

混合微通道中不稳定的广义 Couette 流*

M·L·考兰吉尼¹, B·K·贾²

(1. 卡诺科技大学 数学系, 乌地尔, 尼日利亚;

2. 艾哈迈杜·贝洛大学 数学系, 扎里亚, 尼日利亚)

摘要: 在一个平行板通道中, 部分充满了均匀的多孔介质, 部分为纯流体的流动区, 对其微通道中完全发展的不稳定层流进行了数值分析, 流动由其中一块板的运动和压力梯度所引起. 多孔介质区域的流动, 采用扩展的 Brinkman 模型, 即 Darcy 模型, 纯净流动区域的流动, 采用 Stokes 方程. 还对稳定的完全发展流进行了理论分析, 给出了分界面速度、边界板处的速度和表面摩擦的闭式解. 通过数值计算发现, 稳定完全发展流的闭式解, 和不稳定流动的数值解, 在所有时间点上得到很好地吻合.

关键词: 不稳定; 混合; 微通道

中图分类号: O357.3 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.01.003

符号说明

u'_f	纯净流动区的有量纲速度	u'_p	多孔介质区的有量纲速度
u_f	纯净流动区的无量纲速度	u_p	多孔介质区的无量纲速度
u_i	(稳定)无量纲界面速度	y	无量纲纵坐标
y'	有量纲纵坐标	ρ	流体密度
β	应力跃变系数	Da	Darcy 数
P	无量纲压力梯度	dp/dy	有量纲压力梯度
ν_f	流体的动粘度	F	切向动量调节系数
K_n	Knudsen 数	λ	分子的平均自由程
β_{v_f}	(7)式中的无量纲变量	ν_{eff}	饱和流体多孔介质区的有效动粘度
k	多孔介质的渗透度	d	分界面的位置
u_{i1}	瞬时分界面速度	u_t	瞬时速度
I_{sk0}	多孔介质壁面处表面摩擦	I_{sk1}	纯净流动区壁面处表面摩擦

引 言

由于在地球物理工程和生物科学中的应用, 流体流过混合通道的研究得到不少学者的关

* 收稿日期: 2010-08-30; 修订日期: 2010-11-22

作者简介: M. L. Kaurangini(联系人. E-mail:kaurangini@yahoo.com).

本文原文为英文, 海治译, 张禄坤校.

注. 文献[1]首先研究了多孔介质和纯流体分界面处的流动问题. 多孔介质中的流动模型采用 Darcy 原理, 在文献[2-13]中有详细地阐述. 在这些结果中, 用到了文献[14-15]提出的边界条件, 以期和分界面处的解相匹配, 从而解决了为文献[16]所指出的, 该过确定性物理问题. 文献[17]综述了多孔介质和纯流体分界面处的边界条件. 文献[18]对渗透率为常数且可以变化时, 给出了平行板中界面的速度. 文献[9]对混合体, 部分为饱和流体的多孔介质和部分为纯流体的混合体, 进行了 Couette 流的传热和流动分析. 在文献[9]中, 用包含 Darcy, Brinkman 和 Forchheimer 项来描述多孔介质中动量的传递. 文献[19]对由两个无限的固定平板所界定的混合通道, 给出了一个新的完全发展受迫对流的解析解, 通道上半部为饱和流体的多孔介质, 下半部为纯流体流动, 底板处施加有均匀的热通量, 顶板处绝热, 应用了 Brinkman-Forchheimer 推广的 Darcy 方程. 文献[20]就流过部分为纯流体, 部分为饱和流体的多孔介质, 对其充分发展的 Couette 流动, 给出了流动和传热的解析解, 多孔介质被系在固定的平板上, 两块平板上有均匀而强度不同的热通量, 使用 Brinkman-Forchheimer-Darcy 方程来表示.

类似地, 文献[21]对具有等温竖向壁的方形腔, 给出了自然对流的数值分析, 腔中充满了饱和的多孔介质, 采用 Brinkman 和 Forchheimer 模型, 给出了自然对流、质量、动量和能量平衡的经典方程. 文献[22]就圆柱体部分充满多孔介质, 侧面加热时, 对其活塞驱动下的层状流动和传热进行了数值求解, 在可压缩动量方程的建立中, 采用了带有可变渗透性的 Brinkman-Lapwood-Forchheimer 推广的 Darcy 模型. 类似地, 文献[23]在两个竖向平行壁之间, 部分充满多孔基体, 部分为纯流体, 形成竖向分界面时, 对其粘性不可压缩流体的完全发展传热进行了研究, 多孔介质中的动量传递采用 Brinkman 推广的 Darcy 模型, 两个区域通过分界面处的速度和剪切应力相耦合. 文献[10]就两块平行板温度为常数但互不相等时, 对平行板界定通道的多孔饱和介质中稳定的层状流进行了研究, 其中一块板以恒定的速度运动, 而另一块板静止, 采用的是 Brinkman-Darcy-Forchheimer 模型.

出于同样的兴趣, 微通道中流体的流动, 也引起该领域众多学者的关注, 它们广泛地应用于微电化学系统(MEMs)和生物医学工程, 例如药物的传输、DNA 排序和生物 MEMs 等. 文献[24-26]也给出了微通道流动的某些研究. 相关的最新理论研究由文献[27]和[28]给出, 两块平行板间的微型几何体分成: micro-tube 和 micro-duct 两种, 对完全发展的流动和发展中的流动两种情况, 研究其受迫对流热传递.

文献[28]就壁面温度分布对称, 竖向平行板末端敞开的微通道中, 完全发展的自然对流进行了解析研究, 稀释效应和流体-壁面的交互作用, 增强了体积流, 减弱了传热率. 文献[29]以双曲线型热传导为模型, 在竖向平行板末端敞开微通道中, 对其流体流动的瞬时流体动力学和热学性质进行了研究. 同样地, 文献[30]在竖向平行板末端敞开的微通道中充满多孔介质时, 对发展中的气体自由对流动力学特性进行了数值分析.

据作者所知, 到目前为止还没有关于混合微通道中流动问题的研究. 本文将研究平行板混合微通道中稳定的和不稳定的流动, 起因在于板的运动和压力梯度, 即广义的 Couette 流动, 对分界面速度和压力梯度有依赖关系的速度和表面摩擦、分界面系数、压力梯度进行了讨论.

1 控制方程

在一个水平平行板中, 局部充满了均匀不变的多孔介质材料, 考虑其微通道中的不稳定流

动. 假设多孔介质区域中的惯性效应可以忽略. 多孔介质层中流体的流动采用 Darcy (Brinkman 的推广) 原理模型, 纯净流动区采用 Stokes 方程. 微通道中流动的成因, 在于其中一块板的运动, 壁面处速度的滑移, 造成压力的梯度, 也是形成微型通道的一个特征. 分界面处的匹配条件, 也采用由文献[14-15]所建议, 并为文献[18]所采用的条件. 壁面处速度的滑移定义为

$$u_s = -\frac{2-F}{F}\lambda \frac{\partial u}{\partial y},$$

其中, u_s 为滑移速度, λ 为分子的平均自由程, F 为切向动量调节系数, 其定义见文献[31], 本文假设其值等于 1. 在以上假设条件下, 满足边界条件和匹配条件, 采用无量纲参数表示的一维不稳定流动的控制方程为

$$\frac{\partial u_f}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_f}{\partial y^2} + P, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} - \frac{u_p}{Da} + P. \quad (2)$$

边界条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} t \leq 0: u_f = 0, u_p = 0; \\ t > 0: u_f = 1 + \beta_v K_n \frac{\partial u_f}{\partial y}, \quad y = 0, \\ u_f = u_p, \gamma \frac{\partial u_p}{\partial y} - \frac{\partial u_f}{\partial y} = \beta \frac{u_p}{\sqrt{Da}}, \quad y = d, \\ u_p = -\beta_v K_n \frac{\partial u_p}{\partial y}, \quad y = 1. \end{array} \right. \quad (3)$$

无量纲参数定义如下

$$\left\{ \begin{array}{l} u_f = \frac{u'_f}{U}, u_p = \frac{u'_p}{U}, y = \frac{y'}{h}, d = \frac{d'}{h}, \gamma = \frac{v_{eff}}{v_f}, \\ Da = \frac{k'}{h^2}, P = -\frac{1}{\rho} \frac{h^2}{Uv_f} \frac{dp}{dx}, t = \frac{t'v}{h^2}, \beta_v = \frac{2-F}{F}, K_n = \frac{\lambda}{h}. \end{array} \right. \quad (4)$$

2 数值解

纯净流动区和多孔介质区的不稳定动量方程可通过数值计算求解. 在格点 (i, j) 处, 将传输方程离散化为有限差分方程, 其中指标 i 表示 y , j 表示 t . 对时间的导数, 用向后差分公式替换, 对空间的导数, 用中心差分公式替换. 将方程组转换为 3 对角线形式的线代数方程组, 应用 Thomas 算法求解. 在每一次时间步长中, 对每一个自变量的数值积分过程, 开始于 $y = 0$ 处首个与壁面邻接的格点, 然后朝有限差分方程组 3 对角线形式中央前进, 直到离界面 $y = d$ 最近的格点为止. 接着对 3 对角线形式对应的多孔介质层积分, 惯常从与分界面另一侧, 最紧靠的格点处, 一直计算到最接近壁面 $y = 1$ 的格点为止. 分界面格点处的自变量值, 由界面匹配条件给出. 重复计算过程直到达到稳定态, 满足以下关于速度场的收敛准则

$$\sum \frac{|A_{i,j+1} - A_{i,j}|}{M |A|_{\max}} < 10^{-4},$$

其中 $A_{i,j}$ 表示速度场, M 表示内部格点数, $|A|_{\max}$ 表示 $A_{i,j}$ 的绝对最大值.

在数值计算中需要指定 Δt 的值, 以期尽快达到稳定, Δt 又应足够小以避免出现不稳定性, 这里取

$$\Delta t = S \times (\Delta y)^2,$$

其中参数 S 通过数值实验确定, 以使计算过程达到收敛和稳定.

3 解析解

前节的控制方程没有给出闭式解. 一般来说闭式解在验证复杂问题的计算机程序和与实验数据比较时, 是十分有用的. 因此将前面的控制方程简化求出闭式解形式, 将是很有意思的. 这里考虑本问题的一个特殊情况, 给出稳定流动的闭式解或精确解. 该特殊情况问题的最终方程可以记为

$$\frac{d^2 u_f}{dy^2} = -P, \quad (5)$$

$$\gamma \frac{d^2 u_p}{dy^2} - \frac{u_p}{Da} = -P. \quad (6)$$

无量纲边界条件和匹配条件为

$$\begin{cases} u_f = 1 + \beta_v K_n \frac{du_f}{dy}, & y = 0, \\ u_f = u_p, \quad \gamma \frac{du_p}{dy} - \frac{du_f}{dy} = \beta \frac{u_p}{\sqrt{Da}}, & y = d, \\ u_p = -\beta_v K_n \frac{du_p}{dy}, & y = 1. \end{cases} \quad (7)$$

对方程(5)关于 y 积分两次得到

$$u_f = -\frac{Py^2}{2} + A_1 y + A_2. \quad (8)$$

类似地, 方程(6)为非齐次微分方程, 利用文献[34]中的方法求解得到

$$u_p = C_1 \cosh\left(\frac{y}{\sqrt{\gamma Da}}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{y}{\sqrt{\gamma Da}}\right) + P Da. \quad (9)$$

然后将解(8)和(9)代入边界条件和匹配条件, 得到常数值如下

$$A_1 = \frac{u_i}{X_0} + X_8, \quad A_2 = X_9 + u_i X_{10}, \quad C_1 = u_i X_{11} + X_5, \quad C_2 = \frac{u_i}{X_3} + X_4,$$

其中

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{X_{15}}{X_{14}}, \quad X_0 = d + K_n, \quad X_1 = \cosh\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma Da}}\right) + \frac{K_n}{\sqrt{\gamma Da}} \sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma Da}}\right), \\ X_2 &= \sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma Da}}\right) + \frac{K_n}{\sqrt{\gamma Da}} \cosh\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma Da}}\right), \quad X_3 = \sinh\left(\frac{d}{\sqrt{\gamma Da}}\right) + \frac{X_2}{X_1} \cosh\left(\frac{d}{\sqrt{\gamma Da}}\right), \\ X_4 &= \frac{P Da \cosh(d/\sqrt{\gamma Da})}{X_1 X_3} - \frac{P Da}{X_3}, \quad X_5 = -\frac{P Da}{X_1} - \frac{X_2}{X_1 X_3} P Da \left[\frac{\cosh(d/\sqrt{\gamma Da})}{X_1} - 1 \right], \end{aligned}$$

$$X_6 = \frac{Pd^2}{2} - 1, X_7 = K_n \left(\frac{Pd^2}{2} \right) + d, X_8 = \frac{X_6}{X_0}, X_9 = \frac{X_7}{X_0}, X_{10} = \frac{K_n}{X_0},$$

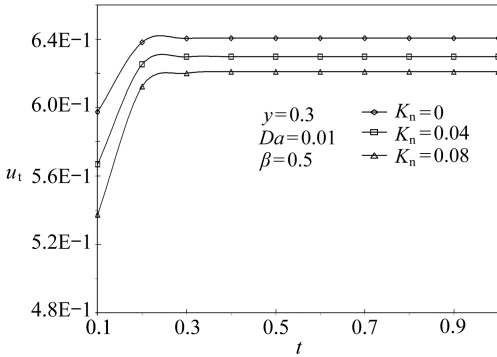
$$X_{11} = \frac{X_2}{X_1 X_3}, X_{12} = \sqrt{\frac{\gamma}{Da}} \sinh\left(\frac{d}{\sqrt{\gamma Da}}\right) + \frac{\beta}{\sqrt{Da}} \cosh\left(\frac{d}{\sqrt{\gamma Da}}\right),$$

$$X_{13} = \sqrt{\frac{\gamma}{Da}} \cosh\left(\frac{d}{\sqrt{\gamma Da}}\right) - \frac{\beta}{\sqrt{Da}} \sinh\left(\frac{d}{\sqrt{\gamma Da}}\right), X_{14} = X_{11} X_{12} + \frac{X_{13}}{X_3} - \frac{1}{X_0},$$

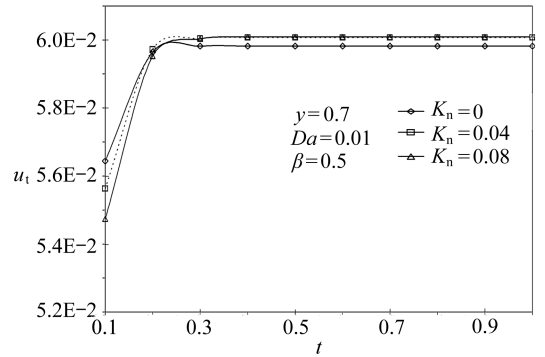
$$X_{15} = \beta P \sqrt{Da} - Pd + X_8 - X_5 X_{12} - X_4 X_{13}.$$

4 结果和讨论

以下讨论均假设,分界面位置为 $d = 0.5$.



(a) 纯流体流动区
(a) Clear fluid region



(b) 多孔介质区
(b) Porous region

图 1 当 Knudsen 数不同时,瞬时速度 u_t 随时间 t 的变化

Fig. 1 Transient velocity profiles for different Knudsen number

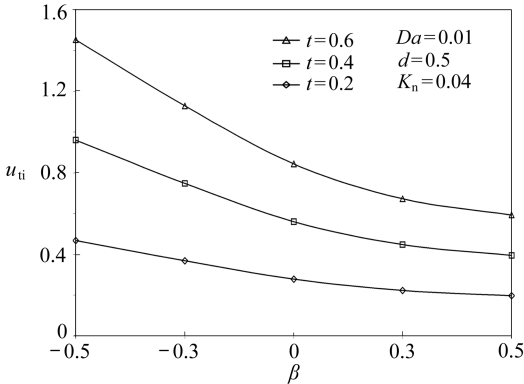


图 2 瞬时界面速度 u_{ti} 随不同应力跃变系数 β 的分布 (其中 $t = 0.2, 0.4, 0.6$)

Fig. 2 Transient interfacial velocity profiles at large time for different stress jump coefficient

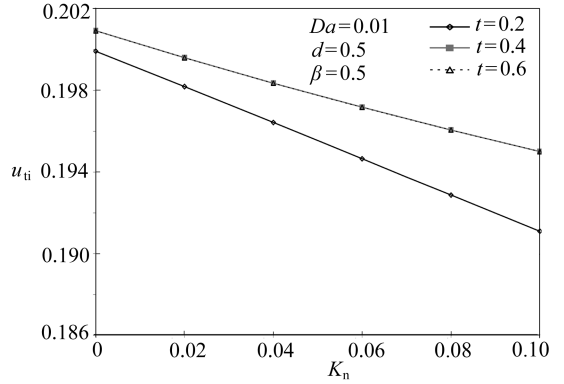


图 3 瞬时界面速度 u_{ti} 随不同 Knudsen 数 K_n 的分布

Fig. 3 Transient interfacial velocity profiles for different Knudsen number

图 1(a) 和图 1(b) 分别给出了不同流动区域,瞬时速度随时间和 Knudsen 数的变化,其中 $y = 0.3$ 在纯净流动区域, $y = 0.7$ 在多孔介质区域。从图中可以看出,随着时间的增加速度也增

加,最后达到稳定状态.图 1(b)表明,随着 Knudsen 数的增加,瞬时速度也增加.有趣地是,随着时间达到稳定状态的独特区域,却与 Knudsen 数无关.

当 $K_n = 0.04, Da = 0.01, d = 0.5$ 时,图 2 给出了瞬时界面速度 u_i 随不同应力跃变系数 β 和不同时间 t 的分布.随着时间的增加, u_i 增加得更加快,在 $\beta = -0.5$ 时, u_i 达到最大值;以后随着 β 的增加,在所考虑的时间点上, u_i 是下降的.从图中还可以看出,当 β 为正时,在所考虑的时间点上, u_i 近乎为常数.

当 $\beta = 0.5, Da = 0.01$ 时,图 3 给出了瞬时分界面速度 u_i 随 Knudsen 数和时间 t 的分布.可以看到, u_i 随着时间的增加而增加,随着 Knudsen 数的增加而减少.

当 Darcy 数和 Knudsen 数变化时,图 4 给出了稳定的界面速度 u_i 随应力跃变系数 β 的变化.可以看到,当 Knudsen 数不变时,界面速度 u_i 随着 β 的减少而上升;同样,当 Darcy 数不变时,界面速度 u_i 随着 Knudsen 数的增加而增加.

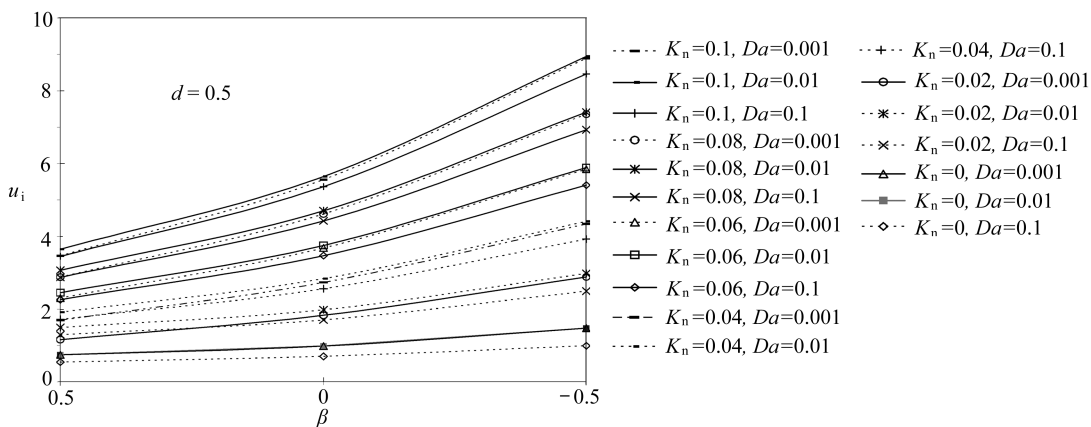


图 4 当 Darcy 数 Da 和 Knudsen 数 K_n 不同时,界面速度 u_i 随 β 的分布

Fig. 4 Interfacial velocity profiles for different Darcy and Knudsen numbers

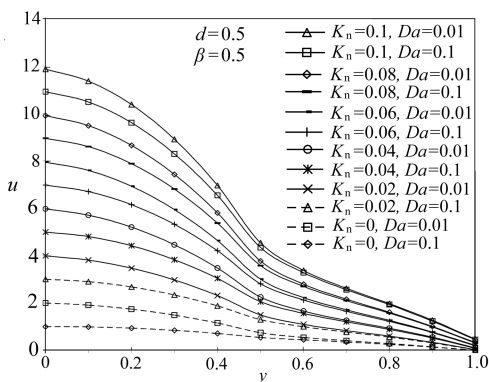


图 5 当 Darcy 数 Da 和 Knudsen 数 K_n 变化时,速度 u 随 y 的变化

Fig. 5 Velocity profile for different Darcy and Knudsen numbers

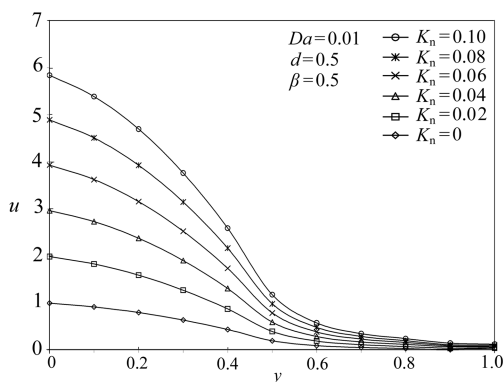


图 6 Knudsen 数变化时,速度 u 随 y 的变化

Fig. 6 Velocity profile for different Knudsen number

当 Darcy 数和 Knudsen 数变化时,图 5 给出了速度 u 的分布.可以看到,随着 Knudsen 数的增加速度 u 在下降.这种物理现象可解释为,随着 Knudsen 数增加,流体分子的自由程长度在

增加,使分子间相互传递动量的机会减少,导致速度的降低.还可以看到,随着 Knudsen 数的增加,壁面处滑移量在增加.

图 6 给出不同 Knudsen 数时的速度分布.可以看到,随着 Knudsen 数的增加,速度 u 也在增加,还值得注意的是,从纯流动区域壁面,到多孔区域壁面,速度 u 是下降的.这是由于多孔介质材料的渗透效应.

当 d 值和 Darcy 数不变时,图 7 给出了速度 u 随不同 β 和 Knudsen 数的分布.可以看到,随着 β 值的减少,速度 u 是增加的.类似地,随着 Knudsen 数的增加,速度 u 也在增加.

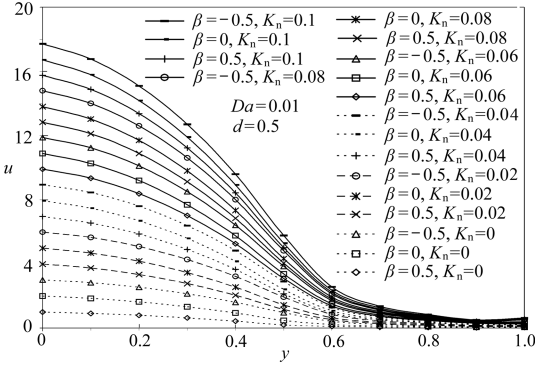


图 7 当应力跃变系数 β 和 Knudsen 数 K_n 变化时,速度 u 随 y 的变化

Fig. 7 Interfacial velocity profile for different stress jump coefficient and Knudsen number

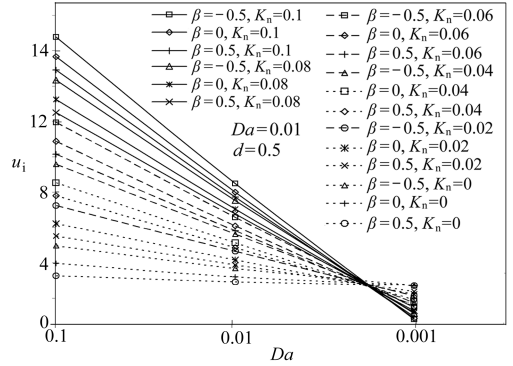


图 8 不同应力跃变系数 β 和 Knudsen 数 K_n 时,界面速度 u_i 的分布

Fig. 8 Interfacial velocity profiles for different stress jump coefficient and Knudsen number

图 8 给出了稳定的界面速度 u_i 随着 Da 的变化.可以看到,当 Knudsen 数不变时,速度 u_i 随 Darcy 数的增加而增加,随着 Darcy 数的减少, u_i 下降到 0.从图中还可以清楚地看到,当 β 不变时,速度 u_i 随着 Knudsen 数的增加而增加.

表 1 时间 t 和 Knudsen 数变化时的壁面瞬时表面摩擦 I_{sk0} 和 I_{sk1}

Table 1 Transient skin frictions at the walls for different time and Knudsen number

Time	I_{sk0}	I_{sk1}	I_{sk0}	I_{sk1}	I_{sk0}	I_{sk1}
	$K_n = 0.0$	$K_n = 0.0$	$K_n = 0.04$	$K_n = 0.04$	$K_n = 0.08$	$K_n = 0.08$
0.1	-0.833 12	0.411 78	-0.887 67	0.294 04	-0.927 77	0.228 47
0.2	-0.611 07	0.416 08	-0.584 29	0.297 91	-0.566 02	0.231 88
0.3	-0.598 88	0.416 31	-0.560 60	0.298 22	-0.528 36	0.232 24
0.4	-0.598 22	0.416 33	-0.558 75	0.298 24	-0.524 44	0.232 27
0.5	-0.598 20	0.416 33	-0.558 62	0.298 24	-0.524 00	0.232 28
0.6	-0.598 20	0.416 33	-0.558 62	0.298 24	-0.524 00	0.232 28
0.7	-0.598 20	0.416 33	-0.558 62	0.298 24	-0.524 00	0.232 28
0.8	-0.598 20	0.416 33	-0.558 62	0.298 24	-0.524 00	0.232 28
0.9	-0.598 20	0.416 33	-0.558 62	0.298 24	-0.524 00	0.232 28
1.0	-0.598 20	0.416 33	-0.558 62	0.298 24	-0.524 00	0.232 28

表 1 给出不同时间和 Knudsen 数时的壁面瞬时表面摩擦.可以看到,对于固定的 Knudsen 数,壁面摩擦 I_{sk0} 和 I_{sk1} 均随着时间增加而增加,并在较长时间后趋于稳定值.还可以看到,随

着 Knudsen 数的增加,壁面摩擦在减少。

表 2 稳定流动时的壁面摩擦

Table 2 Skin friction for steady flow

K_n	Da	β	I_{sk0}	I_{sk1}	u_i
0	0.100	0.5	0.091 6	-1.574 8	0.545 8
0	0.100	0	0.408 8	-1.790 3	0.704 4
0	0.100	-0.5	0.985 8	-2.182 3	0.992 9
0	0.010	0.5	-0.601 0	-0.851 0	0.199 5
0	0.010	0	-0.435 1	-0.436 5	0.282 5
0	0.010	-0.5	-0.030 4	-0.870 3	0.484 8
0	0.001	0.5	-1	0	0
0	0.001	0	-1	0	0
0	0.001	-0.5	-1	0	0
0.04	0.100	0.5	0.107 1	-1.398 7	0.557 9
0.04	0.100	0	0.419 5	-1.600 1	0.726 6
0.04	0.100	-0.5	1.002 8	-1.976 3	1.041 5
0.04	0.010	0.5	-0.560 8	-0.220 7	0.197 1
0.04	0.010	0	-0.406 7	-0.436 3	0.280 4
0.04	0.010	-0.5	-0.025 4	-0.030 1	0.486 3
0.04	0.001	0.5	-1.329 7	-5.1E+07	-0.218 0
0.04	0.001	0	-1.118 7	-2.6E+07	-0.104 1
0.04	0.001	-0.5	-1.054 4	0	-0.069 4
0.08	0.100	0.5	0.117 2	-1.258 4	0.568 0
0.08	0.100	0	0.423 8	-1.447 9	0.745 8
0.08	0.100	-0.5	1.009 8	-1.810 0	1.085 7
0.08	0.010	0.5	-0.526 5	-0.640 6	0.194 6
0.08	0.010	0	-0.383 8	-0.856 3	0.277 4
0.08	0.010	-0.5	-0.027 7	-1.710 4	0.483 9
0.08	0.001	0.5	-1.186 8	-5.1E+07	-0.188 4
0.08	0.001	0	-1.015 9	-2.6E+07	-0.089 2
0.08	0.001	-0.5	-0.963 1	-1.3E+07	-0.058 6
0.10	0.100	0.5	0.120 7	-1.198 5	0.572 4
0.10	0.100	0	0.424 2	-1.382 6	0.754 5
0.10	0.100	-0.5	1.010 7	-1.738 3	1.106 4
0.10	0.010	0.5	-0.510 3	-0.220 4	0.193 8
0.10	0.010	0	-0.371 7	-0.016 0	0.277 0
0.10	0.010	-0.5	-0.023 3	-0.030 1	0.486 0
0.10	0.001	0.5	-1.134 2	-5.1E+07	-0.180 5
0.10	0.001	0	-0.976 3	-2.6E+07	-0.085 8
0.10	0.001	-0.5	-0.927 3	-1.3E+07	-0.056 4

表 2 给出了不同 Darcy 数 Da , 应力跃变系数 β 和 Knudsen 数 K_n 时的稳定流动下的壁面摩擦。从表中可以看到,对于大的 Da 值,当 β 和 K_n 不变时,随着 Da 值的增大, I_{sk0} 在增加,而 I_{sk1} 在减少。还可以看到,当 β 和 K_n 值不变,对于小的 Da 值, I_{sk0} 和 I_{sk1} 均为常数。这表明,当 $Da \rightarrow 0$ 时,意味着多孔介质不再具有渗透性,表面摩擦下降;类似地,当 $Da \rightarrow \infty$ 时,意味着多孔介质具有高度渗透性,表面摩擦增加。另外,随着 Knudsen 数的增加,导致 I_{sk0} 和 I_{sk1} 的增加;当 K_n 和 Da 不变时,随着 β 的减少,导致 I_{sk0} 的增加, I_{sk1} 的减少。这表明,多孔性、应力跃变和分子路径

将影响多孔介质区和纯净流动区表面的摩擦,这些数值的变化,影响着该系统的流动状态。

5 总 结

本文在一个平行板合成的微通道中,由于板的运动和压力梯度,对于其稳定和不稳定的广义 Couette 流动进行了分析。讨论了与流动有关的参数。数值计算表明,对较大的 Darcy 数,不稳定解和较长时间后的精确解完全吻合。

参考文献:

- [1] Beavers G S, Joseph D D. Boundary conditions at a naturally permeable wall[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, **30**(1): 197-207.
- [2] Larson R E, Higdon J J L. Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media—I axial flow[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, **166**: 449-472.
- [3] Larson R E, Higdon J J L. Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media—II tranverse flow[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, **178**: 119-136.
- [4] Sahraoui M, Kaviany M. Slip and no-slip velocity boundary conditions at interface of porous, plain media[J]. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 1992, **35**(4): 927-943.
- [5] Nield D A, Bejan A. *Convection in Porous Media*[M]. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [6] Nield D A, Bejan A. *Convection in Porous Media*[M]. 3rd edition. New York: Springer-Verlag, 2006.
- [7] Kaviany M. *Principles of Heat Transfer in Porous Media*[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [8] Poulikakos D, Kazmierczak M. Forced convection in a duct partially filled with a porous material[J]. *ASME Journal of Heat Transfer*, 1987, **109**(3): 653-662.
- [9] Kuznetsov A V. Analytical investigation of Couette flow in a composite channels partially filled with a clear fluid[J]. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 1998, **41**(16): 2556-2560.
- [10] Pantokratoras A. Fully developed Couette flow of three fluids with variable thermo physical properties flowing through a porous medium channel heated asymmetrically with large temperature differences[J]. *Journal of Heat Transfer*, 2007, **129**(12): 1742-1747.
- [11] Jaballah S, Bennacer R, Sammouda H, Belghith A. Numerical simulation of mixed convection in a channel irregularly heated and partially filled with a porous medium[J]. *Journal of Porous Media*, 2008, **11**(3): 247-257.
- [12] Siddiqui A M, Zeb A, Ghori Q K. Some exact solutions of 2D steady flow of an incompressible viscous fluid through a porous medium[J]. *Journal of Porous Media*, 2006, **9**(6): 491-502.
- [13] Jain N C, Gupta P, Sharma B. Three dimensional Couette flow with transpiration cooling through porous medium in slip flow regime[J]. *Modeling, Measurement and Control B*, 2006, **75**(5): 33-52.
- [14] Ochoa-Tapia J A, Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid—I theoretical development experiment[J]. *International Journal*

- Heat Mass Transfer*, 1995, **38**(14): 2635-2646.
- [15] Ochoa-Tapia J A, Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid—II comparison with experiment[J]. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 1995, **38**(14): 2647-2655.
- [16] Nield D A. The limitations of the Brinkman-Forchheimer equation in modeling flow in a saturated porous medium and at an interface[J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 1991, **12**(3): 269-272.
- [17] Alazmi B, Vafai K. Analysis of fluid flow and heat transfer interfacial conditions between a porous medium and a fluid layer[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2001, **44**(9): 1735-1749.
- [18] Kuznetsov A V. Analytical investigation of the fluid flow in the interface region between a porous medium and a clear fluid in channels partially filled with a porous medium[J]. *Application of Science Research*, 1996, **56**(1): 53-67.
- [19] Kuznetsov A V. Fluid mechanics and heat transfer in the interface region between a porous medium and a fluid layer: a boundary layer solution[J]. *Journal of Porous Media*, 1999, **2**(3): 309-321.
- [20] Kuznetsov A V. Fluid flow and heat transfer analysis of Couette flow in a composite duct[J]. *Acta Mechanica*, 2000, **140**(3): 163-170.
- [21] Oliveski R D C, Marczak L D F. Natural convection in a cavity filled with a porous medium with variable porosity and Darcy number[J]. *Journal of Porous Media*, 2008, **11**(7): 655-667.
- [22] Zahi N, Boughamoura A, Dhahri H, Nasrallah S B. Flow and heat transfer in a cylinder with a porous medium insert along the compression stroke[J]. *Journal of Porous Media*, 2008, **11**(6): 525-540.
- [23] Gorla R S R. Heat transfer between two vertical parallel walls partially filled with a porous medium: use of a brinkman-extended Darcy model[J]. *Journal of Porous Media*, 2008, **11**(5): 457-466.
- [24] Arkilic E B, Breuer K S, Schmitt M A. Gaseous flow in microchannels[C]//*Application of Microfabrication to Fluid Mechanics*, Chicago, 1994, 56-66.
- [25] Beskok A, Karniadakis G E. Simulation of heat and momentum transfer in complex microgeometries[J]. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 1994, **8**(4): 647-755.
- [26] Choi S B, Barron R F, Warrington R O. Fluid flow and heat transfer in microtubes[C]//*Micromechanical Sensors, Actuators and Systems*, ASME, 1991, 123-134.
- [27] Khaled A R A, Vafai A. The effect of the slip condition on Stokes and Couette flows due to an oscillating wall: exact solutions[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2004, **39**(5): 795-809.
- [28] Aydin O, Avei M. Heat and fluid flow characteristics of gases in micro pipes[J]. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 2006, **49**(9/10): 1723-1730.
- [29] Chen C K, Weng H C. Natural convection in a vertical microchannel[J]. *ASME Journal of Heat Transfer*, 2005, **127**(9):1053-1056.
- [30] Khadrawi A F, Othman A, Al-Nimr M A. Transient free convection fluid flow in a vertical mi-

- crochannel as described by the hyperbolic heat conduction model[J]. *International Journal of Thermophysics*, 2005, **26**(3): 905-918.
- [31] Haddad O M, Abuzaid M M, Al-Nimr M A. Developing free convection gas flow in a vertical open-ended microchannel filled with porous media[J]. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 2005, **48**(7): 693-710.
- [32] Gad-el-Hak M. *The MEMS Handbook*[M]. New York: CRC Press, 2001.
- [33] Ross S L. *Differential Equations*[M]. 3rd edition. John Wiley & Sons Inc, 2004.

Unsteady Generalized Couette Flow in Composite Microchannel

M. L. Kaurangini¹, Basant K. Jha²

(1. *Department of Mathematical Sciences, Kano University of Science and Technology, Wudil-Nigeria;*

2. *Department of Mathematics, Ahmadu Bello University, Zaria-Nigeria*

Abstract: A numerical study was reported to investigate the unsteady fully developed laminar fluid flow in microchannel parallel-plates partially filled with uniform porous medium and partially with a clear fluid. The flow was induced by the movement of one of the plates and pressure gradient. Brinkman-Extended Darcy model was utilized to model the flow in porous region while Stokes equation was used in the clear fluid region. A theoretical analysis was also presented for the steady fully developed flow to find the closed form expressions for interfacial velocity, the velocity and skin frictions at the bounding plates. During the course of numerical computations, it is observed that there is an excellent agreement between the closed form solutions for steady fully developed flow with numerical solution of unsteady flow at large values of time.

Key words: unsteady; composite; microchannel