文章编号:1000-0887(2010)12-1496-07　　ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887

Hamilton-Jacobi-Bellman 方程的区域分解算法*

陈光华[1], 陈光明[2], 戴智华[1]

(1. 上海交通大学 安泰经济与管理学院,上海 200052;
2. 上海交通大学 机械与动力工程学院,上海 200240)

摘要: 对离散 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程提出了一类区域分解算法,并在合理的假设下证明了该算法的单调收敛性,数值结果表明该算法的有效性与准确性.

关 键 词: 最优控制; Hamilton-Jacobi-Bellman 方程; 变分不等式; 区域分解法; 收敛性
中图分类号: O175.29; O241.82　　**文献标志码:** A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.12.010

引　　言

Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程(也称为动态规划方程)在最优控制、金融工程等一些实际应用领域中出现[1-5]. 例如,在最优控制中的一类扩散过程问题,可采用动态规划方法表示为相应的 HJB 方程.

考虑如下的 HJB 方程:

$$\begin{cases} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant M}\{\boldsymbol{L}^i\boldsymbol{u}-\boldsymbol{f}^i\}=0, & 在\ \Omega\ 中, \\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}, & 在\ \partial\Omega\ 上, \end{cases} \tag{1}$$

上式中 Ω 是 R^n 中的一个有界区域,$\boldsymbol{L}^i(i=1,\cdots,M)$ 是二阶椭圆算子. 式(1)来源于一类随机控制问题[1].

在 HJB 方程的算法研究中,用有限差分法或有限元法对式(1)进行离散化[1-2,6-7],于是我们得到如下的离散 HJB 方程:求 $\boldsymbol{U}\in R^n$ 使得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant M}\{\boldsymbol{K}^i\boldsymbol{U}-\boldsymbol{F}^i\}=0, \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{K}^i\in R^{n\times n}$, $\boldsymbol{F}^i\in R^n(i=1,\cdots,M)$. 式(2)是一类完全非线性方程.

在本文中,我们主要研究的是问题(2)数值求解. 众所周知,区域分解法是求解偏微分方程离散问题的最重要的算法之一. 此方法的主要优点在于其高度并行性. 区域分解法的思想是将大的或复杂的计算区域分解为数个重叠型的或非重叠型的子域,计算的主要步骤是在各个子区域内同时独立进行的,计算任务可在并行机上实现. 关于各种类型的区域分解法相关内容概述可参见文献[8-10]. Sun[7]基于 Lions 和 Mercier 在文献[2]的算法建立了一个解 HJB 方程的区域分解法. Camilli 等[11]基于一类状态约束条件问题数值逼近,提出了一类求解一阶 HJB

---

* 收稿日期: 2010-07-13; 修订日期: 2010-10-28
作者简介: 陈光华(1977—),男,长沙人,博士生(联系人. E-mail: guanghuachen@sjtu.edu.cn).

方程的区域分解法. 最近, Zhou 和 Zou[12] 基于 Boulbrachene 和 Haiour 在文献[1]中的一类迭代算法给出了一个相应的区域分解法.

特别地, Zhou 和 Zhan[6] 基于与式(2)等价的一类拟变分不等式组提出了另一个区域分解法, 即求解下列变分不等式系统:

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}^{n+1,i} \in Q_i^n, \\ (\boldsymbol{K}^i\boldsymbol{U}^{n+1,i} - \boldsymbol{F}^i, \boldsymbol{V} - \boldsymbol{U}^{n+1,i}) \geqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{V} \in Q_i^{n+1}, \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$Q_i^{n+1} = \{\boldsymbol{V} \in R^n : \boldsymbol{V}_s \leqslant k\boldsymbol{e} + \boldsymbol{U}_s^{n,i+1}, \text{若 } s \in T \setminus T_j; \boldsymbol{V}_s = \boldsymbol{U}_s^{n,i}, \text{若 } s \in T_j\}, \tag{4}$$

$i = 1, \cdots, M$, $j = 1, 2$, $\boldsymbol{e} = (1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$, k 是一个足够小的正数, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ 且 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. T 表示给定区域 Ω 的点集, $T = T_1 \cup T_2$, T_j 表示与区域 $\Omega_j (j = 1, 2)$ 中网格点相对应的指标集.

式(3)为 Jacobi 型: 对于每一个 $\boldsymbol{U}^{n+1,i}$ 的求解, 利用到一个包含值 $\boldsymbol{U}^{n,i+1}$ 的障碍函数, 其中 $\boldsymbol{U}^{n,i+1}$ 为前一次主迭代中已计算得出的值(第 n 步). 本文中, 我们将利用 Gauss-Seidel 迭代替代 Jacobi 型[6] 来求解区域分解法的子问题. 数值结果表明我们所提出算法的有效性与准确性.

本文其余部分组织如下: 在第 1 节中, 基于式(3)提出了一类区域分解算法; 在第 2 节中, 在合理的假设条件下证明了该算法的收敛性; 在第 3 节中, 我们报告相关数值实验的结果; 最后, 在第 4 节中, 我们作出结论.

1　改进的区域分解法

在本部分中, 我们将回顾与本方法相关的一些概念和重要的结论.

式(2)存在唯一解且可用如下的一类离散变分不等式系统逼近[1]: 求 $\boldsymbol{U}^i \in Q^i$, 使得

$$(\boldsymbol{K}^i\boldsymbol{U}^i - \boldsymbol{F}^i, \boldsymbol{V} - \boldsymbol{U}^i) \geqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{V} \in Q^i, \ \boldsymbol{U}^{M+1} = \boldsymbol{U}^1, \tag{5}$$

其中, $Q^i = \{\boldsymbol{V} \in R^n \mid \boldsymbol{V} \leqslant k\boldsymbol{e} + \boldsymbol{U}^{i+1}\}$, $\boldsymbol{e} = (1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{K}^i \in R^{n \times n}$, $\boldsymbol{F}^i \in R^n (i = 1, 2, \cdots, M)$, k 是足够小的正数.

式(5)是一个有限维变分不等式系统, 已有很多方法可以求解此问题[14]. 并且, 众所周知式(5)等价于下列互补问题:

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}^i\boldsymbol{U}^i - \boldsymbol{F}^i \leqslant 0, \ \boldsymbol{U}^i \leqslant \boldsymbol{U}^{i+1} + k\boldsymbol{e}, \\ (\boldsymbol{K}^i\boldsymbol{U}^i - \boldsymbol{F}^i, \boldsymbol{U}^i - \boldsymbol{U}^{i+1} - k\boldsymbol{e}) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, M. \end{cases} \tag{6}$$

上式也可表示为

$$\max(\boldsymbol{K}^i\boldsymbol{U}^i - \boldsymbol{F}^i, \boldsymbol{U}^i - \boldsymbol{U}^{i+1} - k\boldsymbol{e}) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, M, \tag{7}$$

其中, $\boldsymbol{K}^i \in R^{n \times n}$, 和 $\boldsymbol{F}^i \in R^n$.

现在我们介绍式(7)的下解的概念:

定义 1　$\breve{\boldsymbol{U}}^i \in R^n (i = 1, 2, \cdots, M)$ 被称为式(7)的下解当且仅当下列条件成立时:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant M} \{\boldsymbol{K}^i\breve{\boldsymbol{U}}^i - \boldsymbol{F}^i, \breve{\boldsymbol{U}}^i - \breve{\boldsymbol{U}}^{i+1} - k\boldsymbol{e}\} \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, M, \tag{8}$$

用 $\boldsymbol{X}_0$ 表示式(7)的下解全体集合.

定义 2　实矩阵 $(a_{ij})_{n \times n}$ 称为 M 阵, 如果 $a_{ij} \leqslant 0 (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 且所有顺序主子式为正.

现在我们给出算法. 我们考虑将一个区域 Ω 分解为一个任意数 $m (\geqslant 2)$ 个非重叠型子域的区域, 即 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \Omega_m$, 且 $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing, i \neq j$. 令 E_h 表示区域 Ω 中的内点数, T 表示从 1 到 E_h 的全体指标的集合, $T_1, T_2, \cdots, T_m$ 分别表示 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_m$ 中内点的指标, 于是我们有 $T = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_m$, 用 $\breve{\boldsymbol{U}}^n = (\breve{\boldsymbol{U}}^{n,1}, \breve{\boldsymbol{U}}^{n,2}, \cdots, \breve{\boldsymbol{U}}^{n,M})$ 在迭代步 n 的精确解 $\boldsymbol{U}$ 的逼近值, 我们

作如下假设：

$$F^i \geqslant 0, \tag{9}$$

$$K^i, \qquad i = 1,2,\cdots,M \text{ 为 } M \text{ 阵}. \tag{10}$$

假设(10)是合理的,若采用适当的有限元方法就可使该假设条件成立[15].

算法 MDDM

步 1　初值选取：$\breve{U}^0 \in X_0, \varepsilon > 0, n := 0, i := 1$；

步 2　并行计算：并行求解下列子问题当 $j = 1,\cdots,m$：

求 $\breve{U}^{n+1,i}_{j,\mathrm{new}} \in Q^{n+1,i}_j$ 使得

$$\begin{cases} (K^i \breve{U}^{n+1,i}_{j,\mathrm{new}} - F^i, V - \breve{U}^{n+1,i}_{j,\mathrm{new}}) \geqslant 0, \qquad \forall V \in Q^{n+1,i}_j, \\ \breve{U}^{n+1,0}_{\mathrm{new}} = \breve{U}^{n,M}_{\mathrm{old}}, \\ Q^{n+1,i}_j = \{ V \in R^n : V_s \leqslant k\boldsymbol{e} + \breve{U}^{n+1,i-1}_{s,\mathrm{new}}, \text{若 } s \in T_j; V_s = \breve{U}^{n,i}_{s,\mathrm{old}}, \text{若 } s \in T \backslash T_j \}; \end{cases} \tag{11}$$

步 3　计算 $\breve{U}^{n+1,i}_{\mathrm{new}}$：$\breve{U}^{n+1,i}_{\mathrm{new}} = \max_j \{ \breve{U}^{n+1,i}_{j,\mathrm{new}} \}$，若 $i = M$ 则至步 4；否则，令 $i := i + 1$ 且至步 2；

步 4　停止准则：若 $\| \breve{U}^{n+1}_{\mathrm{new}} - \breve{U}^{n}_{\mathrm{new}} \| \leqslant \varepsilon$，其中 ε 是一个给定的阈值，则停止并输出 $\breve{U}^{n+1}_{\mathrm{new}}$；否则，令 $n := n + 1$，且返回步 2.

评论 1　子问题(11)等价于下列系统：

当 $j = 1,\cdots,m$，

$$\begin{cases} \breve{U}^{n+1,i}_{s,\mathrm{new}} = \breve{U}^{n,i}_{s,\mathrm{old}}, \qquad \text{当 } s \in T \backslash T_j, \\ \max\{ (K^i \breve{U}^{n+1,i}_{s,\mathrm{new}} - F^i)_s, \breve{U}^{n+1,i}_{s,\mathrm{new}} - \breve{U}^{n+1,i-1}_{s,\mathrm{new}} - k\boldsymbol{e} \} = 0, \qquad \text{当 } s \in T_j. \end{cases} \tag{12}$$

评论 2　与 Zhou 和 Zhan 的文献[6]对比而言，本文的不同之处在于：在主迭代程序步 2 中，为计算新的逼近值 $\breve{U}^{n+1,i}$，我们的算法利用了最新的值 $\breve{U}^{n+1,i-1}$ 而非前一次的值 $\breve{U}^{n,i+1}$[6].

2　算法 MDDM 的收敛性分析

在本部分中，我们在假设条件(9)与(10)下证明算法的收敛性. 我们的证明方法与 Boulbrachene 和 Haiour 在文献[1]中的方法显著不同，而与 Zhou 和 Zhan 在文献[6]及周和陈在文献[13]中的方法类似.

引理 1　假设 K^i 是一个 M 阵，$H^i = \{ V \in R^n \mid V \leqslant \boldsymbol{\varphi}^i \}$，若 $\boldsymbol{\varphi}^2 \geqslant \boldsymbol{\varphi}^1$，$W^n, U^n \in H^i$ 且 $(K^i U^i - F^i, V - U^i) \geqslant 0, \forall V \in H^i (i = 1,2)$，则 $W^{n+1} \geqslant U^{n+1}$.

定理 1　若假设(9)和(10)及引理 1 成立，令数列 $\{ \breve{U}^{n+1} \}$ 是由算法 MDDM 产生的，$\breve{U}^0 \in X_0$ 且 $\breve{U}^*$ 为问题(7) 的精确解，则数列 $\{ \breve{U}^{n+1} \}$ 单调收敛于 $\breve{U}^*$.

证明　由步 1，我们知初始值 $\breve{U}^0$ 是式(7)的一个下解，则有

$$\max\{ K^i \breve{U}^{0,i} - F^i, \breve{U}^{0,i} - \breve{U}^{0,i+1} - F^i \} \leqslant 0, \qquad i = 1,\cdots,M. \tag{13}$$

另外，易证 $\breve{U}^0 = \{0,\cdots,0\}$ 满足式(13)，即 $\breve{U}^0 = \{0,\cdots,0\} \in X_0$. 为了便于表达，我们取初始值 $\breve{U}^0 = \{0,\cdots,0\}$.

首先，我们用数学归纳法证明算法 MDDM 的单调性.

我们先证 $\breve{U}^1 \geqslant \breve{U}^0$，即证 $\breve{U}^{1,i} \geqslant \breve{U}^{0,i}$，$i = 1,\cdots,M$.

我们令 $J = \{ s \in T_1 : \breve{U}^{1,1}_{j,s} - \breve{U}^{1,0}_s - k\boldsymbol{e} = 0 \}$ 且 $T_1 \backslash J = \{ s \in T_1 : \breve{U}^{1,1}_{j,s} - \breve{U}^{1,0}_s - k\boldsymbol{e} < 0 \}$，则 $T = (T \backslash T_1) \cup (T_1 \backslash J) \cup J$，注意到 k 是一个小的正数，$\boldsymbol{e} = (1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，且 $\breve{U}^{1,0} = \breve{U}^{0,M} = \boldsymbol{0}$，则由 J 的定义，我们有

$$\breve{U}^{1,1}_{j,s} = k\boldsymbol{e} + \breve{U}^{1,0}_s = k\boldsymbol{e} + \breve{U}^{0,M}_s = k\boldsymbol{e} \geqslant \breve{U}^{0,1}_s, \qquad \text{当 } s \in J. \tag{14}$$

由算法 MDDM 步 2 我们知

$$\breve{U}_{j,s}^{1,1}=\breve{U}_{s}^{0,1},\qquad \text{当 } s\in T\backslash T_1, \tag{15}$$

且

$$\breve{U}_{j,s}^{1,1}<k\boldsymbol{e}+\breve{U}_{s}^{1,0},\qquad \text{当 } s\in T_1\backslash J. \tag{16}$$

基于式(12)和(16),有

$$\max\{(\boldsymbol{K}_s^i\breve{U}_{j,s}^{1,1}-\boldsymbol{F}_s^i)_s,\breve{U}_{j,s}^{1,1}-\breve{U}_{s}^{1,0}-k\boldsymbol{e}\}=0,\qquad \text{当 } s\in T_1\backslash J. \tag{17}$$

于是

$$\boldsymbol{K}_s^i\breve{U}_{j,s}^{1,1}=\boldsymbol{F}_s^i,\qquad \text{当 } s\in T_1\backslash J. \tag{18}$$

另一方面,由于 $\breve{U}^0$ 为式(7)的一个下解,我们知

$$\boldsymbol{K}_s^i\breve{U}_{s}^{0,1}\leqslant\boldsymbol{F}_s^i,\qquad \text{当 } s\in T_1\backslash J. \tag{19}$$

由式(18)和(19)得

$$\boldsymbol{K}_s^i\breve{U}_{j,s}^{1,1}\geqslant\boldsymbol{K}_s^i\breve{U}_{s}^{0,1},\qquad \text{当 } s\in T_1\backslash J. \tag{20}$$

我们用 $\boldsymbol{\Gamma}_L$ 表示 $\boldsymbol{\Gamma}$ 对应于指标集 L 的子向量,$\boldsymbol{\Gamma}_{L,P}$ 表示 $\boldsymbol{\Gamma}$ 对应于 L 行和 P 列的子矩阵.

显而易见,式(20)等价于下式:

$$\boldsymbol{K}_{T_1\backslash J,T}^i(\breve{U}_j^{1,1}-\breve{U}^0)_{T_1\backslash J,T}\geqslant 0$$

即

$$\boldsymbol{K}_{T_1\backslash J,T_1\backslash J}^i(\breve{U}^{1,1,j}-\breve{U}^{0,1})_{T_1\backslash J}+\boldsymbol{K}_{T_1\backslash J,T\backslash T_1}^i(\breve{U}_j^{1,1}-\breve{U}^{0,1})_{T\backslash T_1}+\boldsymbol{K}_{T_1\backslash J,J}^i(\breve{U}_j^{1,1}-\breve{U}^{0,1})_J\geqslant 0. \tag{21}$$

由式(15)可以得到

$$\boldsymbol{K}_{T_1\backslash J,T\backslash T_1}^i(\breve{U}_j^{1,1}-\breve{U}^{0,1})_{T\backslash T_1}=0. \tag{22}$$

根据 M 阵 $\boldsymbol{K}^i$ 的性质,我们知道

$$\boldsymbol{K}_{T_1\backslash J,J}^i\leqslant 0.$$

上式联立式(14)一起表明

$$\boldsymbol{K}_{T_1\backslash J,J}^i(\breve{U}_j^{1,1}-\breve{U}^{0,1})_J<0. \tag{23}$$

该式满足 M 阵 $\boldsymbol{K}^i$ 的性质,即

$$\boldsymbol{K}_{T_1\backslash J,T_1\backslash J}^i\geqslant 0.$$

于是,由式(21)~(23),我们得到

$$\boldsymbol{K}_{T_1\backslash J,T_1\backslash J}^i\breve{U}_{j,T_1\backslash J}^{1,1}\geqslant\boldsymbol{K}_{T_1\backslash J,T_1\backslash J}^i\breve{U}_{T_1\backslash J}^{0,1}, \tag{24}$$

则

$$\breve{U}_{j,s}^{1,1}\geqslant\breve{U}_{s}^{0,1},\qquad \text{当 } s\in T_1\backslash J. \tag{25}$$

上式结合式(14)、(15)可得到

$$\breve{U}_{j}^{1,1}\geqslant\breve{U}^{0,1},\qquad \text{当 } j=1,\cdots,m. \tag{26}$$

由式(26),我们知

$$\breve{U}^{1,1}=\max\{\breve{U}_j^{1,1}\}\geqslant\breve{U}^{0,1}.$$

我们采用和前面相类似的讨论方法可得到

$$\breve{U}^{1,i}\geqslant\breve{U}^{0,i},\qquad i=1,2,\cdots,M. \tag{27}$$

上式表明

$$\breve{U}^1\geqslant\breve{U}^0. \tag{28}$$

下面,假设 $\breve{U}^n\geqslant\breve{U}^{n-1}$ 成立时,我们将证明 $\breve{U}^{n+1}\geqslant\breve{U}^n$ 也成立.

假设下式成立:

$$\breve{U}^{n,i}\geqslant\breve{U}^{n-1,i},\qquad i=1,2,\cdots,M. \tag{29}$$

注意到 $\breve{\boldsymbol{U}}_{j,s}^{n+1,0}=\breve{\boldsymbol{U}}_{j,s}^{n,M},\breve{\boldsymbol{U}}_{j,s}^{n,0}=\breve{\boldsymbol{U}}_{j,s}^{n-1,M}$ 与式(11),我们可得到

$$\begin{cases}\max\{(\boldsymbol{K}^i\breve{\boldsymbol{U}}_j^{n+1,1}-\boldsymbol{F}^i)_s,\breve{\boldsymbol{U}}_{j,s}^{n+1,1}-\breve{\boldsymbol{U}}_{j,s}^{n,M}-k\boldsymbol{e}\}=0, & \text{当 } s\in T,\\ \breve{\boldsymbol{U}}_{j,s}^{n+1,1}\leqslant\breve{\boldsymbol{U}}_{j,s}^{n,M}+k\boldsymbol{e}, & \text{当 } s\in T.\end{cases}\tag{30}$$

$$\begin{cases}\max\{(\boldsymbol{K}^1\breve{\boldsymbol{U}}_j^{n,1}-\boldsymbol{F}^1)_s,\breve{\boldsymbol{U}}_{j,s}^{n,1}-\breve{\boldsymbol{U}}_{j,s}^{n-1,M}-k\boldsymbol{e}\}=0, & \text{当 } s\in T,\\ \breve{\boldsymbol{U}}_j^{n,1}\leqslant\breve{\boldsymbol{U}}_{j,s}^{n-1,M}+k\boldsymbol{e}, & \text{当 } s\in T.\end{cases}\tag{31}$$

根据式(30)和(31)及引论 1,得到

$$\breve{\boldsymbol{U}}_s^{n+1,1}\geqslant\breve{\boldsymbol{U}}_s^{n,1},\qquad \text{当 } s\in T.\tag{32}$$

类似易证

$$\breve{\boldsymbol{U}}^{n+1,i}\geqslant\breve{\boldsymbol{U}}^{n,i},\qquad \text{当 } i=1,\cdots,M.$$

最后,通过类似的论证方法,得到

$$\breve{\boldsymbol{U}}^0\leqslant\breve{\boldsymbol{U}}^1\leqslant\breve{\boldsymbol{U}}^2\leqslant\cdots\leqslant\breve{\boldsymbol{U}}^n\leqslant\breve{\boldsymbol{U}}^{n+1}\leqslant\cdots.\tag{33}$$

单调性证明完毕.

下面我们将证明数列 $\{\breve{\boldsymbol{U}}^{n+1}\}$ 单调递增收敛于精确解 $\breve{\boldsymbol{U}}^*$.

假设存在 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 和 $\breve{\boldsymbol{U}}^{n,i}$,分别满足 $\boldsymbol{K}^i\tilde{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{F}^i$,和 $\boldsymbol{K}^i\breve{\boldsymbol{U}}^{n,i}-\boldsymbol{F}^i\leqslant 0$,考虑到 M 阵的性质,我们很容易推导出 $\{\breve{\boldsymbol{U}}^n\}$ 有个上界 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$. 由于单调数列 $\{\breve{\boldsymbol{U}}^n\}$ 有界,故其存在一个极限值,即存在一个值 $\breve{\boldsymbol{U}}^*$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\breve{\boldsymbol{U}}^n=\breve{\boldsymbol{U}}^*.\tag{34}$$

最后,我们证明 $\breve{\boldsymbol{U}}^*$ 是式(7)的唯一解. 根据式(7),可以得到

$$\max\{\boldsymbol{K}^i\breve{\boldsymbol{U}}^{n,i}-\boldsymbol{F}^i,\breve{\boldsymbol{U}}^{n,i}-\breve{\boldsymbol{U}}^{n,i+1}-\boldsymbol{F}^i\}=0.\tag{35}$$

上式中令 $n\to\infty$ 且注意到式(34),于是得到

$$\max\{\boldsymbol{K}^i\breve{\boldsymbol{U}}^{*,i}-\boldsymbol{F}^i,\breve{\boldsymbol{U}}^{*,i}-\breve{\boldsymbol{U}}^{*,i+1}-\boldsymbol{F}^i\}=0.\tag{36}$$

上式表明 $\breve{\boldsymbol{U}}^*$ 是式(7)的唯一解,证明完毕.

3 数 值 实 验

在本节,我们报告所提出算法的数值结果. 我们考虑采用 Hoppe 在文献[16]中的算例 2,取计算区域 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$.

$$K^1=-(x+6)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-(x+6)(y+2)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-(y+2)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+$$
$$[0.5(x+6)-4]\frac{\partial}{\partial x}+0.5(y+2)\frac{\partial}{\partial y}+1,$$
$$K^2=-(x+6)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-0.8(x+6)(y+2)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-0.75(y+2)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+$$
$$[(x+6)-2]\frac{\partial}{\partial x}+(y+2)\frac{\partial}{\partial y}+4.$$

函数 $\boldsymbol{F}^1,\boldsymbol{F}^2$ 满足

$$\boldsymbol{F}^1=\boldsymbol{F}^2=\max(\boldsymbol{K}^1\breve{\boldsymbol{U}},\boldsymbol{K}^2\breve{\boldsymbol{U}}),$$
$$\breve{\boldsymbol{U}}^*=\sin\pi x\sin\pi y,$$

$\breve{\boldsymbol{U}}^*$ 为区域为 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ 的离散 HJB 方程的精确解.

应用有限差分法对上述二阶导数进行离散:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\approx h^{-2}D_{h,x}^{+}D_{h,x}^{-},\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\approx h^{-2}D_{h,y}^{+}D_{h,y}^{-},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\approx\frac{1}{2}h^{-2}[D_{h,x}^{+}D_{h,y}^{+}+D_{h,x}^{-}D_{h,y}^{-}],$$

其中，$D_{h,x}^{\pm}$，$D_{h,y}^{\pm}$ 分别表示点 x，y 处的向前、向后差分，h 表离散步长。下文中，我们称式(3)为 Jacobi 型，分别用 Jacobi 型算法与算法 MDDM 求解上述离散问题。取 $k=0.01$，收敛阈值为 $\varepsilon=10^{-6}$，初始值为 $\breve{\boldsymbol{U}}^0=\{0,\cdots,0\}$。

表 1　残差 $R=\max_{1\leqslant i\leqslant M}\{\boldsymbol{K}^i\breve{\boldsymbol{U}}^{n,i}-\boldsymbol{F}^i\}$ 的无穷范数($h=1/20$)

迭代数 n	$\Vert R\Vert_\infty$	
	Jacobi 型算法	算法 MDDM
1	2.186 4E-09	1.734 8E-09
4	1.954 8E-10	1.662 4E-10
6	1.733 5E-10	1.493 1E-10
10	1.368 1E-11	1.217 2E-11
14	1.130 7E-12	1.009 2E-12

表 3　在网格点 $(x,y)^{\mathrm T}=(0.5,0.25)^{\mathrm T}$ 处的值 $\breve{\boldsymbol{U}}^{n,i}$

迭代数 n	Jacobi 型算法	算法 MDDM
1	0.052 921 13	0.064 031 57
2	0.079 181 26	0.096 294 21
3	0.152 638 92	0.186 127 46
最终迭代	0.708 435 96	0.708 435 61

表 2　不同离散步长 h 时的迭代次数

步长 h	迭代数 n	
	Jacobi 型算法	算法 MDDM
1/20	38	16
1/40	53	30
1/80	97	49
1/100	148	63
1/200	306	124

表 1 分别表明两个算法的残差，此时步长 $h=1/20$。从该表中可看出，当算法运算最后终止时，算法 MDDM 的 $\Vert R\Vert_\infty$ 小于 Jacobi 型算法的 $\Vert R\Vert_\infty$。

表 2 表明两算法在取不同步长 h 时的迭代数。从表中可以看出，在相同步长的条件下，算法 MDDM 的迭代数小于 Jacobi 型的迭代数。而且随着 h 越小则迭代次数越大。

表 3 表明的是在网格点 $(x,y)^{\mathrm T}=(0.5,0.25)^{\mathrm T}$ 处的值 $\breve{\boldsymbol{U}}^{n,i}$。其精确值为 $\breve{\boldsymbol{U}}^*=0.707\ 11$。从表中我们可看出算法 MDDM 与 Jacobi 型算法具有同样的收敛性。另外，表 3 也表明了两算法的单调性。

4　结　　论

在本文中，我们考虑了一类离散 HJB 方程的区域分解法。在合理假设条件(9)、(10)下证明了该算法的收敛性。数值结果表明了我们所提出的算法的有效性与准确性。

致谢　本文作者非常感谢周叔子教授及贵刊编辑给予本文的许多有价值的指导与建议！

参考文献：

[1]　Boulbrachene M, Haiour M. The finite element approximation of Hamilton-Jacobi-Bellman equations[J]. *Comput Math Appl*, 2001, **41**(7/8): 993-1007.

[2]　Lions P L, Mercier B. Approximation numerique des equations de Hamilton-Jacobi-Bellman [J]. *RAIRO Anal Numer*, 1980, **14**(4): 369-393.

[3]　Li W, S Wang. Penalty approach to the HJB equation arising in European stock option pricing with proportional transaction costs[J]. *J Optim Theory Appl*, 2005, **143**(2): 279-293.

[4]　Lions P L. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations Part 1 [J]. *Communications in Partial Differential Equations*, 1983, **8**(10): 1101-1174.

[5]　Bardi M, Capuzzo-Dolcetta J. *Optimal Control and Viscosity Solution of Hamilton-Jacobi-*

Bellman Equations[M]. Boston: Birkhäuser, 1997.

[6] ZHOU Shu-zi, ZHAN Wu-ping. A new domain decomposition method for an HJB equation [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003, **159**(1): 195-204.

[7] Sun M. Domain decomposition algorithms for solving Hamilton-Jacobi-Bellman equations[J]. *Numer Funct Anal Optim*, 1993, **14**(1/2): 145-166.

[8] Quarteroni A, Valli A. *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations* [M]. New York: Oxford Science, 1999.

[9] Smith B F, Bjørstad P E, Gropp W. *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*[M]. New York: Cambridge University Press, 1996.

[10] Toselli A, Widlund O. *Domain Decomposition Methods-Algorithms and Theory*[M]. Springer Series in Computational Mathematics, vol **34**. Berlin: Springer, 2004.

[11] Camilli F, Falcone M, Lanucara P, Seghini A. A domain decomposition method for Bellman equations[C]// Keyes D E, Xu J C. *Proceedings of DDM* 7. AMS, Providence, 1994: 477-484.

[12] Zhou S, Zou Z Y. An iterative algorithm for a quasivariational inequality systemrelated to HJB equation[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, **219**(1): 1-8.

[13] 周叔子,陈光华. 解离散 HJB 方程的一个单调迭代法[J]. 应用数学, 2005, **18**(4): 639-643.

[14] Glowinski R, Lions J L, Tremolieres R. *Numerical Analysis of Variational Inequalities*[M]. Amsterdam: North-Holland, 1981.

[15] Ciarlet P G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*[M]. Amsterdam: North-Holland, 1978.

[16] Hoppe R H W. Multigrid methods for Hamilton-Jacobi-Bellman equations[J]. *Numer Math*, 1986, **49**(2/3): 239-254.

Modified Domain Decomposition Method for Hamilton-Jacobi-Bellman Equations

CHEN Guang-hua[1], CHEN Guang-ming[2], DAI Zhi-hua[1]

(1. *Antai College of Economics & Management*, *Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200052, *P. R. China*;

2. *School of Mechanical Engineering*, *Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200240, *P. R. China*)

Abstract: A modified domain decomposition method for the numerical solution of discrete Hamilton-Jacobi-Bellman equations arising from a class of optimal controls with diffusion models. The convergence theorem was established. Numerical results indicate the efficiency and accuracy of the method.

Key words: optimal control; discrete Hamilton-Jacobi-Bellman equations; variational inequality; modified domain decomposition method; convergence