散阻力. 式(3)中忽略了惯性力作用.

### 2.3 能量守恒方程

根据基本假设①, 可认为土中各组分的温度是相同的. 此时, 只存在 1 个独立的能量守恒方程, 本文选用整体能量守恒方程如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_i^5 (\phi_i \rho_i u_i) \right] = \\ - \nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot \left[ \sum_i^5 (\phi_i \rho_i u_i \mathbf{v}_i) \right] + \sum_i^5 (\boldsymbol{\sigma}_i : \mathbf{D}_i - \mathbf{W}_i \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) + Q, \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $u_i$  为组分  $i$  的内能密度,  $\boldsymbol{\sigma}_i$  为组分  $i$  的应力张量, 对于流体组分,  $\boldsymbol{\sigma}_i = P_i \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}$  为度量张量,  $\mathbf{D}_i$  为组分  $i$  的应变率张量,  $\mathbf{W}_i$  为组分  $i$  相对于整体的扩散速度,  $\mathbf{q}$  为整体的热流密度矢量,  $Q$  代表分布内热源(如反应热等)对整体的热量供给量. 考虑到在实际岩土工程中应力做功与扩散阻力做功产生的热效应是微乎其微的, 在下文中将忽略式(4)中的

$$\sum_i^5 (\boldsymbol{\sigma}_i : \mathbf{D}_i - \mathbf{W}_i \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i).$$

另外, 在推导过程中还需使用如下基本关系式:

$$\begin{cases} \rho = \sum \phi_i \rho_i, \rho \mathbf{v} = \sum \phi_i \rho_i \mathbf{v}_i, \mathbf{W}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}, \\ \boldsymbol{\sigma} = \sum \phi_i \boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{v}_i = \frac{D}{Dt} \mathbf{X}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i = -\frac{1}{2} [\nabla \mathbf{X}_i + (\nabla \mathbf{X}_i)^T], \\ \mathbf{D}_i = \frac{D}{Dt} \boldsymbol{\varepsilon}_i, \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $\rho$  与  $\mathbf{v}$  分别为混合物整体的密度与速度,  $\mathbf{X}_i$  与  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  分别为组分  $i$  的位移与应变张量,  $D/(Dt)$  表示物质导数,  $(\nabla \mathbf{X}_i)^T$  为  $\nabla \mathbf{X}_i$  的转置张量.

考虑到式(2)、(5), 在场方程(1)、(3)、(4)中, 存在  $\rho_s, \rho_w, \rho_v, \rho_a, \rho_{aw}, \mathbf{X}_s, \mathbf{v}_w, \mathbf{v}_v, \mathbf{v}_g, \mathbf{v}_{aw}, \boldsymbol{\sigma}, P_w, P_v, P_g, P_{aw}, u_s, u_w, u_v, u_a, u_{aw}, \hat{c}_w, \hat{c}_v, \hat{c}_a, \hat{c}_{aw}, \hat{\mathbf{p}}_w, \hat{\mathbf{p}}_v, \hat{\mathbf{p}}_a, \hat{\mathbf{p}}_{aw}, \mathbf{q}, Q, n, s, T$  共 58 个未知量, 而场方程只有 21 个, 故还需 37 个补充方程.

## 3 热力学平衡限制条件与本构方程

### 3.1 热力学平衡限制条件

液态水与水蒸气之间的转化、干燥气体与溶解气体之间的转化显然应满足质量守恒, 故

$$\hat{c}_w + \hat{c}_v = 0, \hat{c}_a + \hat{c}_{aw} = 0. \quad (6)$$

考虑到基本假设①, 液态水与水蒸气之间的转化、干燥气体与溶解气体之间的转化还应满足热动平衡条件<sup>[28]</sup>, 即

$$\mu_w = \mu_v, \mu_a = \mu_{aw}, \quad (7)$$

其中,  $\mu_w, \mu_v, \mu_a, \mu_{aw}$  分别为液态水、水蒸气、干燥气体及溶解气体的化学势.

根据基本假设③, 干燥气体视作理想气体. 对于理想气体, 其状态可由两个独立的热力学参量完全确定. 溶解部分与未溶部分干燥气体的温度是相同的, 式(7)又限定两部分的化学势相等, 意味着两部分的其它热力学参量亦相等, 故

$$\rho_a = \rho_{aw}, P_a = P_{aw}. \quad (8)$$

考察液态水与水蒸气组成的系统的两个不同平衡状态,分别用  $A, B$  标识,且认为状态  $B$  代表孔隙水与水蒸气共存的土中实际状态,状态  $A$  代表同温度、1 个标准大气压下自由水面及其上方水蒸气构成的系统。状态  $A, B$  中液态水的化学势之差就是通常所说的状态  $B$  的土水势  $\varphi$ 。由于假定状态  $A, B$  均已处于平衡,两个状态均应满足式(7),故

$$\varphi = \mu_w^B - \mu_w^A = \mu_v^B - \mu_v^A, \quad (9)$$

其中,  $\mu_w^A$  与  $\mu_v^A$  分别为状态  $A$  下液体水与水蒸气的化学势,  $\mu_w^B$  与  $\mu_v^B$  分别为状态  $B$  下液体水与水蒸气的化学势。水蒸气(视为理想气体)的化学势改变量可表达为

$$\mu_v^B - \mu_v^A = \int_A^B \frac{RT}{p_v} dp_v, \quad (10)$$

上式中,  $R$  为通用气体常数,  $T$  为绝对温度,  $p_v$  为水蒸气的绝对压力,即  $p_v = P_v + p_{\text{atm}}$ ,  $p_{\text{atm}}$  为 1 个标准大气压。

前文所提土水势  $\varphi$  是针对单位摩尔水而言,可变换为单位体积的土水势  $\zeta$ ,再利用式(9)、(10),可得

$$\zeta = \frac{\rho_w}{M_w} \varphi = \frac{RT\rho_w}{M_w} \ln\left(\frac{p_v^B}{p_v^A}\right) = \frac{RT\rho_w}{M_w} \ln\left(\frac{p_v}{p_{vs}}\right), \quad (11)$$

上式中,  $M_w$  为水分子的克分子量,  $p_v^B$  为状态  $B$  下的水蒸气压力(即土中的水蒸气压力  $p_v$ ),  $p_v^A$  为状态  $A$  下的水蒸气压力(即 1 个标准大气压、与土相同温度下自由纯水的蒸气压  $p_{vs}$ )。

在等温条件下,土水势可分为 4 个分量<sup>[29]</sup>:溶质势  $\zeta_\pi$ 、重力势  $\zeta_g$ 、基质势  $\zeta_s$  及压力势  $\zeta_p$ 。溶质势代表水中溶质对土水势的贡献,根据基本假设⑤,可不考虑溶质势  $\zeta_\pi$  的作用。重力势代表高差引起的土水势变化,本文中暂不考虑。基质势  $\zeta_s$ 、压力势  $\zeta_p$  可分别表达为

$$\zeta_p = P_g, \quad \zeta_s = -\psi_s = -(P_g - P_w), \quad (12)$$

其中,  $P_g, P_w$  分别为孔隙水、气压力,  $\psi_s$  为基质吸力。利用式(11)、(12),有

$$P_w = \frac{RT\rho_w}{M_w} \ln\left(\frac{p_v}{p_{vs}}\right), \quad (13)$$

上式即为根据水与水蒸气相变热动平衡条件得出的孔隙水压力  $P_w$  与孔隙水蒸气压力  $p_v$  之间的关系式。若土中气压力  $P_g$  始终保持为 1 个标准大气压(即  $\zeta_p = 0$ ),则式(13)可表达为

$$\psi_s = -\frac{RT\rho_w}{M_w} \ln\left(\frac{p_v}{p_{vs}}\right), \quad (14)$$

上式即为通常所说的 Kelvin 公式,是气压力不变条件下式(13)的特例。

1 个标准大气压下自由水面上方的饱和水蒸气压力  $p_{vs}$  只是温度的函数,在 20 ~ 100 °C 的范围内,存在如下经验拟合公式<sup>[30]</sup>(单位:kPa):

$$p_{vs} = 1.9745 \times 10^{-4}(T - 273.16)^3 - 0.0158(T - 273.16)^2 + 0.6865(T - 273.16) - 7.2098. \quad (15)$$

### 3.2 密度本构方程

对于土颗粒,认为其密度  $\rho_s$  只是温度  $T$  的函数。通常已知参考温度  $T_0$  下的密度  $\rho_{s0}$  与土颗粒的热膨胀系数  $\alpha_s$ ,并考虑到土颗粒的热膨胀系数  $\alpha_s$  通常很小,有

$$\rho_s(T) = \frac{\rho_{s0}}{1 + \alpha_s(T - T_0)} \approx \rho_{s0} + \alpha_{sT}\rho_{s0}(T - T_0), \quad (16)$$

其中,  $\alpha_{sT} = -\alpha_s$ 。对于孔隙液态水的密度  $\rho_w$ ,进行类似的讨论,可得

$$\rho_w(T) = \frac{\rho_{w0}}{1 + \alpha_w(T - T_0)} \approx \rho_{w0} + \alpha_{wT}\rho_{w0}(T - T_0), \quad (17)$$

其中,  $\rho_{w0}$  为参考温度  $T_0$  下水的密度,  $\alpha_w$  为水的热膨胀系数,  $\alpha_{wT} = -\alpha_w$ 。

由基本假设③, 水蒸气应满足理想气体状态方程, 并引入式(13), 可得

$$\rho_v = \frac{p_{vs} M_w}{RT} \exp\left(\frac{P_w M_w}{RT \rho_w}\right). \quad (18)$$

对于干燥气体, 同样应适用理想气体状态方程, 并利用 Dalton 分压定律(即  $p_a = p_g - p_v$ ) 及式(13), 可得

$$\rho_a = \frac{(P_g + p_{atm}) M_a}{RT} - \frac{p_{vs} M_a}{RT} \exp\left(\frac{P_w M_w}{RT \rho_w}\right), \quad (19)$$

其中,  $M_a$  为干燥气体的克分子量。

### 3.3 内能本构方程

若取参考温度  $T_0$  下的内能为 0, 则土颗粒、水、水蒸气、干燥气体及溶解气体的内能密度可分别表达为

$$u_s = \int_{T_0}^T c_s dT, \quad u_w = \int_{T_0}^T c_w dT, \quad u_v = \int_{T_0}^T c_v dT, \quad u_a = u_{aw} = \int_{T_0}^T c_a dT, \quad (20)$$

其中,  $c_s, c_w$  分别为土颗粒、水的比热容,  $c_v, c_a$  分别为水蒸气、干燥气体的比定容热容。

### 3.4 热流密度与内热源本构方程

混合物整体的热流密度矢量可用如下典型本构方程加以描述<sup>[26]</sup>:

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T - \sum_{i=1}^{N-1} \kappa_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_N), \quad (21)$$

其中,  $\mathbf{v}_N$  为某一特定组分的速度。式(21)说明, 热流密度与温度梯度、扩散速度有关, 扩散引起热通量的特性称为 Dufour 效应。考虑到土中的扩散速度很小, 本文暂不考虑 Dufour 效应。此时, 式(21)简化为 Fourier 热传导定律, 即

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \quad (22)$$

其中,  $\lambda$  为土的整体热传导系数, 是其各组分体积分数的函数。目前, 已提出了不少关于土的热传导系数的经验公式, 其中 Johansen 公式<sup>[31]</sup> 比较常用, 如下:

$$\lambda = (\lambda_{sat} - \lambda_{dry}) \lambda_r + \lambda_{dry}, \quad (23)$$

其中,  $\lambda_{dry}, \lambda_{sat}$  分别为同一干密度下干土与饱和土的热传导系数,  $\lambda_r$  是饱和度  $s$  的函数, 代表着饱和度对热传导系数的影响, 对于细粒土, 有  $\lambda_r = 1 + lgs$ 。

在相变过程中, 会产生或吸收热量, 这些热量可视作混合物整体的内热源。在本文中, 考虑到气体溶解过程基本不释放(或吸收)热量, 认为内热源  $Q$  只与水和水蒸气之间的相变有关, 故内热源  $Q$  可表达为

$$Q = -L \hat{c}_v, \quad (24)$$

其中,  $L$  为潜热(或称气化热), 代表水向水蒸气转化所需的热量, 在通常的温度范围内(20 ~ 100 °C),  $L$  变化很小, 可视为常数。

### 3.5 扩散阻力本构方程与渗透定律

扩散阻力  $\hat{p}_i$  可用如下典型本构方程加以描述<sup>[26]</sup>:

$$\hat{p}_i = -\sum_{j=1}^{N-1} \xi_{ij} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_s) - \vartheta_i \nabla T, \quad (25)$$

其中,  $\mathbf{v}_s$  为土骨架的速度。式(25)表明, 扩散阻力与扩散速度、温度梯度相关。以孔隙水的扩散阻力  $\hat{p}_w$  为例, 若孔隙水扩散阻力  $\hat{p}_w$  与其它组分的扩散速度无关, 则  $\hat{p}_w$  可表达为

$$\hat{p}_w = -\xi_w (\mathbf{v}_w - \mathbf{v}_s) - \vartheta_w \nabla T. \quad (26)$$

将上式代入孔隙水的动量守恒方程式(3),并忽略重力的作用,可得

$$ns(\mathbf{v}_w - \mathbf{v}_s) = -\frac{(ns)^2}{\xi_w} \nabla P_w - \frac{ns\vartheta_w}{\xi_w} \nabla T, \quad (27)$$

上式说明,孔隙水相对于土骨架的流动与孔隙水的压力梯度、温度梯度有关.温度梯度引起流动这一特性称为 Soret 效应(或热扩散现象).在等温条件下,式(27)即等同于 Darcy 定律(不考虑重力影响).如果记

$$k_{ww} = \frac{(ns)^2}{\xi_w}, k_{wT} = \frac{ns\vartheta_w}{\xi_w}, \quad (28)$$

则式(27)可写为

$$ns(\mathbf{v}_w - \mathbf{v}_s) = -k_{ww} \nabla P_w - k_{wT} \nabla T, \quad (29)$$

其中,  $k_{ww}$ ,  $k_{wT}$  分别为与压力梯度、温度梯度相关的渗水系数.  $k_{ww}$  是土的孔隙率  $n$ 、饱和度  $s$  及温度  $T$  的函数,  $k_{ww}$  通常可表达为

$$k_{ww} = k_w^T k_w^s k_{ws}, \quad (30)$$

其中,  $k_{ws}$  为参考温度  $T_0$  下同孔隙率饱和土的渗水系数,  $k_w^s$  代表饱和度对渗水系数的影响,  $k_w^T$  代表温度对渗水系数的影响.  $k_w^T$ ,  $k_w^s$ ,  $k_{ws}$  可分别用如下公式计算<sup>[41]</sup>:

$$k_w^T = \frac{\tau_w^0}{\tau_w^T}, k_w^s = \left( \frac{s - s_r}{1 - s_r} \right)^\chi, k_{ws} = \alpha \cdot 10^{\beta n}, \quad (31)$$

其中,  $s_r$  为残余饱和度,  $\alpha, \beta, \chi$  为材料参数,  $\tau_w^0, \tau_w^T$  分别为参考温度  $T_0$ 、当前温度  $T$  下水的粘滞性系数. 水的粘滞系数有如下经验公式<sup>[32]</sup>(单位:  $\text{mN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$ , 适用于  $0 \sim 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ):

$$\tau_w^T = 1.5065 \exp\left(-\frac{T - 273.16}{28.9408}\right) + 0.2597. \quad (32)$$

与温度梯度相关的渗水系数  $k_{wT}$  亦是孔隙率  $n$ 、饱和度  $s$  及温度  $T$  的函数,为了简化问题,本文暂不考虑温度对  $k_{wT}$  的影响,采用下式计算:

$$k_{wT} = \tau_w ns k_{wT}^0, \quad (33)$$

其中,  $\tau_w$  为孔隙水流动的曲折因子,  $k_{wT}^0$  为自由热扩散系数.

由上可知,扩散阻力本构方程与动量守恒方程相结合可导出渗透定律方程(或扩散定律方程).限于篇幅,下文将直接给出其它组分的渗透(或扩散)定律方程,并用其替代相应的扩散阻力本构方程和动量守恒方程.

类似孔隙液态水,可给出孔隙气相(包括干燥气体与水蒸气)的渗透定律方程如下(替代孔隙气相动量守恒方程式(3)与  $\hat{\mathbf{p}}_g$  本构方程):

$$n(1-s)(\mathbf{v}_g - \mathbf{v}_s) = -k_{gg} \nabla P_g - k_{gT} \nabla T, \quad (34)$$

其中,  $k_{gg}$ ,  $k_{gT}$  为与压力梯度、温度梯度相关的渗气系数.类似式(30),可将  $k_{gg}$  表达为

$$k_{gg} = k_g^T k_g^s k_{g0}, \quad (35)$$

其中,  $k_{g0}$  为参考温度  $T_0$  下同孔隙率干土的渗气系数,  $k_g^s$  代表饱和度对渗气系数的影响,  $k_g^T$  代表温度对渗气系数的影响.  $k_g^T$ ,  $k_g^s$ ,  $k_{g0}$  可分别表达为

$$k_g^T = \frac{\tau_g^0}{\tau_g^T}, k_g^s = (1-s)^\nu, k_{g0} = \omega \cdot 10^{\kappa n}, \quad (36)$$

其中,  $\nu, \omega, \kappa$  为材料参数,  $\tau_g^0, \tau_g^T$  分别为参考温度  $T_0$ 、当前温度  $T$  下气体的粘滞性系数.温度对气体粘滞性的影响不大,且气体的粘滞性还与气压力、气体成分等因素有关,为了简化问题,本文暂且将气相的粘滞性系数视为常数,即  $k_g^T = 1$ .类似式(33),可给出与温度梯度相关的渗气

系数  $k_{gT}$  如下:

$$k_{gT} = \tau_g n(1-s)k_{gT}^0, \quad (37)$$

其中,  $\tau_g$  为孔隙气相流动的曲折因子,  $k_{gT}^0$  为自由气体中的热扩散系数。

对于水蒸气在孔隙气相(由水蒸气与干燥气体两部分组成)中的扩散,可给出以下方程(替代水蒸气动量守恒方程式(3)与  $\hat{p}_v$  本构方程):

$$n(1-s)\rho_v(\mathbf{v}_v - \mathbf{v}_g) = -D_{vv} \nabla \left( \frac{\rho_v}{\rho_g} \right) - D_{vT} \nabla T, \quad (38)$$

其中,  $D_{vv}, D_{vT}$  分别为与水蒸气浓度梯度、温度梯度相关的扩散系数,  $D_{vv}$  可按式(39)计算:

$$D_{vv} = \rho_g D_v^\phi D_v^T D_v^p D_{v0}, \quad (39)$$

其中,  $D_{v0}$  为参考温度  $T_0$ 、参考气相压力  $p_{g0}$  下水蒸气在水蒸气与干燥气体混合物中的扩散系数,  $D_v^\phi$  代表气相体积分数对水蒸气扩散的影响,  $D_v^T$  代表温度对水蒸气扩散的影响,  $D_v^p$  代表气相压力对水蒸气扩散的影响,  $D_v^\phi, D_v^T, D_v^p$  可表达为

$$D_v^\phi = \tau_v n(1-s), \quad D_v^T = \frac{T}{T_0}, \quad D_v^p = \frac{p_{g0}}{p_g}, \quad (40)$$

其中,  $\tau_v$  称为水蒸气扩散曲折因子. 为了简化问题,一般不考虑温度梯度引起的水蒸气扩散,即  $D_{vT} = 0$ .

将式(18)、(19)代入式(38)后,可整理为

$$n(1-s)(\mathbf{v}_v - \mathbf{v}_g) = -k_{vw} \nabla P_w - k_{vg} \nabla P_g - k_{vT} \nabla T, \quad (41)$$

其中,  $k_{vw}, k_{vg}, k_{vT}$  与  $D_{vv}, D_{vT}$  之间存在如下关系:

$$k_{vw} = \frac{\rho_a \alpha_{vw} - \rho_v \alpha_{aw}}{\rho_v \rho_g^2} D_{vv}, \quad k_{vg} = -\frac{\alpha_{ag}}{\rho_g^2} D_{vv}, \quad k_{vT} = \frac{\rho_a \alpha_{vT} - \rho_v \alpha_{aT}}{\rho_v \rho_g^2} D_{vv} + \frac{D_{vT}}{\rho_v}, \quad (42)$$

其中,  $\alpha_{vw}, \alpha_{vT}, \alpha_{aw}, \alpha_{ag}, \alpha_{aT}$  的具体表达式见附录。

对于溶解气体在孔隙水中的扩散,可给出类似式(38)的扩散定律方程(替代溶解气体动量守恒方程式(3)与  $\hat{p}_{aw}$  本构方程):

$$Hnsp_{aw}(\mathbf{v}_{aw} - \mathbf{v}_w) = -D_{awa} \nabla \rho_{aw} - D_{awT} \nabla T, \quad (43)$$

其中,  $D_{awa}, D_{awT}$  分别为与溶解气体密度梯度、温度梯度相关的扩散系数. 气体通过土中水的扩散系数非常小,一般比在自由水中的扩散系数小几个量级<sup>[4]</sup>,加之气体在水中的溶解能力有限,因此本文忽略气体在孔隙水中扩散对气体迁移的贡献,即

$$\mathbf{v}_{aw} - \mathbf{v}_w = \mathbf{0}. \quad (44)$$

### 3.6 变形与饱和度本构方程

使用两个应力变量才可能全面描述非饱和土的行为已成为共识,但是具体使用哪两个应力变量,目前不同的学者尚有不同的看法<sup>[33]</sup>. 本文使用净总应力  $\boldsymbol{\sigma} - P_g \mathbf{I}$ 、吸力  $P_g - P_w$  作为应力变量,采用如下增量形式的非饱和热弹性本构模型:

$$d\boldsymbol{\sigma} = 2G_t d\boldsymbol{\varepsilon} + \left( K_t - \frac{2}{3}G_t \right) d\varepsilon_v \mathbf{I} - K_t \left[ \frac{d(P_g - P_w)}{H_t} - \alpha_t dT \right] \mathbf{I} + dP_g \mathbf{I}, \quad (45)$$

其中,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  为土骨架的应变张量,  $\varepsilon_v$  为土骨架的体应变,  $G_t$  为剪切模量,  $K_t$  为体积模量,  $H_t$  为与吸力相关的变形模量,  $\alpha_t$  为土骨架的热膨胀系数(注意其与土颗粒的热膨胀系数  $\alpha_s$  不同). 模型参数  $G_t, K_t, H_t, \alpha_t$  是随净总应力、吸力、温度变化的,不是常数,因此式(45)是一个非线性模型。

饱和度是净总应力、吸力及温度的函数,若不考虑剪应力对饱和度的影响,可将饱和度广

义地表达为(即广义土-水特征曲线方程)

$$ds = \beta_{sr} d\sigma_m + \beta_{sw} dP_w + \beta_{sg} dP_g + \beta_{sT} dT, \quad (46)$$

其中,  $\sigma_m$  为平均总应力,  $\beta_{sr}, \beta_{sw}, \beta_{sg}, \beta_{sT}$  分别为

$$\begin{cases} \beta_{sr} = \frac{\partial s}{\partial(\sigma_m - P_g)}, \beta_{sw} = -\frac{\partial s}{\partial(P_g - P_w)}, \\ \beta_{sg} = -\frac{\partial s}{\partial(\sigma_m - P_g)} + \frac{\partial s}{\partial(P_g - P_w)}, \beta_{sT} = \frac{\partial s}{\partial T}. \end{cases} \quad (47)$$

综上,式(6)、(8)、(13)、(16)~(20)、(22)、(24)、(29)、(34)、(41)、(44)~(46)给出了所需的37个补充方程,连同21个场方程(即式(1)、(3)及(4))构成封闭方程组,58个方程求解58个未知量。

## 4 增量形式的最终控制方程

上文所给出的一些本构方程(如式(45)、(46))是以增量形式描述,故最终控制方程亦只能采用增量形式表达。若用  $\mathfrak{R}$  广义地代表前文所涉及的各种物理量,则将相应的增量表示为  $\delta\mathfrak{R}$ 。由于  $\delta\mathfrak{R}$  是小量,可认为  $\mathfrak{R}$  与  $\mathfrak{R} + \delta\mathfrak{R}$  满足相同的场方程和本构方程,将对应的方程相减,即可得到增量形式的场方程和本构方程,限于篇幅,不再依次列出。

将式(16)的增量形式代入土骨架质量守恒方程的增量形式,有

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} = \frac{(1-n)\alpha_{sT}}{\rho_s} \frac{\partial \delta T}{\partial t} + (1-n) \nabla \cdot \delta \mathbf{v}_s. \quad (48)$$

同时,又存在如下关系式:

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{v}_s = -\frac{D\delta \varepsilon_v}{Dt} \approx -\frac{\partial \delta \varepsilon_v}{\partial t}, \quad (49)$$

其中,根据小位移假设,可不区分物质导数与局部导数。利用式(48)、(49),有

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} = -(1-n) \frac{\partial \delta \varepsilon_v}{\partial t} + \frac{(1-n)\alpha_{sT}}{\rho_s} \frac{\partial \delta T}{\partial t}, \quad (50)$$

上式建立了孔隙率与体应变及土颗粒的热膨胀之间的联系。

利用式(6),液态水与水蒸气质量守恒方程相加,并变换为增量形式,有

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \delta(n s \rho_w) + \delta[(1-s)n\rho_v] \} + \nabla \cdot [n s \rho_w \cdot \delta \mathbf{v}_w + (1-s)n\rho_v \cdot \delta \mathbf{v}_v] = 0, \quad (51)$$

上式即为所有水分(包括液态水和水蒸气)所满足的质量守恒方程。代入式(5)、(17)、(18)、(29)、(34)、(41)、(45)、(46)及(50)的增量形式,式(51)可进一步化为

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial}{\partial t} [ \text{tr}(\nabla \delta \mathbf{X}_s) ] + a_2 \frac{\partial \delta P_w}{\partial t} + a_3 \frac{\partial \delta P_g}{\partial t} + a_4 \frac{\partial \delta T}{\partial t} + \\ a_5 \nabla^2 \delta P_w + a_6 \nabla^2 \delta P_g + a_7 \nabla^2 \delta T = 0, \end{aligned} \quad (52)$$

其中,  $\text{tr}(\ast)$  表示二阶张量的第一不变量,  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$  具体表达式见附录。

利用式(6)、(8)及(44),干燥气体与溶解气体质量守恒方程相加,并变换为增量形式,有

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \delta[(1-s)n\rho_a] + \delta(Hs n\rho_a) \} + \nabla \cdot [ (1-s)n\rho_a \cdot \delta \mathbf{v}_a + Hs n\rho_a \cdot \delta \mathbf{v}_w ] = 0, \quad (53)$$

上式即为所有干燥气体(包括未溶部分与已溶部分)所满足的质量守恒方程。代入式(5)、(19)、(29)、(34)、(41)、(45)、(46)及(50)的增量形式,式(53)可进一步化为

$$b_1 \frac{\partial}{\partial t} [ \text{tr}(\nabla \delta \mathbf{X}_s) ] + b_2 \frac{\partial \delta P_w}{\partial t} + b_3 \frac{\partial \delta P_g}{\partial t} + b_4 \frac{\partial \delta T}{\partial t} +$$

$$b_5 \nabla^2 \delta P_w + b_6 \nabla^2 \delta P_g + b_7 \nabla^2 \delta T = 0, \quad (54)$$

其中,  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$  的具体表达式见附录。

将式(1)、(2)、(5)、(8)、(16)~(20)、(22)、(24)、(29)、(34)、(41)、(44)~(46)及(50)代入整体能量守恒方程式(4),并变换为增量形式,有

$$c_1 \frac{\partial}{\partial t} [\text{tr}(\nabla \delta \mathbf{X}_s)] + c_2 \frac{\partial \delta P_w}{\partial t} + c_3 \frac{\partial \delta P_g}{\partial t} + c_4 \frac{\partial \delta T}{\partial t} + c_5 \nabla^2 \delta P_w + c_6 \nabla^2 \delta P_g + c_7 \nabla^2 \delta T = 0, \quad (55)$$

其中,  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$  的具体表达式见附录。

将式(5)、(45)代入整体动量守恒方程的增量形式,并忽略重力的作用,有

$$\nabla \cdot \left[ G_t [\nabla \delta \mathbf{X}_s + (\nabla \delta \mathbf{X}_s)^T] + \left( K_t - \frac{2}{3} G_t \right) \text{tr}(\nabla \delta \mathbf{X}_s) \mathbf{I} \right] - \frac{K_t}{H_t} \nabla \delta P_w - \left( 1 - \frac{K_t}{H_t} \right) \nabla \delta P_g - \alpha_t K_t \nabla \delta T = \mathbf{0}. \quad (56)$$

式(52)、(54)、(55)及(56)即构成了最终的增量形式控制方程组(6个方程),包含6个增量未知量  $\delta \mathbf{X}_s, \delta P_w, \delta P_g, \delta T$ ,方程数与未知量数相等.最终控制方程以增量形式给出,在每一次增量过程中,可将各方程中的系数视为常数,为融入更复杂的本构关系(如热弹塑性本构模型、土-水特征曲线的滞后性)提供了便利。

如果不考虑温度的变化、水蒸气的存在及气体在水中的溶解,式(55)左端将恒为0(即式(55)退化为恒等式),式(52)、(54)及(56)可化为

$$\left\{ \begin{array}{l} (s - n\beta_{sr}K_t) \frac{\partial}{\partial t} [\text{tr}(\nabla \delta \mathbf{X}_s)] + n \left( \beta_{sr} \frac{K_t}{H_t} + \beta_{sw} \right) \frac{\partial \delta P_w}{\partial t} + \\ n \left[ \beta_{sr} \left( 1 - \frac{K_t}{H_t} \right) + \beta_{sg} \right] \frac{\partial \delta P_g}{\partial t} = k_{ww} \nabla^2 \delta P_w, \\ (1 - s + n\beta_{sr}K_t) \frac{\partial}{\partial t} [\text{tr}(\nabla \delta \mathbf{X}_s)] - n \left( \beta_{sr} \frac{K_t}{H_t} + \beta_{sw} \right) \frac{\partial \delta P_w}{\partial t} + \\ n \left[ -\beta_{sr} \left( 1 - \frac{K_t}{H_t} \right) - \beta_{sg} + \frac{1-s}{p_g} \right] \frac{\partial \delta P_g}{\partial t} = k_{gg} \nabla^2 \delta P_g, \\ \nabla \cdot \left[ G_t [\nabla \delta \mathbf{X}_s + (\nabla \delta \mathbf{X}_s)^T] + \left( K_t - \frac{2}{3} G_t \right) \text{tr}(\nabla \delta \mathbf{X}_s) \mathbf{I} \right] - \\ \frac{K_t}{H_t} \nabla \delta P_w - \left( 1 - \frac{K_t}{H_t} \right) \nabla \delta P_g = \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (57)$$

除方程系数有所差别外,上式与文献[24]中非饱和土非线性固结理论的控制方程组相同,而系数上的不同是由于使用了不同形式的变形与饱和度本构方程所致。

若考虑土体始终处于饱和状态,则式(54)左端恒为0(即式(54)退化为恒等式),式(52)、(55)及(56)又可化为

$$\frac{\partial}{\partial t} [\text{tr}(\nabla \delta \mathbf{X}_s)] + \left[ \frac{(1-n)\alpha_{sT}}{\rho_s} + \frac{n\alpha_{wT}}{\rho_w} \right] \frac{\partial \delta T}{\partial t} - k_{ww} \nabla^2 \delta P_w - k_{wT} \nabla^2 \delta T = 0, \quad (58a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\text{tr}(\nabla \delta \mathbf{X}_s)] + \left[ \frac{(1-n)\alpha_{sT}}{\rho_s} + \frac{n\alpha_{wT}}{\rho_w} + \frac{(1-n)\rho_s c_s}{\rho_w u_w} + \frac{nc_w}{u_w} \right] \frac{\partial \delta T}{\partial t} - k_{ww} \nabla^2 \delta P_w - \left( \frac{\lambda}{\rho_w u_w} + k_{wT} \right) \nabla^2 \delta T = 0, \quad (58b)$$

$$\nabla \cdot \left[ G_t [\nabla \delta X_s + (\nabla \delta X_s)^T] + \left( K_t - \frac{2}{3} G_t \right) \text{tr}(\nabla \delta X_s) \mathbf{I} \right] - \nabla \delta P_w - \alpha_t K_t \nabla \delta T = \mathbf{0}. \quad (58c)$$

上式为饱和土热固结的控制方程,与文献[34]中所采用的饱和土热固结模型方程基本一致,主要有3点不同:第1,由于本文沿用土力学的假定,认为土颗粒与水不可压缩,故式(58)中不含土颗粒及水的压缩性系数  $C_s, C_w$ ; 第2,如前文所述, Dufour 效应对土中热传导的影响很小,故式(58)中略去 Dufour 效应是一种合理的简化;第3,式(58)是以增量形式出现,为工程应用和数值计算提供了方便. 如果进一步再不考虑温度的变化,式(58)将简化为增量形式的 Biot 固结理论,限于篇幅,不再给出具体形式.

## 4 结 论

本文主要结论与特色如下:

1) 以混合物理论为基础,建立了非饱和土热-水-力多场耦合模型,共有6个控制方程,包含土骨架位移、孔隙水压力、孔隙气压力及温度共6个未知量;

2) 所建立的多场耦合模型考虑了土骨架与土颗粒的热膨胀、饱和度随温度及应力的变化、温度梯度引起的水气流动(即 Soret 效应)、相变放热、孔隙率与含水率变化对热传导的影响等多种物理过程,充分反映了温度场与变形场、应力场及水气渗流场等之间的交叉影响作用;

3) 以热动平衡条件为基础,推导了气压力变化条件下水与水蒸气相变平衡所满足的限制方程,常用的 Kelvin 公式是该限制方程在气压力恒定条件下的特例;

4) 6个控制方程均以增量形式表达,为融入复杂本构关系与数值计算提供了方便.

有关本文建立的非饱和土热-水-力多场耦合模型在核废料地质处置库及环境工程中的应用,将另文讨论.

## 附 录

式(42)、(52)、(54)、(55)中的系数表达式为

$$\alpha_{vw} = \frac{\rho_v}{P_w} \ln\left(\frac{\rho_v}{\rho_{vs}}\right), \quad \alpha_{vT} = \frac{\rho_v}{\rho_{vs}} \frac{d\rho_{vs}}{dT} - \frac{\rho_v}{T} - \frac{\rho_v}{T} \ln\left(\frac{\rho_v}{\rho_{vs}}\right) - \frac{\rho_v}{\rho_w} \ln\left(\frac{\rho_v}{\rho_{vs}}\right) \frac{d\rho_w}{dT},$$

$$\alpha_{aw} = -\frac{M_a}{M_w} \frac{\rho_v}{P_w} \ln\left(\frac{\rho_v}{\rho_{vs}}\right), \quad \alpha_{ag} = \frac{M_a}{RT},$$

$$\alpha_{aT} = -\frac{(P_g + p_{atm})M_a}{RT^2} - \frac{M_a}{M_w} \left[ \frac{\rho_v}{\rho_{vs}} \frac{d\rho_{vs}}{dT} - \frac{\rho_v}{T} - \frac{\rho_v}{T} \ln\left(\frac{\rho_v}{\rho_{vs}}\right) - \frac{\rho_v}{\rho_w} \ln\left(\frac{\rho_v}{\rho_{vs}}\right) \frac{d\rho_w}{dT} \right],$$

$$a_1 = s\rho_w + (1-s)\rho_v - (n\rho_w - n\rho_v)\beta_{sr}K_t,$$

$$a_2 = (n\rho_w - n\rho_v) \left( \beta_{sr} \frac{K_t}{H_t} + \beta_{sw} \right) + (1-s)n\alpha_{vw},$$

$$a_3 = (n\rho_w - n\rho_v) \left[ \beta_{sr} \left( 1 - \frac{K_t}{H_t} \right) + \beta_{sg} \right],$$

$$a_4 = [s\rho_w + (1-s)\rho_v] \frac{(1-n)\alpha_{sT}}{\rho_s} +$$

$$(n\rho_w - n\rho_v) (\beta_{sr}\alpha_t K_t + \beta_{sT}) + ns\alpha_{wT} + (1-s)n\alpha_{vT},$$

$$a_5 = -(k_{ww}\rho_w + k_{vw}\rho_v), \quad a_6 = -(k_{vg}\rho_v + k_{gg}\rho_v), \quad a_7 = -(k_{wT}\rho_w + k_{vT}\rho_v + k_{gT}\rho_v),$$

$$b_1 = (1-s)\rho_a + Hs\rho_a - (-n\rho_a + Hn\rho_a)\beta_{sr}K_t,$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= (-n\rho_a + Hn\rho_a) \left( \beta_{sr} \frac{K_t}{H_t} + \beta_{sw} \right) + [(1-s)n + Hsn] \alpha_{aw}, \\
b_3 &= (-n\rho_a + Hn\rho_a) \left[ \beta_{sr} \left( 1 - \frac{K_t}{H_t} \right) + \beta_{sg} \right] + [(1-s)n + Hsn] \alpha_{ag}, \\
b_4 &= [(1-s)\rho_a + Hs\rho_a] \frac{(1-n)\alpha_{sT}}{\rho_s} + \\
&\quad (-n\rho_a + Hn\rho_a) (\beta_{sr} \alpha_t K_t + \beta_{sT}) + [(1-s)n + Hsn] \alpha_{aT}, \\
b_5 &= -(-k_{vw}\rho_v + k_{ww}H\rho_a), \quad b_6 = -(-k_{vg}\rho_v + k_{gg}\rho_a), \quad b_7 = -(k_{gT}\rho_a - k_{vT}\rho_v + k_{wT}H\rho_a), \\
c_1 &= s\rho_w u_w + (1-s)\rho_v(u_v + L) + (1-s + Hs)\rho_a u_a - \\
&\quad [n\rho_w u_w - n\rho_v(u_v + L) - (1-H)n\rho_a u_a] \beta_{sr} K_t, \\
c_2 &= [n\rho_w u_w - n\rho_v(u_v + L) - (1-H)n\rho_a u_a] \left( \beta_{sr} \frac{K_t}{H_t} + \beta_{sw} \right) + \\
&\quad (1-s)n(u_v + L) \alpha_{vw} + (1-s + Hs)nu_a \alpha_{aw}, \\
c_3 &= [n\rho_w u_w - n\rho_v(u_v + L) - (1-H)n\rho_a u_a] \left[ \beta_{sr} \left( 1 - \frac{K_t}{H_t} \right) + \beta_{sg} \right] + \\
&\quad (1-s + Hs)nu_a \alpha_{ag}, \\
c_4 &= [-\rho_s u_s + s\rho_w u_w + (1-s)\rho_v(u_v + L) + (1-s + Hs)\rho_a u_a] \frac{(1-n)\alpha_{sT}}{\rho_s} + \\
&\quad (1-n)u_s \alpha_{sT} + nsu_w \alpha_{wT} + [n\rho_w u_w - n\rho_v(u_v + L) - \\
&\quad (1-H)n\rho_a u_a] (\beta_{sr} \alpha_t K_t + \beta_{sT}) + \\
&\quad (1-s)n(u_v + L) \alpha_{vT} + (1-s + Hs)nu_a \alpha_{aT} + \sum_{i=1}^5 \phi_i \rho_i c_i, \\
c_5 &= -[k_{ww}(\rho_w u_w + H\rho_a u_a) + k_{vw}\rho_v(u_v + L) - k_{vw}\rho_v u_a], \\
c_6 &= -[k_{vg}\rho_v(u_v + L) + k_{gg}\rho_v(u_v + L) + k_{gg}\rho_a u_a - k_{vg}\rho_v u_a], \\
c_7 &= -[\lambda + k_{wT}(\rho_w u_w + H\rho_a u_a) + k_{vT}\rho_v(u_v + L) + k_{gT}\rho_v(u_v + L) + k_{gT}\rho_a u_a - k_{vT}\rho_v u_a].
\end{aligned}$$

## 参考文献:

- [1] Hudson J A, Stephansson O, Andersson J, Tsang C-F, Jing L. Coupled T-H-M issues relating to radioactive waste repository design and performance[J]. *Int J Rock Mech Min Sci*, 2001, **38**(1): 143-161.
- [2] Hicks T W, Pine R J, Willis-Richards J, Xu S, Jupe A J, Rodrigues N E V. A hydro-thermo-mechanical numerical model for HDR geothermal reservoir evaluation[J]. *Int J Rock Mech Min Sci & Geomech Abstr*, 1996, **33**(5): 499-511.
- [3] Laloui L, Nuth M, Vulliet L. Experimental and numerical investigations of the behaviour of a heat exchanger pile[J]. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 2006, **30**(8): 763-781.
- [4] Fredlund D G, Raharajo H. *Soil Mechanics for Unsaturated Soils*[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1993.
- [5] Pintado X, Lloret A, Romero E. Assessment of the use of the vapour equilibrium technique in controlled-suction tests[J]. *Can Geotech J*, 2009, **46**(4): 411-423.
- [6] Philip J R, De Vries D A. Moisture movement in porous materials under temperature gradients[J]. *Transaction, American Geophysical Union*, 1957, **38**(2): 222-232.
- [7] Rutqvist J, Börgesson L, Chijimatsu M, Kobayashi A, Jing L, Nguyen T S, Noorishad J, Tsang C-F. Thermohydromechanics of partially saturated geological media: governing equations and formulation of four finite element models[J]. *Int J Rock Mech Min Sci*, 2001, **38**(1): 105-127.

- [8] Chijimatsu M, Fujita T, Kobayashi A, Nakano M. Experiment and validation of numerical simulation of coupled thermal, hydraulic and mechanical behaviour in the engineered buffer materials[J]. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 2000, **24**(4): 403-424.
- [9] Obeid W, Mounajed G, Alliche A. Mathematical formulation of thermo-hygro-mechanical coupling problem in non-saturated porous media[J]. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2001, **190**(39): 5105-5122.
- [10] Nguyen T S, Selvadurai A P S, Armand G. Modelling the FEBEX THM experiment using a state surface approach[J]. *Int J Rock Mech Min Sci*, 2005, **42**(5/6): 639-651.
- [11] 张玉军. 核废料处置概念库工程屏障中热-水-应力耦合过程数值分析[J]. *工程力学*, 2007, **24**(5): 186-192.
- [12] Gawin D, Baggio P, Schrefler B A. Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media[J]. *Int J Numer Meth Fluids*, 1995, **20**(8/9): 969-987.
- [13] Thomas H R, He Y, Onofrei C. An examination of the validation of a model of the hydro/thermo/mechanical behaviour of engineered clay barriers[J]. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 1998, **22**(1): 49-71.
- [14] Gens A, Garcia-Molinal A J, Olivella S, Alonso E E, Huertas F. Analysis of a full scale in situ test simulating repository conditions[J]. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 1998, **22**(7): 515-548.
- [15] Zhou Y, Rajiapakse R K N D, Graham J. Coupled fields in a deformable unsaturated medium [J]. *Int J Solids Struct*, 1999, **36**(31/32): 4841-4868.
- [16] Khalili N, Loret B. An elasto-plastic model for non-isothermal analysis of flow and deformation in unsaturated porous media: formulation[J]. *Int J Solids Struct*, 2001, **38**(46/47): 8305-8330.
- [17] Collin F, Li X L, Radu J P, Charlier R. Thermo-hydro-mechanical coupling in clay barriers [J]. *Eng Geol*, 2002, **64**(2/3): 179-193.
- [18] Gatmiri B, Hoor A. Effect of excavation on the thermo-hydro-mechanical behaviour of a geological barrier[J]. *Phys Chem Earth*, 2007, **32**(8/14): 947-956.
- [19] Chen Y F, Zhou C B, Jing L R. Modeling coupled THM processes of geological porous media with multiphase flow: theory and validation against laboratory and field scale experiments [J]. *Comput Geotech*, 2009, **36**(8): 1308-1329.
- [20] Tong F G, Jing L R, Zimmerman R W. A fully coupled thermo-hydro-mechanical model for simulating multiphase flow, deformation and heat transfer in buffer material and rock masses [J]. *Int J Rock Mech Min Sci*, 2010, **47**(2): 205-217.
- [21] 胡英. 物理化学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [22] 谢云, 陈正汉, 李刚. 考虑温度影响的重塑非饱和膨胀土非线性本构模型[J]. *岩土力学*, 2007, **28**(9): 1937-1942.
- [23] 陈正汉, 谢定义, 刘祖典. 非饱和土固结的混合物理论(I)[J]. *应用数学和力学*, 1993, **14**(2): 127-137.
- [24] 陈正汉, 黄海, 卢再华. 非饱和土的非线性固结模型和弹性固结模型及其应用[J]. *应用数学和力学*, 2001, **22**(1): 93-103.
- [25] 卢再华, 陈正汉, 方祥位, 郭剑锋, 周海清. 非饱和膨胀土的结构损伤模型及其在土坡多场耦合分析中的应用[J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(7): 781-788.
- [26] Bowen R M. *Theory of Mixtures*[M]. New York: Academic Press, 1976.
- [27] Hassanizadeh S M. Macroscopic description of multi-phase systems: thermodynamic theory of flow in porous media[D]. PhD Thesis. Princeton: Princeton University, Department of Civil

- Engineering, 1979.
- [28] 林宗涵. 热力学与统计物理学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2007.
- [29] Aitchison G D. Statement of review panel; engineering concepts of moisture equilibria and moisture changes in soils[C] // Aitchison G D. *Moisture Equilibria and Moisture Changes in Soils Beneath Covered Areas, A Symposium in Print*. Australia: Butterworths, 1965: 7-21.
- [30] Lide D R. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*[M]. Boca Raton: CRC Press, 2003.
- [31] Johansen O. Thermal conductivity of soils[D]. PhD Thesis. Trondheim: University of Trondheim, 1975.
- [32] Dean J A. *Lange's Handbook of Chemistry*[M]. New York: McGraw-Hill, 1999.
- [33] Gens A, Sánchez M, Sheng D C. On constitutive modelling of unsaturated soils[J]. *Acta Geotechnica*, 2006, 1(3): 137-147.
- [34] 白冰. 变温度荷载作用下半无限成层饱和介质的热固结分析[J]. *应用数学和力学*, 2006, 27(11): 1341-1348.

## Analysis of Coupled Thermo-Hydro-Mechanical Behavior of Unsaturated Soils Based on Theory of Mixtures I

QIN Bing<sup>1</sup>, CHEN Zheng-han<sup>1</sup>, FANG Zhen-dong<sup>1</sup>,  
SUN Shu-guo<sup>1</sup>, FANG Xiang-wei<sup>1</sup>, WANG Ju<sup>2</sup>

(1. *Department of Architectural and Civil Engineering, Logistical Engineering University, Chongqing 401311, P. R. China;*

2. *Beijing Research Institute of Uranium Geology, Beijing 100029, P. R. China*)

**Abstract:** An analysis of coupled thermo-hydro-mechanical behavior of unsaturated soils was presented based on theory of mixtures. Unsaturated soil was considered as a mixture composed of soil skeleton, liquid water, vapor, dry air and dissolved air. In addition to mass and momentum conservation equations of each component and energy conservation equation of the mixture, the system was closed using other 37 constitutive (or restriction) equations. In virtue of the requirement that the change in water chemical potential was identical with the change in vapor chemical potential, a thermodynamic restriction relationship for phase transition between pore water and pore vapor was formulated, in which the impact of the change in gas pressure on the phase transition was taken into account. Six final governing equations were given in incremental form in term of six primary variables, i. e. three displacement components of soil skeleton, water pressure, gas pressure and temperature. The processes involved in the coupled model included thermal expansions of soil skeleton and soil particle, Soret effect, phase transition between water and vapor, air dissolution in pore water, deformation of soil skeleton, etc.

**Key words:** unsaturated soils; temperature; thermo-hydro-mechanical; theory of mixtures