文章编号:1000-0887(2011)01-0011-11　

Gauss 噪声扰动下的 FitzHugh-Nagumo 系统的随机稳定性*

郑　言，　黄建华

(国防科学技术大学 理学院,长沙 410073)

摘要： 在 Gauss 噪声扰动下 FitzHugh-Nagumo 系统的随机稳定性是该文的研究目的. 通过研究随机 FitzHugh-Nagumo 系统的动力学行为, 证明其存在唯一的、具有指数混合速度的不变测度. 最后, 考察当噪声趋于 0 时不变测度的渐近行为.

关 键 词： 随机稳定性； FitzHugh-Nagumo 系统； 不变测度； Gauss 白噪声

中图分类号： O19　　**文献标志码：** A

DOI：10.3879/j. issn. 1000-0887. 2011. 01. 002

引　　言

本文旨在研究 Gauss 噪声扰动下的 FitzHugh-Nagumo 系统的随机稳定性. 文中所考虑的动力系统的随机稳定性问题是遍历理论中的热点问题,须注意这与微分方程的随机稳定性(参见文献[1])概念是截然不同的. 粗略地讲,当一个确定系统被扰动时,我们得到一系列随机系统. 它们都有与之对应的不变测度. 自然要问,这些不变测度的关系是什么? 最理想的情形是随机系统的不变测度,当扰动越来越小时趋于确定系统的不变测度,如果这样,我们就称随机稳定性成立. 对于关于有限维系统的一般理论,可以参阅文献[2-5]. 本文探索了无穷维系统的随机稳定性问题.

FitzHugh-Nagumo 方程通常作为描述可激系统的模型,比方说可以模拟经由轴突介质的信号传导. 有许多文章研究其确定系统在有界区域或无界区域上的全局吸引子和 Hausdorff 维数,比如文献[6-11]以及它们所自身引用的文献. 对于随机 FitzHugh-Nagumo 方程,文献[12]的作者考虑了初值条件为随机过程的情形,并证明了随机 FitzHugh-Nagumo 方程的随机过程弱解的存在性. 他们考虑的模型是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - F - v + f_1 - v + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_1(\bar{\omega}),\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t} = \sigma u - \delta v + f_2 + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_2(\bar{\omega}),\end{cases} \tag{1}$$

以及其他一些初值和 Dirichlet 边值条件,其中 u 代表轴突介质中的电子势能,函数 g_1 和 g_2 仅在时间上是连续的,$\mathrm{d}g_1(\bar{\omega})/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}g_1(\bar{\omega})/\mathrm{d}t$ 表示以 $\bar{\omega}$ 为随机参数的白噪声过程.

---

* 收稿日期： 2010-07-25；修订日期： 2010-11-26
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(10926096;10971225)
作者简介： 郑言(1979—),男,沈阳人,讲师,博士(联系人. E-mail:yanzhengyl@163.com).

文献[13]进一步研究了如下的受白噪声驱动的随机 FitzHugh-Nagumo 方程：

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = (\Delta u + h(u) - \alpha v)\mathrm{d}t + \phi(z)\mathrm{d}\bar{W}_1(t), \\ \mathrm{d}v(t) = (\beta u - \sigma v)\mathrm{d}t + \psi(z)\mathrm{d}\bar{W}_2(t), \end{cases} \tag{2}$$

以及初值条件

$$u(s) = x,\ v(s) = y \tag{3}$$

和 Dirichlet 边界条件

$$u|_{\partial D} = 0, \tag{4}$$

其中，$D \subset R^n$，$n = 1,2,3$ 是一个带有正则边界 ∂D 的有界开集. $\bar{W}_i(t)$ 是定义在某个完备概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 并且其路径 $\bar{\omega}(\cdot)$ 落在连续函数空间 $C(R,R)$ 上，并满足 $\bar{\omega}(0) = 0$ 的两两独立的一维双边实值 Wiener 过程. 他们证明式(2)～(4)生成一个渐进紧的随机动力系统且拥有一个全局吸引子. 但是他们没有从遍历论的观点考虑问题.

本文，我们证明系统(2)～(4)的不变测度的存在唯一性. 而且，我们也研究了不变测度族的渐近行为，本文的结构是这样的：第 1 节，研究随机 FitzHugn-Nagumo 系统的动力学行为，命题 1.1 是研究遍历性的关键结果；第 2 节，证明具有指数混合速度的不变测度的存在唯一性；第 3 节，证明 FitzHugh-Nagumo 系统在 Gauss 白噪声扰动下的随机稳定性.

1 随机 FitzHugh-Nagumo 系统的动力学

本节，我们研究随机 FitzHugh-Nagumo 系统的动力学. 我们使用的方法类似于文献[14]的第 6 章，这个方法通常被称为耗散方法，然而这里得到的结果与文献[15]不同. 我们在消除耦合项可能带来的负效用的基础上，考虑了 u 和 v 的一致的耗散作用.

我们考虑如下的受加法白噪声驱动的随机 FitzHugn-Nagumo 系统：

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = (\Delta u + h(u) - \alpha v)\mathrm{d}t + \phi(z)\mathrm{d}\bar{W}_1(t), & z \in D, \\ \mathrm{d}v(t) = (\beta u - \sigma v)\mathrm{d}t + \psi(z)\mathrm{d}\bar{W}_2(t), & z \in \partial D, \\ u = 0, \\ u(s) = x, \\ v(s) = y, \end{cases} \tag{5}$$

其中，$t \geqslant s \in \mathbf{R}$，$D \subset R^n$，$n = 1,2,3$ 是一个有界光滑区域，$\alpha,\ \beta > 0$，$\sigma > 0$，$\bar{W}_i(t)$ 是两两独立的一维双边 Brown 运动，且 h,ϕ,ψ 满足：

(HS) h 具备多项式的形式

$$h(u) = \sum_{k=0}^{2p-1} a_k u^k,$$

其中，$a_{2p-1} < 0$ 对某个正常数 $p > 1$ 成立，ϕ 和 ψ 是满足 $\phi_{\partial D} = 0$ 以及 $\psi_{\partial D} = 0$ 的 $\bar{D}$上的 C^2 函数.

对于 $t \geqslant s \in \mathbf{R}$，令 $S(t)$ 是算子 Δ 的连续半群并定义

$$\int_s^t S(t-s)\phi(x)\mathrm{d}\bar{W}_1(s) = W_{\Delta,s}(t)$$

和

$$\int_s^t \exp(-\sigma(t-s))\psi(x)\mathrm{d}\bar{W}_2(s) = W_{\sigma,s}(t).$$

$W_{\Delta,0}(t)$ 和 $W_{\sigma,0}(t)$ 分别简记为 $W_{\Delta}(t)$ 和 $W_{\sigma}(t)$.

由文献[13]的引理 3.1 知,方程(5)存在一个唯一的弱解,其以后用 $(u(t,s,x),v(t,s,x))$, $t \geqslant s$ 表示. 事实上这意味着 $U(t,s,x)=u(t,s,x)-W_{\Delta,s}(t)$ 和 $V(t,s,y)=v(t,s,y)-W_{\sigma,s}(t)$ 是下面的方程的唯一弱解:

$$\begin{cases} \dot{U}=\Delta U+h(U+W_{\Delta,s})-\alpha(V+W_{\sigma,s}), & z\in D, \\ \dot{V}=\beta(U+W_{\Delta,s})-\sigma V, & z\in \partial D, \\ U=0, \\ U(s)=x, \\ V(s)=y. \end{cases} \tag{6}$$

我们令 H 表示 Hilbert 空间 $L^2(D)\times L^2(D)$. $(\cdot,\cdot)$ 指代 H 中的元素. 然而用 $(\cdot,\cdot)_K$ 表示空间 $K=L^2(D)$ 中的内积. $|\cdot|$ 和 $|\cdot|_H$ 分别表示空间 $L^2(D)$ 和 $H=L^2(D)\times L^2(D)$ 中的范数.

令

$$\gamma_{\Delta}=\sup\{\gamma>0;(\Delta u,u)_K\leqslant-\gamma|u|^2,\ \forall u\in D(\Delta)\},$$

其中 $D(\Delta)$ 表示满足 Dirichlet 边界条件的 Δ 的定义域. 由 Poincaré 不等式知,这样的 γ_{Δ} 确实存在.

令

$$\gamma_h=\inf\{\gamma\in\mathbf{R};(h(u)-h(v),u-v)_K\leqslant\gamma|u-v|^2,\ \forall u,v\in D(h)\},$$

其中 $D(h)$ 是 h 的定义域. 由 h 的定义知总可以找到这样的 γ_h.

下面的引理是由耗散方法得到的.

引理 1.1 假设 $-\gamma_{\Delta}+\gamma_h<0$,则存在常数 $C,\omega>0$ 使得

$$|(U(t,s,x),V(t,s,y))|_H\leqslant$$
$$C\left(e^{-\omega(t-s)}|(x,y)|_H+\int_s^t e^{-\omega(t-s)}(|h(W_{\Delta,s})|+|W_{\sigma,s}|+|W_{\Delta,s}|)(s)\mathrm{d}s\right).$$

证明 我们定义 H 上的一个新的范数 $\|\cdot\|$,使得对任意的

$$(u,v)\in H,\ \|(u,v)\|^2=|u|^2/\alpha+|v|^2/\beta.$$

注意到在新的范数 $\|\cdot\|$ 下, H 的内积也变化了.

在范数 $\|\cdot\|$ 下,令方程(6)和 (U,V) 做内积,有

$$\frac{1}{2\alpha}\frac{\mathrm{d}|U|^2}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2\beta}\frac{\mathrm{d}|V|^2}{\mathrm{d}t}=$$
$$\frac{1}{\alpha}((\Delta U,U)_K+(h(U+W_{\Delta,s}),U)_K-(\alpha(V+W_{\sigma,s}),U)_K)+$$
$$\frac{1}{\beta}((-\sigma V,V)_K+(\beta(U+W_{\Delta,s}),V)_K),$$

因此

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|(U,V)\|^2}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\alpha}(\Delta U,U)_K-\frac{\sigma}{\beta}(V,V)_K+$$
$$\frac{1}{\alpha}(h(U+W_{\Delta,s}),U)_K-(W_{\sigma,s},U)_K+(W_{\Delta,s},V)_K. \tag{7}$$

由 γ_{Δ} 的定义,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|(U,V)\|^2}{\mathrm{d}t}\leqslant$$

$$-\frac{\gamma_\Delta}{\alpha}|U|^2-\frac{\sigma}{\beta}|V|^2+\frac{1}{\alpha}(h(U+W_{\Delta,s}),U)_K-(W_{\sigma,s},U)_K+(W_{\Delta,s},V)_K.$$

再由 γ_h 的定义,成立

$$\begin{aligned}&(h(U+W_{\Delta,s}),U)_K=\\&\quad(h(U+W_{\Delta,s})-h(W_{\Delta,s}),U)_K+(h(W_{\Delta,s}),U)_K\leqslant\\&\quad\gamma_h|U|^2+|h(W_{\Delta,s})|\ |U|,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|(U,V)\|^2}{\mathrm{d}t}\leqslant\\&\quad-\frac{\gamma_\Delta}{\alpha}|U|^2-\frac{\sigma}{\beta}|V|^2+\frac{\gamma_h}{\alpha}|U|^2+\\&\quad\frac{1}{\alpha}|h(W_{\Delta,s})|\ |U|+|W_{\sigma,s}|\ |U|+|W_{\Delta,s}|\ |V|.\end{aligned}$$

由于范数的等价性,存在常数 $\tilde{\omega},C_1>0$, 使得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|(U,V)\|^2}{\mathrm{d}t}\leqslant\\&\quad-\tilde{\omega}\|(U,V)\|^2+C_1(|h(W_{\Delta,s})|+|W_{\sigma,s}|+|W_{\Delta,s}|)\|(U,V)\|.\end{aligned}$$

因此由 Gronwall 引理知

$$\begin{aligned}&\|(U,V)\|\leqslant\mathrm{e}^{-2\tilde{\omega}(t-s)}\|(x,y)\|+\\&\quad\int_s^t\mathrm{e}^{-2\tilde{\omega}(t-s)}2C_1(|h(W_{\Delta,s})|+|W_{\sigma,s}|+|W_{\Delta,s}|)(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

再由范数的等价性,存在仅依赖于光滑区域 D 的常数 $\omega,C>0$, C 使得

$$\begin{aligned}&|(U(t,s,x),V(t,s,y))|_H\leqslant\\&\quad C\left(\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}|(x,y)|_H+\int_s^t\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}(|h(W_{\Delta,s})|+|W_{\sigma,s}|+|W_{\Delta,s}|)(s)\mathrm{d}s\right).\end{aligned}$$ □

注 1.1 参数 γ_Δ 和 γ_h 在文献[16]中引入以控制系统的耗散性. 而条件 $-\gamma_\Delta+\gamma_h<0$ 确保我们的系统是耗散的,这并不是一个很强的条件,因为从物理上讲 FitzHugh-Nagumo 方程所模拟的可激系统,在没有外部刺激驱动的条件下会渐渐消耗自己的能量,即其是耗散的.

另一方面易知 γ_Δ 是正的,因此作为特例,三次函数 $h(u)=u(1-u)(u-a)$ $(0<a<1)$, 以及 McKean 的例子(参见文献[17]), $h(v)=H(v-a)-v$ $(0<a<1)$, 其中 Heaviside 阶梯函数为

$$\mathrm{H}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ [0,1], & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$$

都满足条件 $-\gamma_\Delta+\gamma_h<0$. 读者也可以在文献[16]中找到更多的例子.

引理 1.2

$$\sup_{t\geqslant s}\mathrm{E}(|h(W_{\Delta,s}(t))|+|W_{\sigma,s}(t)|+|W_{\Delta,s}(t)|)<\infty.$$

证明 由 $\bar{W}_i(t)$ 的定义知,我们只需要对 $t\geqslant s=0$ 的情形证明引理. 事实上,我们只需要证明 $\sup_{t\geqslant 0}|W_{\Delta,0}(t)|<\infty$, 其余两项的估计完全类似.

由于 $(\Delta u,u)_K\leqslant-\gamma_\Delta|u|^2$,所以易得 $\|S(t)\|\leqslant\mathrm{e}^{-\gamma_\Delta t}$,则当 $t\geqslant 0$ 时,

$$|W_{\Delta,0}(t)|=\left|\int_0^t S(t-s)\phi(x)\mathrm{d}\bar{W}_1(s)\right|\leqslant|\phi|_{C(D)}\left|\int_0^t\mathrm{e}^{-\gamma_\Delta(t-s)}\mathrm{d}\bar{W}_1(s)\right|.$$

注意到

$$\mathrm{E}\left[\int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma_\Delta(t-s)}\mathrm{d}\bar{W}_1(s)\right]^2 = \int_0^t \mathrm{e}^{-2\gamma_\Delta s}\mathrm{d}s < \frac{1}{2\gamma_\Delta},$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式引理得证.

下面的命题是证明定理 2.1 的关键.

命题 1.1 假设 $-\gamma_\Delta + \gamma_h < 0$,则存在一个随机变量 η,使得对任意的 $(x,y) \in H$, $r > 0$, 我们有

$$\mathrm{E}|(u(0,-r,x),v(0,-r,y)) - \eta|_H \leqslant \tilde{C}\mathrm{e}^{-\omega r}(|(x,y)|_H + 1)$$

对某个常数 $\tilde{C} > 0$ 成立.

证明 首先我们断言 $r > r_1 > 0$,

$$|(u(0,-r,x),v(0,-r,y)) - (u(0,-r_1,x),v(0,-r_1,y))|_H \leqslant$$
$$C\mathrm{e}^{-\omega r_1}|(u(-r_1,-r,x),v(-r_1,-r,y)) - (x,y)|_H.$$

这点是易证的,只要我们令

$$(\bar{u}(t),\bar{v}(t)) = (u(t,-r,x),v(t,-r,y)) - (u(t,-r_1,x),v(t,-r_1,y)),$$

则

$$\begin{cases} \dot{\bar{u}} = \Delta\bar{u} + h(u(t,-r,x)) - h(u(t,-r_1,x)) - \alpha\bar{v}, & z \in D, \\ \dot{\bar{v}} = \beta\bar{u} - \sigma\bar{v}, & z \in \partial D, \\ \bar{u} = 0, \\ \bar{u}(-r_1) = u(-r_1,-r,x) - x, \\ \bar{v}(-r_1) = v(-r_1,-r,y) - y. \end{cases} \tag{8}$$

与引理 1.1 的计算相类似,我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|(\bar{u},\bar{v})\|^2}{\mathrm{d}t} \leqslant -2\tilde{\omega}\|(\bar{u},\bar{v})\|^2.$$

因此断言是成立的,只要我们应用 Gronwall 引理,再令 $t = 0$.

进一步地,由引理 1.1,我们有

$$|(U(-r_1,-r,x),V(-r_1,-r,y))|_H \leqslant C\Big(\mathrm{e}^{-\omega(r-r_1)}|(x,y)|_H +$$
$$\int_{-r}^{-r_1}\mathrm{e}^{-\omega(-r_1-s)}(|h(W_{\Delta,-r})| + |W_{\sigma,-r}| + |W_{\Delta,-r}|)(s)\mathrm{d}s\Big),$$

因此

$$|(u(-r_1,-r,x),v(-r_1,-r,y))|_H \leqslant$$
$$C\Big(\mathrm{e}^{-\omega(r-r_1)}|(x,y)|_H + \int_{-r}^{-r_1}\mathrm{e}^{-\omega(-r_1-s)}(|h(W_{\Delta,-r})| +$$
$$|W_{\sigma,-r}| + |W_{\Delta,-r}|)(s)\mathrm{d}s\Big) + |W_{\sigma,-r}(-r_1)| + |W_{\Delta,-r}(-r_1)|,$$

两边取期望,得

$$\mathrm{E}|(u(0,-r,x),v(0,-r,y)) - (u(0,-r_1,x),v(0,-r_1,y))|_H \leqslant$$
$$C\mathrm{e}^{-\omega r_1}\mathrm{E}|(u(-r_1,-r,x),v(-r_1,-r,y)) - (x,y)|_H \leqslant$$
$$C\mathrm{e}^{-\omega r_1}\Big((C+1)|(x,y)|_H + \mathrm{E}\sup_{-r\leqslant t\leqslant -r_1}\Big(\frac{1}{\omega}|h(W_{\Delta,-r})(t)| +$$
$$\frac{1+\omega}{\omega}(|W_{\sigma,-r}(t)| + |W_{\Delta,-r}(t)|)\Big)\Big).$$

由引理 1.2,得

$$E|(u(0,-r,x),v(0,-r,y))-(u(0,-r_1,x),v(0,-r_1,y))|_H \leqslant e^{-\omega r_1}(C(C+1)|(x,y)|_H+C_2)$$

对某个常数 $C_2>0$ 成立.

因此我们有

$$E|(u(0,-r,x),v(0,-r,y))-(u(0,-r_1,x),v(0,-r_1,y))|_H \leqslant \tilde{C}e^{-\omega r_1}(|(x,y)|_H+1)$$

对某个常数 $\tilde{C}>0$ 成立.

通过上面的估计易见,当 $r\to+\infty$ 时,$(u(0,-r,x),v(0,-r,y))$ 在空间 $L^1(\tilde{\omega},\mathcal{F},P;H)$ 中收敛于某个 $\eta_{(x,y)}$,且

$$E|(u(0,-r,x),v(0,-r,y))-\eta_{(x,y)}|_H \leqslant \tilde{C}e^{-\omega r}(|(x,y)|_H+1).$$

最后,我们将证明 $\eta_{(x,y)}$ 事实上是不依赖于 (x,y) 的. 这点是易证的,只要我们令

$$(\hat{u}(t),\hat{v}(t))=(u(t,-r,x),v(t,-r,y))-(u(t,-r,x'),v(t,-r,y'))$$

对某个 $(x',y')\in H$,则

$$\begin{cases}\dot{\hat{u}}=\Delta\hat{u}+h(u(t,-r,x))-h(u(t,-r,x'))-\alpha\hat{v}, & z\in D,\\ \dot{\hat{v}}=\beta\hat{u}-\sigma\hat{v}, & z\in\partial D,\\ \hat{u}=0,\\ \hat{u}(-r)=x-x',\\ \hat{v}(-r)=y-y'.\end{cases}\tag{9}$$

因此,与前面的讨论相类似,

$$|(u(t,-r,x),v(t,-r,y))-(u(t,-r,x'),v(t,-r,y'))|_H \leqslant Ce^{-\omega(t+r)}|(x-x',y-y')|_H, \tag{10}$$

因此命题得证,只要我们先令 $t=0$ 再令 $r\to+\infty$. □

2 随机 FitzHugh-Nagumo 系统的遍历性

下面的定理描述了随机 FitzHugh-Nagumo 系统的不变测度的性状. 这个定理可以在多个文献中找到其类似的版本(比如文献[14]). 这里我们证明它是出于完备性的考虑.

令 $C_b(H)$ 是 H 上的有界连续空间,$\mathcal{P}(H)$ 是 H 上的概率测度组成的空间. 对应于转移函数 $P_t(u,\Gamma)$ 的 Markov 半群 $P_t:C_b(H)\to C_b(H)$ 和 $P_t^*:\mathcal{P}(H)\to\mathcal{P}(H)$ 是由公式

$$P_tf(u)=\int_H P_t(u,dv)f(v),\quad P_t^*\mu(\Gamma)=\int_H P_t(v,\Gamma)\mu(dv)$$

给出的.

定理 2.1 假设 $-\gamma_\Delta+\gamma_h<0$ 则系统(5)存在一个唯一的不变测度 μ,且它是指数混合的. 进一步地,对于任意地 Borel 概率测度 ν,当 $t\to+\infty$ 时,$P_t^*\nu$ 弱收敛于 μ.

证明 首先我们断言不变测度 μ 恰是命题 1.1 中的 η 的分布.

事实上,令 φ 是一个 H 上的有界连续函数,则由命题 1.1 知,对于任意的 $t,s>0$,

$$\left|\int_H P_{t+s}\varphi(h)d\mu(h)-\int_H P_s\varphi(h)d\mu(h)\right| = \left|\int_H P_tP_s\varphi d\mu-\int_H P_s\varphi d\mu\right| = \left|\int_H E[P_s\varphi(u(t,0,x),v(t,0,y))]d\mu-\int_H E[P_s\varphi(\eta)]d\mu\right| =$$

$$\left|\int_H (\mathrm{E}[P_s\varphi(u(0,-t,x),v(0,-t,y))]-\mathrm{E}[P_s\varphi(\eta)])\mathrm{d}\mu\right|\to 0, \tag{11}$$

当 $t\to+\infty$ 时,因为由式(10)知,(P_s) 是一个 Feller 转移半群.

类似地

$$\begin{aligned}&\left|\int_H P_{t+s}\varphi(h)\mathrm{d}\mu(h)-\int_H\varphi(h)\mathrm{d}\mu(h)\right|=\\&\left|\int_H \mathrm{E}[\varphi(u(t+s,0,x),v(t+s,0,y))]\mathrm{d}\mu-\int_H\mathrm{E}[\varphi(\eta)]\mathrm{d}\mu\right|=\\&\left|\int_H (\mathrm{E}[\varphi(u(t+s,0,x),v(t+s,0,y))]-\mathrm{E}[\varphi(\eta)])\mathrm{d}\mu\right|=\\&\left|\int_H (\mathrm{E}[\varphi(u(0,-t-s,x),v(0,-t-s,y))]-\mathrm{E}[\varphi(\eta)])\mathrm{d}\mu\right|\to 0,\end{aligned} \tag{12}$$

当 $t\to+\infty$ 时.

因此由式(11)和(12)知

$$\int_H P_s\varphi(h)\mathrm{d}\mu(h)=\int_H\varphi(h)\mathrm{d}\mu(h),$$

故 μ 是一个不变测度.

假设存在 (P_t) 的另一个不变测度 λ,则对于 H 上的任何一个有界连续函数 φ 和 $t>0$,成立

$$\int_H P_t\varphi(h)\mathrm{d}\lambda(h)=\int_H\varphi(h)\mathrm{d}\lambda(h). \tag{13}$$

然而

$$\begin{aligned}&\left|P_t\varphi-\int_H\varphi(h)\mathrm{d}\mu(h)\right|=|\mathrm{E}[\varphi(u(t,0,x),v(t,0,y))]-\mathrm{E}[\varphi(\eta)]|=\\&|\mathrm{E}[\varphi(u(0,-t,x),v(0,-t,y))]-\mathrm{E}[\varphi(\eta)]|\to 0,\end{aligned} \tag{14}$$

当 $t\to+\infty$ 时.

因此,如果我们令式(13)中的 $t\to+\infty$,则易得

$$\int_H\varphi(h)\mathrm{d}\mu(h)=\int_H\varphi(h)\mathrm{d}\lambda(h),$$

因此 $\mu=\lambda$.

令 χ 是 H 上的一个有界 Lipschitz 函数,则由命题 1.1 知

$$\begin{aligned}&\left|P_t\chi(x,y)-\int_H\chi(h)\mathrm{d}\mu(h)\right|=|\mathrm{E}[\chi(u(t,0,x),v(t,0,y))]-\mathrm{E}[\chi(\eta)]|=\\&|\mathrm{E}[\chi(u(0,-t,x),v(0,-t,y))]-\mathrm{E}[\chi(\eta)]|\leqslant\\&\tilde{C}\|\chi\|_{\mathrm{Lip}}\mathrm{e}^{-\omega r}(|(x,y)|_H+1),\end{aligned}$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ 是 H 上的 Lipschitz 范数.

最后由式(14)知,对于任意的 Borel 概率测度 ν 和任意有界连续函数 φ,成立

$$(P_t^*\nu,\varphi)=\int_H P_t\varphi(h)\mathrm{d}\nu(h)\to\int_H\int_H\varphi(h)\mathrm{d}\mu(h)\mathrm{d}\nu(h)=\int_H\varphi(h)\mathrm{d}\mu(h)=(\mu,\varphi),$$

当 $t\to+\infty$ 时.

注 2.1 这个定理的结果表明,FitzHugh-Nagumo 系统即便是被 Gauss 白噪声扰动,依然会随着时间的进行趋于一个平衡态.而且,从任意初始状态出发,都会得到该平衡态.由于可激系统(比如神经元)可以被 FitzHugh-Nagumo 系统模拟,我们的结果指出一个可激系统即便是受到外界随机输入流的驱动,随着时间的进行在将来依然会趋于稳态.

3 FitzHugh-Nagumo 系统的随机稳定性

本节,我们旨在研究随机稳定性.这里的方法是新的,首先我们引入定义:

定义 3.1 假设 (ϕ^t,μ) 是某个确定动力系统,其中 μ 是 ϕ^t 的一个不变测度.当系统被扰动时,我们就有了一系列的随机动力系统 ϕ_ε^t.令 $\{\mu_\varepsilon\}$ 是 ϕ_ε^t 的任一不变测度.如果 μ_ε 弱收敛于 μ 当 $\varepsilon\to 0$ 时,我们称 (ϕ^t,μ) 是随机稳定的.

注 3.1 随机系统的产生与扰动有关.换而言之,不同的 ϕ_ε^t 描述了不同种类的扰动.因此有必要强调随机稳定性形成的条件.此外给定 ϕ_ε^t, μ_ε 也未必唯一.不过我们总是要求 μ_ε 弱收敛于 μ.

我们引入如下的确定 FitzHugh-Nagumo 系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}u(t)=(\Delta u+h(u)-\alpha v)\mathrm{d}t, & z\in D,\\ \mathrm{d}v(t)=(\beta u-\sigma v)\mathrm{d}t, & z\in\partial D,\\ u=0,\\ u(s)=x,\\ v(s)=y,\end{cases}\tag{15}$$

其中 $t\geqslant s\in\mathbf{R}$.我们令 $(u^0(t,s,x),v^0(t,s,y))$ 表示式(15)的弱解.

接下来我们引入一族随机 FitzHugh-Nagumo 系统以描述随机扰动.对于某个小的 $\varepsilon>0$,我们考虑如下的模型:

$$\begin{cases}\mathrm{d}u(t)=(\Delta u+h(u)-\alpha v)\mathrm{d}t+\phi^\varepsilon(z)\mathrm{d}\bar{W}_1(t), & z\in D,\\ \mathrm{d}v(t)=(\beta u-\sigma v)\mathrm{d}t+\psi^\varepsilon(z)\mathrm{d}\bar{W}_2(t), & z\in\partial D,\\ u=0,\\ u(s)=x,\\ v(s)=y,\end{cases}\tag{16}$$

其中,$t\geqslant s\in\mathbf{R}$, $\|\phi^\varepsilon\|_{C(D)}\leqslant\hat{C}\varepsilon$ 以及 $\|\psi^\varepsilon\|_{C(D)}\leqslant\hat{C}\varepsilon$ 对某个常数 $\hat{C}>0$ 成立.直观上,ε 用来控制噪声的大小.

注 3.2 对于 ψ^ε 和 ϕ^ε 施加的条件表面上看略强,实际上更常见的做法是对 $\mathrm{var}(\psi^\varepsilon)$ 和 $\mathrm{var}(\phi^\varepsilon)$ 提条件.在这里,我们增强条件的原因是因为下面的计算过程本质上是一致的.

由文献[13]的引理 3.1 知,对于不同的 ε,式(16)存在唯一的弱解 $(u^\varepsilon(t,s,x),v^\varepsilon(t,s,y))$,因此,我们有相应的转移半群 (P^ε).进一步地,由命题 1.1 和定理 2.1 知,我们得到了一族相应的随机变量 η^ε 和不变测度 μ^ε.

作为引理 1.1 的特殊例子,有

引理 3.1 假设 $-\gamma_\Delta+\gamma_h<0$,则存在常数 $C,\omega>0$ 使得

$$|(u^0(t,s,x),v^0(t,s,y))|_H\leqslant C\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}|(x,y)|_H.$$

显然由上面的引理知 $\delta_0=\delta_{(0,0)}$ 是式(15)的不变测度.下面我们证明本节的重要定理.

定理 3.1 假设 $-\gamma_\Delta+\gamma_h<0$,则 μ^ε 弱收敛于 δ_0,当 $\varepsilon\to 0$ 时.即确定 FitzHugh-Nagumo 是随机稳定的.

证明 固定某个 $(x,y)\in H$,令

$$(\tilde{u}(t),\tilde{v}(t))=(u^\varepsilon(t,-r,x),v^\varepsilon(t,-r,y))-(u^0(t,-r,x),v^0(t,-r,y)),$$

对 $t,r>0$,则成立

$$\begin{cases}\dot{\tilde{u}} = \Delta\tilde{u} + h(u^{\varepsilon}(t,-r,x)) - h(u^{0}(t,-r,x)) - \\ \qquad \alpha\tilde{v} + \phi^{\varepsilon}(z)\mathrm{d}\bar{W}_1(t), & z \in D, \\ \dot{\tilde{v}} = \beta\tilde{u} - \sigma\tilde{v} + \psi^{\varepsilon}(z)\mathrm{d}\bar{W}_2(t), & z \in \partial D, \\ \tilde{u} = 0, \\ \tilde{u}(-r) = 0, \\ \tilde{v}(-r) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

定义

$$\int_{-r}^{t} S(t-s)\phi^{\varepsilon}(x)\mathrm{d}\bar{W}_1(s) = W^{\varepsilon}_{\Delta,-r}(t)$$

和

$$\int_{-r}^{t} \exp(-\sigma(t-s))\phi^{\varepsilon}(x)\mathrm{d}\bar{W}_2(s) = W^{\varepsilon}_{\sigma,-r}(t),$$

则类似于命题 1.1 和文献[13]的引理 3.1,我们可以证明

$$\tilde{U}(t,-r,x) = \tilde{u}(t,-r,x) - W^{\varepsilon}_{\Delta,-r}(t)$$

和

$$\tilde{V}(t,-r,y) = \tilde{v}(t,-r,y) - W^{\varepsilon}_{\sigma,-r}(t)$$

是下面方程的唯一弱解:

$$\begin{cases}\dot{\tilde{U}} = \Delta\tilde{U} + h(u^{\varepsilon}(t,-r,x)) - h(u^{0}(t,-r,x)) - \\ \qquad \alpha(\tilde{V} + W^{\varepsilon}_{\sigma,-r}), & z \in D, \\ \dot{\tilde{V}} = \beta(\tilde{U} + W^{\varepsilon}_{\Delta,-r}) - \sigma\tilde{V}, & z \in \partial D, \\ \tilde{U} = 0, \\ \tilde{U}(-r) = x, \\ \tilde{V}(-r) = y. \end{cases} \tag{18}$$

令式(18)和 $(\tilde{U},\tilde{V})$ 在范数 $\|\cdot\|$ 下做内积,然后进行与命题 1.1 相类似的计算,则有

$$|(\tilde{U}(t,-r,x),\tilde{V}(t,-r,y))|_H \leqslant$$
$$C\left(\mathrm{e}^{-\omega(t+r)}|(x,y)|_H + \int_{-r}^{t}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}(|h(W^{\varepsilon}_{\Delta,-r})| + \right.$$
$$\left.|W^{\varepsilon}_{\sigma,-r}| + |W^{\varepsilon}_{\Delta,-r}|)(s)\mathrm{d}s\right),$$

因而

$$|(\tilde{u}(0,-r,x),\tilde{v}(0,-r,y))|_H \leqslant$$
$$C\left(\mathrm{e}^{-\omega r}|(x,y)|_H + \int_{-r}^{0}\mathrm{e}^{\omega s}(|h(W^{\varepsilon}_{\Delta,-r})| + |W^{\varepsilon}_{\sigma,-r}| + |W^{\varepsilon}_{\Delta,-r}|)(s)\mathrm{d}s\right) +$$
$$|W^{\varepsilon}_{\sigma,-r}(0)| + |W^{\varepsilon}_{\Delta,-r}(0)|.$$

令 $r \to +\infty$,得

$$|\eta^{\varepsilon} - (0,0)|_H \leqslant$$
$$C\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\omega s}(|h(W^{\varepsilon}_{\Delta,-\infty})| + |W^{\varepsilon}_{\sigma,-\infty}| +$$
$$|W^{\varepsilon}_{\Delta,-\infty}|)(s)\mathrm{d}s + |W^{\varepsilon}_{\sigma,-\infty}(0)| + |W^{\varepsilon}_{\Delta,-\infty}(0)| \leqslant$$

$$\frac{C}{\omega}\sup_{t\leqslant 0}|\ h(W^{\varepsilon}_{\Delta,-\infty})(t)\ |+\frac{C+\omega}{\omega}\sup_{t\leqslant 0}|\ W^{\varepsilon}_{\Delta,-\infty}(t)\ |+\frac{C+\omega}{\omega}\sup_{t\leqslant 0}|\ W^{\varepsilon}_{\sigma,-\infty}(t)\ |. \tag{19}$$

由关于 ψ^{ε} 和 ϕ^{ε} 的假设知

$$|\ W^{\varepsilon}_{\Delta,-\infty}(t)\ |\leqslant \hat{C}\varepsilon\left|\int_{-\infty}^{t}S(t-s)\mathrm{d}\bar{W}_1(s)\right| \tag{20}$$

以及

$$|\ W^{\varepsilon}_{\sigma,-\infty}(t)\ |\leqslant \hat{C}\varepsilon\left|\int_{-\infty}^{t}\exp(-\sigma(t-s))\mathrm{d}\bar{W}_2(s)\right|. \tag{21}$$

类似于引理 1.2,易证

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\mathrm{E}\left[\left|\int_{-\infty}^{t}S(t-s)\mathrm{d}\bar{W}_1(s)\right|+\left|\int_{-\infty}^{t}\exp(-\sigma(t-s))\mathrm{d}\bar{W}_2(s)\right|\right]<\infty. \tag{22}$$

因此结合式(19)和式(20)~(22),则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{E}\,|\ \eta^{\varepsilon}-(0,0)\ |_H=0. \tag{23}$$

注意到 η^{ε} 的分布是 μ^{ε}, 证毕. □

注 3.3 我们可以把 FitzHugh-Nagumo 系统的随机稳定性粗略地理解为其所描述的可激系统在外界随机刺激的影响下是稳定的. 换而言之, 有没有噪声对可激系统的影响并不大. 应该注意到这并不是一个平凡的事实, 因为一个可激系统之所以是可激的就是由于其受外界的确定刺激的影响不可忽视. 然而这个定理告诉我们,虽然噪声十分无规律, 但是其对原系统的影响并没有想象的那么大.

4 结 束 语

最后我们陈述本文的数学意义. 这篇文章的结果体现在两个方面. 第一是遍历性,即随机 FitzHugh-Nagumo 系统拥有一个唯一的、具有指数混合速度的不变测度. 粗略地讲,遍历性表明系统拥有一个统计意义的"吸引子",该"吸引子"会以指数速度吸引不同的轨道. 借此我们可以设想和预测随机 FitzHugh-Nagumo 系统的长期行为. 另一方面,我们研究确定 FitzHugh-Nagumo 系统的随机稳定性,即考虑扰动系统的不变测度族在噪声趋于 0 时的渐近行为. 直观上,随机稳定性意味着扰动系统和原系统的平衡态十分接近,只要噪声充分小. 据我们所知,本文是第 1 篇考虑 FitzHugh-Nagumo 系统随机稳定性的文章.

致谢 作者感谢评审专家细致的审核,他们所提到的一些意见很有启发性.

参考文献:

[1] Has'minskii R Z. *Stochastic Stability of Differential Equations*[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1981.

[2] Kifer Y. *Random Perturbations of Dynamical Systems*[M]. Boston: Birkhäuser, 1988.

[3] Baladi V. *Positive Transfer Operators and Decay of Correlations*[M]. Advanced Series in Nonlinear Dynamics. Vol **16**. New Jersey: World Scientific Publishing Co, Inc, 2000.

[4] Blank M. *Discreteness and Continuity in Problems of Chaotic Dynamics*[M]. Transl Math Monographs. Vol **116**. Providence, RI, United States: American Mathematical Society, 1997.

[5] Viana M. *Stochastic Dynamics of Deterministic Systems*[M]. Brazil: Col Bras de Matemática, 1997.

[6] Babin A, Vishik M. *Attractors of Evolution Equations*[M]. Amsterdam: North-Holland, 1992.

[7] Martine M. Finite-dimensional attractors associated with partly dissipative reaction-diffusion systems[J]. *SIAM J Math Anal*, 1989, **20**(4): 816-844.

[8] Rodriguez-Bernal A, Wang B. Attractor for partly dissipative reaction diffusion systems in R^n [J]. *J Math Anal Appl*, 2000, **252**(2): 790-803.

[9] Robinson J. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems, an Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and Theory of Global Attractors*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[10] Teman R. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*[M]. New York: Springer-Verlag, 1988.

[11] 杨美华, 钟承奎. 无界域上部分耗散系统解的全局存在性和唯一性[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2006, **42**(5): 130-136. (YANG Mei-hua, ZHONG Cheng-kui. The existence and uniqueness of the solutions for partly dissipative reaction diffusion systems in R^n [J]. *J Lanzhou University*(*Natural Sciences*), 2006, **42**(5): 130-136. (in Chinese))

[12] Magalhães P, Coayla -Terán E. Weak solution for stochastic FitzHugh-Nagumo equations[J]. *Stochastic Analysis and Applications*, 2003, **21**(2): 443-463.

[13] Huang J, Shen W. Global attractors for partly dissipative random/stochastic reaction diffusion systems[J]. *International Journal of Evolution Equations*, 2009, **4**(4): 383-412.

[14] Da Prato G, Zabczyk J. *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[15] Da Prato G, Zabczyk J. Convergence to equilibrium for classical and quantum spin systems [J]. *Probability Theory and Ralat Fields*, 1995, **103**(4): 529-552.

[16] Peszat S, Zabczyk J. *Stochastic Partial Differential Equations With Lévy Noise*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

[17] Vleck E, Wang B. Attractors for lattice FitzHugh-Nagumo systems[J]. *Physica D*, 2005, **212**(3/4): 317-336.

Stochastic Stability of FitzHugh-Nagumo Systems Perturbed by Gaussian White Noise

ZHENG Yan, HUANG Jian-hua

(*Department of Mathematics*, *National University of Defense Technology*, *Changsha* 410073, *P. R. China*)

Abstract: Stochastic stability of FitzHugh-Nagumo systems perturbed by Gaussian white noise was studied. The dynamics of stochastic FitzHugh-Nagumo systems was studied first, which is essential in establishing the existence and uniqueness of their invariant measures, which mix exponentially. Then, asymptotic behavior of invariant measures when the size of noise gets to zero was investigated.

Key words: stochastic stability; FitzHugh-Nagumo systems; invariant measures; Gaussian white noise