

无小参数系统的混沌与亚谐共振*

刘延彬, 陈予恕, 曹庆杰

(哈尔滨工业大学 航天学院 137 信箱, 哈尔滨 150001)

(本刊编委陈予恕来稿)

摘要: Melnikov 方法是判别混沌和亚谐共振的一种重要方法. 传统的 Melnikov 方法依赖于小参数, 在大多数实际物理系统中, 小参数是不存在的. 因此, 传统的 Melnikov 方法不能应用于强非线性系统. 为了摆脱小参数对 Melnikov 方法的限制, 采用同伦分析将 Melnikov 方法拓展到强非线性系统, 且采用该方法研究了一个强非线性系统的亚谐共振与混沌, 解析结果和数值结果相互吻合, 说明了该方法的有效性.

关键词: 同伦; Melnikov 函数; 混沌; 亚谐共振

中图分类号: O193; O322 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.01.001

引 言

在过去的一个世纪中,人们研究了大量的带有小参数的非线性动力系统,揭示了许多非线性现象. 在处理亚谐共振和混沌中, Melnikov 函数具有重要的地位,它揭示了同宿轨分岔及平衡截相交的条件. Melnikov 首先提出该方法^[1], 因此被称为 Melnikov 方法. Anorlnd 将 Melnikov 方法推广到一个两自由度完全可积的 Hamilton 系统中^[1]. Holmes 按照 Melnikov 的思想系统地发展了一套处理这类系统的 Smale 马蹄和亚谐共振的方法^[2]. Greenspan 和 Holmes^[3]采用范函分析的方法将 Melnikov 方法推广到无穷维动力系统. Wiggins^[4]将 Melnikov 方法推广到一类随机强迫多自由度非线性系统, 计算了 Melnikov 随机过程. Wiggins^[4]将 Melnikov 理论推广到具有复函数的常微分方程中, 给出了同宿轨道存在的充分条件. Wiggins^[4]给出了高维 Melnikov 函数, 该方法与原始的 Melnikov 方法一样都是给出了双曲不动鞍点的稳定流形和不稳定流形横截相交的必要条件. 不幸的是上述方法均强烈依赖于小参数, 而大多数实际物理系统中是不存在小参数的, 因此传统的 Melnikov 方法在处理实际问题是受到限制的.

本文为了避免 Melnikov 方法中的小参数影响, 用同伦分析技术^[5-9]推导出无小参数的非线性方程的亚谐 Melnikov 函数及同宿轨(异宿轨)的 Melnikov 函数, 以便处理无小参数的非线性动力系统混沌及亚谐共振问题.

* 收稿日期: 2010-09-15; 修订日期: 2010-12-07

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(10632040)

作者简介: 刘延彬(1974—), 男, 哈尔滨人, 博士(E-mail: d_lyb@126.com);

陈予恕(1932—), 男, 山东肥城人, 教授, 院士(联系人. E-mail: yschen@hit.edu.cn).

1 同伦方程

考虑如下系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega t), \quad \mathbf{x} \in R^2, \quad (1)$$

其中, $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega t)$ 为时间 t 的周期函数, 且周期为 T_ω . 可以建立如下同伦方程:

$$\dot{\mathbf{x}} = (1 - \hbar p)\mathbf{f}(\mathbf{x}) + p\hbar\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega t), \quad (2)$$

其中 $p \in [0, 1]$ 为同伦参数, \mathbf{f} 为完全可积函数.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

方程(2)可以写为

$$\dot{\mathbf{x}} = (1 - \hbar p)\mathbf{f}(\mathbf{x}) + p\hbar\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega t). \quad (4)$$

令

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \hbar[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x})] = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \omega t) \\ g_2(x_1, x_2, \omega t) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

可以得到

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + p\mathbf{g}(\mathbf{x}, \omega t), \quad \mathbf{x} \in R^2, \quad (6)$$

其中, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \omega t)$ 是以时间 t 为周期的, 其周期为 T_ω . 当 $p = 1, \hbar = 1$ 时, 方程(6) 成为方程(1).

当 $p = 0$ 时, 完全可积方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^2. \quad (7)$$

设 $\mathbf{x}(t, p)$ 为方程(6)的解, 将其 Taylor 级数展开可得

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t, p) = \mathbf{x}(t, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \frac{p^n}{n!}, \\ u_n(t) = \left. \frac{\partial^n \mathbf{x}(t, p)}{\partial p^n} \right|_{p=0}. \end{cases} \quad (8)$$

当 p 从 0 增加到 1 时, $\mathbf{x}(t, p)$ 从方程(7) 的解变化到方程(1) 的解. 当 $p = 1$, 方程(8) 成为

$$\mathbf{x}(t, p) = \mathbf{x}(t, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(t)}{n!}. \quad (9)$$

2 同伦 Melnikov 函数

若方程(7)具有过双曲鞍点同宿轨, 设其解为 $\mathbf{x}_H(t - \tau)$. 当受到扰动时, 方程(6) 的双曲鞍点 P 的稳定流形和不稳定流形 \bar{P} 不再重合, 在同宿轨附近的稳定流形的解为 $\mathbf{x}_s(t, p, \tau)$, 不稳定流形的解为 $\mathbf{x}_u(t, p, \tau)$. 在 $p = 0$ 点, 将其展成级数形式

$$\begin{cases} \mathbf{x}_s(t, p, \tau) = \mathbf{x}_H(t - \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_s^{(n)}(t, \tau) \frac{p^n}{n!}, \\ \mathbf{x}_u(t, p, \tau) = \mathbf{x}_H(t - \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_u^{(n)}(t, \tau) \frac{p^n}{n!}, \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{x}_s^{(n)}(t, \tau) = \frac{\partial^n \mathbf{x}_s(t, p, \tau)}{\partial p^n}, \\ \mathbf{x}_u^{(n)}(t, \tau) = \frac{\partial^n \mathbf{x}_u(t, p, \tau)}{\partial p^n}. \end{cases} \quad (11)$$

当 $p = 1$ 时, 方程(11)成为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_s(t, 1, \tau) = \mathbf{x}_H(t - \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{x}_s^{(n)}(t, \tau)}{n!}, \\ \mathbf{x}_u(t, 1, \tau) = \mathbf{x}_H(t - \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{x}_u^{(n)}(t, \tau)}{n!}. \end{cases} \quad (12)$$

方程(12)是方程(1)的解序列, 且方程(12)的一阶近似解可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_s(t, 1, \tau) = \mathbf{x}_H(t - \tau) + \mathbf{x}_s^{(1)}(t, \tau), \\ \mathbf{x}_u(t, 1, \tau) = \mathbf{x}_H(t - \tau) + \mathbf{x}_u^{(1)}(t, \tau). \end{cases} \quad (13)$$

在 t 时刻, 方程(7)的同宿轨道和方程(6)中的不稳定流形之间的距离为

$$\mathbf{d}(t, \tau) = \mathbf{x}_s(t, 1, \tau) - \mathbf{x}_u(t, 1, \tau) = \mathbf{x}_s^{(1)}(t, 1, \tau) - \mathbf{x}_u^{(1)}(t, 1, \tau). \quad (14)$$

\mathbf{N} 为 $\mathbf{x}_H(t - \tau)$ 在时刻 t 的法线, 且

$$\mathbf{N}(t, \tau) = \{ -f_2[\mathbf{x}_H(t - \tau)], f_1[\mathbf{x}_H(t - \tau)] \}. \quad (15)$$

因此

$$d_N(t, \tau) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{f} \wedge \mathbf{d} = d_N^s(t, \tau) - d_N^u(t, \tau), \quad (16)$$

其中

$$\begin{cases} d_N^s(t, \tau) = \mathbf{f} \wedge \mathbf{x}_s^{(1)}(t, \tau), \\ d_N^u(t, \tau) = \mathbf{f} \wedge \mathbf{x}_u^{(1)}(t, \tau). \end{cases} \quad (17)$$

\wedge 定义为: 对于 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T$ 有 $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$. 对 d_N^s 取时间微分,

$$\dot{d}_N^s(t, \tau) = \dot{\mathbf{f}} \wedge \mathbf{x}_s^{(1)}(t, \tau) + \mathbf{f} \wedge \dot{\mathbf{x}}_s^{(1)}(t, \tau), \quad (18)$$

方程(6)对 p 求偏导数得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial p} \right) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_s, t)}{\partial \mathbf{x}_s} \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial p} + \mathbf{g}(\mathbf{x}_s, t) + p \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}_s, p, t)}{\partial \mathbf{x}_s} \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial p}. \quad (19)$$

当 $p = 0$ 时, 由式(6), 式(13)和式(19)得到

$$\dot{\mathbf{x}}_s^{(1)} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_H, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}_s^{(1)} + \mathbf{g}(\mathbf{x}_H, t) = \mathbf{Df} \cdot \mathbf{x}_s^{(1)} + \mathbf{g}(\mathbf{x}_H, \omega t). \quad (20)$$

其中 \mathbf{Df} 在 \mathbf{x}_H 处计算. 将式(20)带入式(18)可得

$$\dot{d}_N^s = \mathbf{Df} \cdot \mathbf{f} \wedge \mathbf{x}_s^{(1)} + \mathbf{f} \wedge \mathbf{Df} \cdot \mathbf{x}_s^{(1)} + \mathbf{f} \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}_H, \omega t). \quad (21)$$

方程(21)可以写为

$$\dot{d}_N^s = \text{tr}(\mathbf{Df}) \wedge \mathbf{x}_s^{(1)} + \mathbf{f} \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}_H, \omega t). \quad (22)$$

由方程(6)可以证明 $\text{tr}(\mathbf{Df}) = 0$, 所以方程(22)成为

$$\dot{d}_N^s = \mathbf{f} \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}_H, \omega t). \quad (23)$$

对式(23)从 τ 到 ∞ 积分可得

$$\dot{d}_N^s(+\infty, \tau) - \dot{d}_N^s(\tau, \tau) = \int_{\tau}^{+\infty} [\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}_H, \omega t)] dt. \quad (24)$$

由于 P 为方程(9)的平衡点,所以

$$d_N^s(+\infty, \tau) = f[\mathbf{x}_H(+\infty - \tau)] \wedge \mathbf{x}_s^1 = f(P) \wedge \mathbf{x}_s^1 = 0. \quad (25)$$

由方程(24)和方程(25)可得

$$d_N^s(\tau, \tau) = - \int_{\tau}^{+\infty} f \wedge g(\mathbf{x}_H, \omega t) dt. \quad (26)$$

同理可得

$$d_N^u(\tau, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} f \wedge g(\mathbf{x}_H, \omega t) dt. \quad (27)$$

同伦 Melnikov 函数可以定义为

$$M(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f[\mathbf{x}_H(t)] \wedge g[\mathbf{x}_H(t), \omega t - \tau] dt. \quad (28)$$

异宿轨道和同宿轨道的情况相同,通过类似的分析可以得到式(28).

3 同伦 Melnikov 亚谐函数

方程的(6)可以写成

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + pg_1(x, y, \omega t), \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + pg_2(x, y, \omega t), \end{cases} \quad (29)$$

其中, $\omega = 2\pi/T_\omega$. 方程(29)的完全可积系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y), \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y). \end{cases} \quad (30)$$

方程(30)的周期为 T . 对于方程(30)采用无扰动时的角变换,该变换满足

$$\begin{cases} \dot{I} = \frac{\partial I}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial I}{\partial y} \dot{y}, \\ \dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \dot{y}. \end{cases} \quad (31)$$

将方程(31)带入方程(29)可以得到

$$\begin{cases} \dot{I}(p) = \left(\frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + p \left(\frac{\partial I}{\partial x} g_1 + \frac{\partial I}{\partial y} g_2 \right), \\ \dot{\theta}(p) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + p \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} g_1 + \frac{\partial \theta}{\partial y} g_2 \right). \end{cases} \quad (32)$$

且

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} = \Omega(I), \end{cases} \quad (33)$$

方程(32)成为

$$\begin{cases} \dot{I}(p) = pF(I, \theta, t), \\ \dot{\theta}(p) = \Omega(I) + pG(I, \theta, t), \end{cases} \quad (34)$$

其中

$$\begin{cases} F = \frac{\partial I}{\partial x} g_1 + \frac{\partial I}{\partial y} g_2, \\ G = \frac{\partial I}{\partial x} g_1 + \frac{\partial I}{\partial y} g_2. \end{cases} \quad (35)$$

F 和 G 为 t 的周期函数, 且周期为 2π . 当 $p = 1$ 时, 由方程(34)可得

$$\begin{cases} \dot{I}(1) = F(I, \theta, t), \\ \dot{\theta}(1) = \Omega(I) + G(I, \theta, t). \end{cases} \quad (36)$$

当 $p = 0$ 时, 由方程(34)可得

$$\begin{cases} \dot{I} = 0, \\ \dot{\theta} = \Omega(I). \end{cases} \quad (37)$$

设 I_0 和 θ_0 为方程(37)的解, $I(t, p)$ 和 $\theta(t, p)$ 为方程(34)的解, 可以得到以下关系式

$$\begin{cases} I(t, 0) = I_0, \\ \theta(t, 0) = \theta_0. \end{cases} \quad (38)$$

当 $p = 0$ 时, 将 $I(t, p)$ 和 $\theta(t, p)$ 展开成 Taylor 级数

$$\begin{cases} I(t, p) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(t) \frac{p^n}{n!}, \\ \theta(t, p) = \theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(t) \frac{p^n}{n!}, \end{cases} \quad (39)$$

其中

$$\begin{cases} I_n(t) = \frac{\partial^n I(t, p)}{\partial p^n}, \\ \theta_n(t) = \frac{\partial^n \theta(t, p)}{\partial p^n}. \end{cases} \quad (40)$$

当 $p = 1$ 时,

$$\begin{cases} I(t, 1) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(t)}{n!}, \\ \theta(t, 1) = \theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n(t)}{n!}. \end{cases} \quad (41)$$

方程(41)为方程(36)的解, 当 $nT = mT_g$ (m, n 为互质数) 时, 系统出现亚谱共振. Poincare 映射为

$$(I_0, \theta_0) \rightarrow [I_0, \theta_0 + mT_g \Omega(I_0)] + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(mT_g)}{n!}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n(mT_g)}{n!} \right]. \quad (42)$$

方程(42)的一阶截断式为

$$(I_0, \theta_0) \rightarrow [I_0, \theta_0 + mT_g \Omega(I_0)] + [I_1(mT_g), \theta_1(mT_g)]. \quad (43)$$

对方程(34)取偏微分可以得到

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial I}{\partial p} \right) = F(I, \theta, t) + p \left(\frac{\partial F}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right) = \frac{\partial \Omega}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial p} + g(I, \theta, t) + p \left(\frac{\partial G}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial p} + \frac{\partial G}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \right). \end{cases} \quad (44)$$

当 $p = 0$ 时, 方程(44) 成为

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = F(I_0, \theta_0, \omega t), \\ \dot{\theta}_1 = \left(\frac{\partial \Omega(I)}{\partial I} \Big|_{I=I_0} \right) \theta_1 + G(I_0, \theta_0, \omega t). \end{cases} \quad (45)$$

对方程(45) 从 0 到 mT_ω 积分可得

$$\begin{cases} I_1(mT_g) = \int_0^{mT_g} F(I_0, \Omega(I_0)t + \theta_0, \omega t + \tau) dt, \\ \theta_1(mT_g) = \left(\frac{\partial \Omega(I)}{\partial I} \Big|_{I=I_0} \right) \int_0^{mT_g} \int_0^t F(I_0, \Omega(I_0)\xi + \theta_0, \omega t + \tau) d\xi dt + \\ \int_0^{mT_g} G(I_0, \Omega(I_0)t + \theta_0, \omega t + \tau) dt. \end{cases} \quad (46)$$

令

$$\begin{cases} M_1^{m/n} = \int_0^{mT_g} F(I_0, \Omega(I_0)t + \theta_0, \omega t + \tau) dt, \\ M_2^{m/n} = \left(\frac{\partial \Omega(I)}{\partial I} \Big|_{I=I_0} \right) \int_0^{mT_g} \int_0^t F(I_0, \Omega(I_0)\xi + \theta_0, \omega t + \tau) d\xi dt, \end{cases} \quad (47)$$

所以一阶亚谐同伦 Melnikov 函数为

$$M^{m/n} = (M_1^{m/n}, M_2^{m/n}). \quad (48)$$

设方程(2) 的周期轨道的解为 $(x_L(t, p), y_L(t, p))$, 则方程(1) 的亚谐共振的一阶同伦 Melnikov 函数为

$$M_1^{m/n} = \int_0^{mT_g} f(x_p, y_p) \wedge g(x_p, y_p, \omega t + \tau) dt. \quad (49)$$

4 例子

当 $F > 0$ 时, 考虑如下系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu_1 x + x^3 + \mu_2 y - x^2 y + F \cos \omega t. \end{cases} \quad (50)$$

4.1 解析分析

方程(50) 的完全可积系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu_1 x + x^3. \end{cases} \quad (51)$$

方程(51) 的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{y^2}{2} - \frac{\mu_1 x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = h. \quad (52)$$

当 $\mu_1 \geq 0$ 时, H 没有闭轨, 所以不会产生共振. 所以只需要考虑 $\mu_1 < 0$ 的情况. 当 $\mu_1 < 0$, 相图

如图 1 所示.

图 1 中异宿轨道的解

$$\begin{cases} x_T = \pm \tanh\left(\frac{\sqrt{-2\mu_1}}{2} t\right), \\ y_T = \pm \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{-2\mu_1}}{2} t\right). \end{cases} \quad (53)$$

令

$$\begin{cases} \omega_k = \sqrt{\frac{-2\mu_1}{1+k^2}}, \\ h_k = \frac{k^2\mu_1^2}{1+k^2}, \\ T_k = 4K(k) \sqrt{\frac{1+k^2}{-\mu_1}}, \end{cases} \quad (54)$$

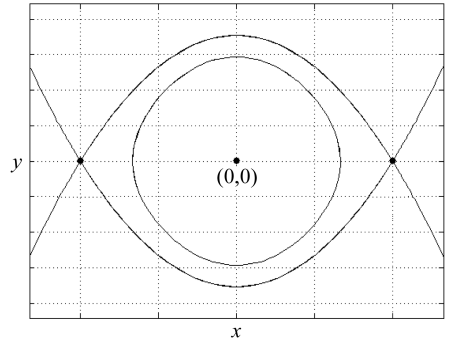


图 1 相轨迹图

Fig. 1 The phase plane of equation

当 $k \in (0,1)$, 则异宿轨道内的周期轨道的解为

$$\begin{cases} x_k = \pm \sqrt{2} k \omega_k \operatorname{sn}(t \omega_k), \\ y_k = \mp \frac{\sqrt{2} \mu_1 k}{1+k^2} \operatorname{cn}(t \omega_k) \operatorname{dn}(t \omega_k). \end{cases} \quad (55)$$

异宿轨的一阶 Melnikov 函数为

$$M(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y_T(\gamma_2 y_T - x_T^2 y_T + F x_T \cos(\omega t + \omega \tau)) dt = \frac{\mu_2(-2\mu_1)^{3/2}}{3} - \frac{(-2\mu_1)^{5/2}}{15} + \omega \pi F \sqrt{\frac{2}{\mu_2}} \sin(\omega \tau) \cosh\left(\pi \sqrt{\frac{2}{-\mu_1}}\right). \quad (56)$$

混沌条件近似为

$$\frac{\mu_2(-2\mu_1)^{3/2}}{3} - \frac{(-2\mu_1)^{5/2}}{15} + \omega \pi F \sqrt{\frac{2}{\mu_2}} \sin(\omega \tau) \cosh\left(\pi \sqrt{\frac{2}{-\mu_1}}\right) = 0. \quad (57)$$

亚谐共振的一阶 Melnikov 函数为

$$M(\tau) = \int_0^{mT_k} y_k(\mu_2 y_k - x_k^2 y_k + F x_k \cos(\omega t + \omega \tau)) dt = \mu_2 J_1 - J_2 + F J_3 \sin(\omega \tau), \quad (58)$$

其中

$$\begin{cases} J_1(m, n) = \frac{8}{3} \left(\frac{-\mu_1}{1+k^2}\right)^{3/2} [(k^2-1)K(k) + (k^2+1)E(k)], \\ J_2(m, n) = \frac{16}{15} \left(\frac{-\mu_1}{1+k^2}\right)^{5/2} [2(k^4-k^2+1)E(k) - (k^4-3k^2+2)K(k)], \\ J_3(m, n) = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ \frac{m\omega\pi^2}{K} \sqrt{\frac{-\mu_1}{\mu_2(1+k^2)}} \cosh \frac{m\pi K'}{2K}, & n = 1, m \text{ 是奇数.} \end{cases} \end{cases} \quad (59)$$

系统存在亚谐共振的条件为

$$\mu_2 J_1 - J_2 + F J_3 \sin(\omega \tau) = 0. \quad (60)$$

4.2 数值模拟

当 $\mu_1 = -9$, $\mu_2 = 0.5$, $F = 1$, $\omega = 2.5$, 可以得到自治系统具有周期轨道时, 非自治系统的周期轨道, 如图2所示. 当 $\mu_1 = -9$, $\mu_2 = 1.76$, $F = 1$, $\omega = 3$, 可以得到同宿混沌轨道, 如图3所示. 当 $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -0.02$, $F = 0.8$, $\omega = 2.8$ 可以得到自治系统 1:3 亚谐共振解, 如图4所示.

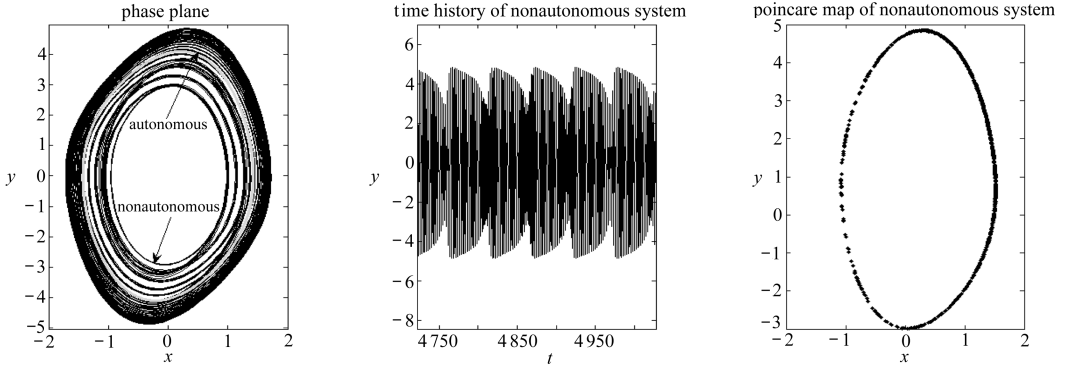


图2 系统的不变环面

Fig. 2 The solution of invariant tori

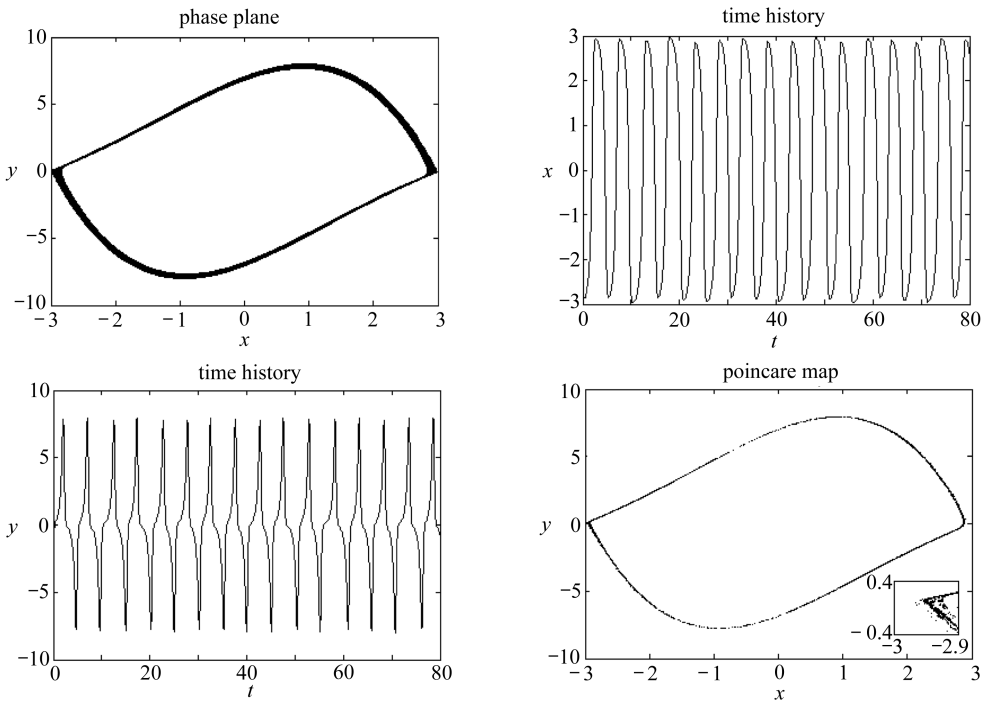


图3 系统的混沌解

Fig. 3 The solution of chaos for heteroclinic orbit

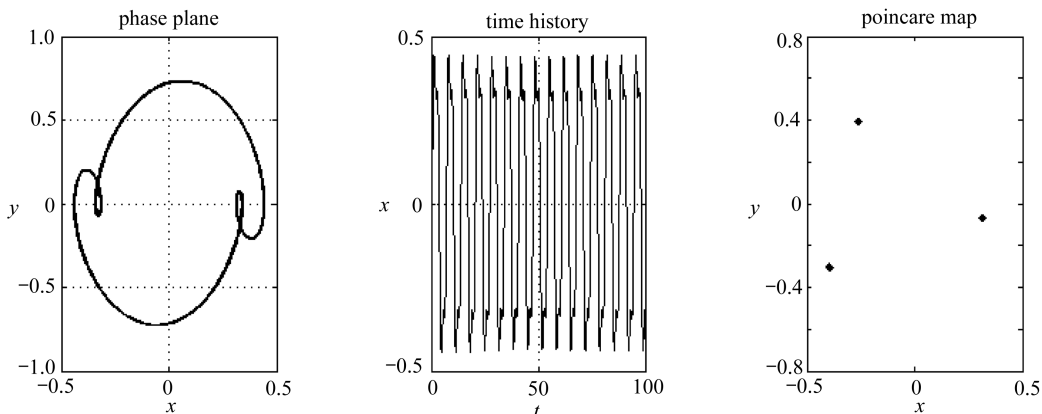


图4 系统的亚谐共振解

Fig. 4 The solution of 1:3 sub-harmonic resonance

5 结 论

本文采用同伦方法将亚谐 Melnikov 函数和同宿轨(异宿轨)Melnikov 函数拓展到强非线性系统.该方法克服了传统 Melnikov 函数受小参数限制的弱点.本文所阐述的方法可以作为强非线性系统的混沌与亚谐共振的判据.

参考文献:

- [1] CHEN Yu-shu, Leung Andrew Y T. *Bifurcation and Chaos in Engineering*[M]. New York: Springer, 1998.
- [2] Wiggins S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*[M]. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [3] Greenspan B D, Holmes P J. Homoclinic orbits, subharmonics and global bifurcations in forced oscillations[C]// Barenblatt G, Iooss G, Joseph D D. *Nonlinear Dynamics and Turbulence*. London: Pitman, 1983: 172-214.
- [4] Wiggins S. *Global Bifurcations and Chaos*[M]. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [5] Liao S J. *Beyond Perturbation: Introduction to Homotopy Analysis Method*[M]. Boca Raton: Chapman Hall/CRC Press, 2003.
- [6] Liao S J. The proposed homotopy analysis techniques for the solution of nonlinear problems [D]. Ph D dissertation. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 1992.
- [7] Liao S J. On the homotopy analysis method for nonlinear problems[J]. *Appl Math Comput*, 2004, **147**(2): 499-513.
- [8] Liao S J. A kind of approximate solution technique which does not depend upon small parameters—II: an application in fluid mechanics[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 1997, **32**(4): 815-822.
- [9] Liao S J. An explicit, totally analytic approximation of Blasius viscous flow problems[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 1999, **34**(4): 759-785

Chaos and Sub-Harmonic Resonance of Nonlinear System Without Small Parameters

LIU Yan-bin, CHEN Yu-shu, CAO Qing-jie

(*School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, China PO Box 137, Harbin 150001, P. R. China*)

Abstract: Melnikov method was especially important to detect the presence of transverse homoclinic orbits and occurrence of homoclinic bifurcations. Unfortunately traditional Melnikov methods strongly depend on small parameter, which could not exist in most of the practice physical systems. Those methods were limited in dealing with the system with strongly nonlinear. A procedure to study the chaos and sub-harmonic resonance of strongly nonlinear practice systems by employing homotopy method which was used to extend Melnikov functions to strongly nonlinear systems was presented. Applied to a given example, the procedure shows the efficiencies in the comparison of the theoretical results and numerical simulation.

Key words: homotopy; Melnikov function; chaos; sub-harmonic