

# 涡旋演化的小波自适应模拟\*

赵 勇<sup>1</sup>, 宗 智<sup>1</sup>, 邹文楠<sup>2</sup>

(1. 大连理工大学 运载工程与力学学部 船舶工程学院  
工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;  
2. 南昌大学 工程力学研究所, 南昌 330029)

(林建忠推荐)

**摘要:** 该文考察了小波自适应方法用于涡旋运动的演化过程. 首先, 通过两个初边值问题, 说明小波方法具有可精度可控和局部结构自动捕捉的能力. 然后, 计算了涡旋的合并过程, 结果表明, 小波方法可以准确高效的应用于流动涡旋的演化预测, 进而, 讨论了小波方法在湍流数值模拟中的应用.

**关键词:** 小波自适应; 涡旋演化; 相干结构; 涡量方程; 湍流

**中图分类号:** O357      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.01.004

## 引 言

小波基函数具有许多优秀性质, 比如有限支撑基函数、对称性、正交或双正交性质等, 使得小波方法可以用于微分方程数值模拟<sup>[1-4]</sup>. 相比于 Fourier 方法, 小波方法的最大的优点是基函数有限支撑性质. 在 Fourier 方法中, 基函数是三角函数, 具有无穷域支撑, 它的展开系数是整个域分布的平均效果, 局部结构信息很难集中展现. 而在小波方法中, 小波基函数是有限域支撑的, 通过伸缩和平移变换, 小波分析可以细致反映局部结构信息, 据此小波方法是适合求解局部结构问题的<sup>[5-7]</sup>.

能准确地模拟涡旋演化在流动数值模拟特别是湍流数值模拟中非常紧要, 因为涡旋普遍分布在流动中, 随流动迁移并发生伸缩扭转变形<sup>[8]</sup>. 正是由于涡旋形态的多样性和涡旋的多尺度分布特征, 极大地增加了湍流数值模拟的计算量和难度. 湍流本质上是三维的, 其数值模拟应当通过三维流动控制方程来计算. 本文旨在探讨小波用于湍流数值模拟的可行性, 将通过一个二维涡旋演化的模拟算例, 考察基于小波数值方法的精度及其自动捕捉强脉动的能力, 为后续实现三维湍流数值模拟积累一些经验.

小波系数临界值确定的方案选择对于湍流的小波自适应模拟的效果和效率非常关键. Farge 和 Schneider<sup>[5-6]</sup> 基于去噪理论获得临界值公式, 提出相干涡模拟 (coherent vortex simula-

\* 收稿日期: 2010-07-02; 修订日期: 2010-10-29

基金项目: 创新研究群体基金资助项目(50921001); 973 资助项目(2010CB832700)

作者简介: 赵勇(1981—), 男, 博士生(联系人. E-mail: fluid@mail.dlut.edu.cn);

宗智(1964—)男, 教授, 博士(E-mail: zongzhi@dlut.edu.cn);

邹文楠(1968—), 男, 教授, 博士(E-mail: zouwn@ncu.edu.cn).

tion, CVS), 把湍流量当作一个脉动信号, 可分解为相干结构和 Gauss 概率分布噪音. 临界值由样本数目和噪音方差决定, 该公式的缺点是噪音部分并不能事先确定, 只能保守估计. Goldstein 和 Vasilyev<sup>[9]</sup> 认为 CVS 的缺点是计算量大和不能确保 Gauss 噪音残余, 他们直接指定临界值, 提出统计相干结构自适应大涡模拟 (stochastic coherent adaptive large eddy simulation, SCALE), 以节约相干结构提取的计算量, 但是由于临界值较大, 需要模式理论来考虑忽略部分对统计相干结构的影响, 总计算量并不明显较少. 本文提出一种新的临界值公式, 它具有显式形式, 并由当前流动演化特征决定. 依照这一临界值公式, 通过二维涡旋演化算例, 得到了与文献报道一致的涡旋演化形态<sup>[10-11]</sup>.

本文第 1 节简要地介绍了小波理论和它在涡量方程数值模拟中的应用, 详细介绍可参阅文献[12], 并给出了流动小波自适应模拟中用到的临界值公式以及二维流动数值模拟的计算流程; 第 2 节通过 2 个简单算例, 考察了算法的精度和自适应能力; 第 3 节做了三涡合并算例, 模拟 3 个初始涡量为 Gauss 分布型的涡旋合并过程; 第 4 节给出研究结论.

## 1 小波理论及其在涡量方程中应用

小波基是平方可积空间  $L^2(R)$  上的多分辨分析, 即可以把空间分解成序列嵌套子空间,  $V_j \subset V_{j+1}$ ,  $j \in \mathbf{Z}$ ; 满足  $\cup V_j = L^2(R)$  和  $\cap V_j = \{0\}$ . 定义  $W_j$  为  $V_j$  在  $V_{j+1}$  的正交补, 即  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ .  $L^2(R)$  就可以表述为  $W_j$  的值和  $L^2(R) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j$ ,  $W_j$  就是小波基函数.  $L^2(R)$  空间的小波基函数  $W_j$ , 是正交并且有限支撑的, 它可以通过一个简单函数  $\psi(x)$  的伸缩和平移来实现:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad (1)$$

指标  $j, k \in \mathbf{Z}$ ,  $j$  称为尺度指标,  $k$  是位置指标. 函数  $\psi(x)$  可以定义一个伴随函数  $\varphi(x)$ , 称为尺度函数, 这些函数有以下关系:

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} g_k \varphi(2x - k), \quad (2)$$

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} h_k \varphi(2x - k), \quad (3)$$

其中

$$g_k = (-1)^k h_{L-k-1}, \quad k = 0, \dots, L-1, \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1. \quad (5)$$

并且, 小波函数  $\psi(x)$  具有  $M$  阶消失矩

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) x^m dx = 0, \quad m = 0, \dots, M-1. \quad (6)$$

以上定义后,  $\{\psi_{j,k}(x), k \in \mathbf{Z}\}$  就形成  $W_j$  空间的正交基,

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), \quad k \in \mathbf{Z}, \quad (7)$$

形成  $V_j$  空间的正交基.

系数  $H = \{h_k, k = 0, \dots, L-1\}$  和  $G = \{g_k, k = 0, \dots, L-1\}$  称为映射过滤器, 一旦  $H$  确定, 函数  $\psi$  和  $\varphi$  就完全确定. 对 Daubechies 小波来说,  $L = 2M - 1$ . 记  $\text{sup } \varphi$  和  $\text{sup } \psi$  分别为尺度函数和小波函数的定义域, 那么,  $\text{sup } \varphi = [0, 2M - 1]$  和  $\text{sup } \psi = [-M + 1, M]$ . 二维情况下的基函数可以通过一维基函数的张量积形成,

$$\begin{cases} \varphi_{j,kl}(x,y) = \varphi_{j,k}(x)\varphi_{j,l}(y), \\ \psi_{j,kl}^{\mu}(x,y) = \begin{cases} \psi_{j,k}(x)\varphi_{j,l}(y), & \mu = 1, \\ \varphi_{j,k}(x)\psi_{j,l}(y), & \mu = 2, \\ \psi_{j,k}(x)\psi_{j,l}(y), & \mu = 3. \end{cases} \end{cases} \quad (8)$$

二维流动下, 涡量方程相对简单, 我们用它来模拟二维涡旋流动, 控制方程如下给定:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = v \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad (9)$$

由于正交性, 我们就可以把涡量表述为以下多尺度的小波表达形式:

$$\omega(x,y) = \sum_{k=0}^{2^{j_0-1}} \sum_{l=0}^{2^{j_0-1}} c_{j_0,kl} \varphi_{j_0,kl}(x,y) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{l=0}^{2^j-1} \sum_{\mu=1}^3 d_{j,kl}^{\mu} \psi_{j,kl}^{\mu}(x,y), \quad (10)$$

其中

$$c_{j_0,kl} = \langle \omega, \varphi_{j_0,kl} \rangle, \quad (11)$$

$$d_{j,kl}^1 = \langle \omega, \psi_{j,kl}^1 \rangle, \quad (12)$$

$$d_{j,kl}^2 = \langle \omega, \psi_{j,kl}^2 \rangle, \quad (13)$$

$$d_{j,kl}^3 = \langle \omega, \psi_{j,kl}^3 \rangle. \quad (14)$$

这些表达式中, 涡量被投影到一序列的嵌套空间里, 因而能够进行多尺度分析, 即  $j_0 \leq j \leq J-1$ ,  $j_0, J$  分别表示最大和最小尺度指标. 通过这些投影, 可以实现流动脉动量在不同尺度上的观测, 这在小波信号分析领域是经常采用的. 我们设定小波系数临界值后, 就把涡量分成了 3 部分, 尺度系数部分和绝对值大于临界值的显著小波系数部分及绝对值小波临界值的平凡小波系数部分, 具体表示为

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \omega_{\geq} + \omega_{<}, \\ \omega_0 = \sum_{k=0}^{2^{j_0-1}} \sum_{l=0}^{2^{j_0-1}} c_{j_0,kl} \varphi_{j_0,kl}(x,y), \\ \omega_{\geq} = \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{l=0}^{2^j-1} \sum_{\mu=1}^3 d_{j,kl}^{\mu} \psi_{j,kl}^{\mu}(x,y), & |d_{j,kl}^{\mu}| \geq \varepsilon_j^{(\mu)}, \\ \omega_{<} = \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{l=0}^{2^j-1} \sum_{\mu=1}^3 d_{j,kl}^{\mu} \psi_{j,kl}^{\mu}(x,y), & |d_{j,kl}^{\mu}| < \varepsilon_j^{(\mu)}, \end{cases} \quad (15)$$

$\omega_0, \omega_{\geq}$  和  $\omega_{<}$  可认为分别对应着流动的主体、强脉动和微弱脉动. 我们保留前面两部分来近似重构涡量, 并且定义它们为相干结构

$$\omega^* = \omega_0 + \omega_{\geq} \approx \omega. \quad (16)$$

在自适应方法中, 小波系数的临界值非常重要. 它决定了计算量的大小, 并且还关联着相干结构的定义. 我们认为, 相干结构对应着流动脉动中的强脉动. 在脉动量的小波级数的表达式中, 我们选取小波系数绝对值大于给定的临界值部分和尺度系数项重构得到的量称为相干结构. 本文定义以下临界值公式

$$\varepsilon_j^{(\mu)} |_{\iota} = \left( \frac{1}{2^{2j}} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{l=0}^{2^j-1} d_{j,kl}^{(\mu)2} \right)^{1/2} \Big|_{\iota-1}, \quad (17)$$

该值可认为是在某一给定时间的二阶脉动强度的平均值, 它随时间变动, 能够反映流动的时间间歇性. 从公式看, 临界值随尺度变化, 对应了湍流的尺度特征, 同时, 不同方向的值也不一样, 比如二维情况下, 有水平、垂向和对角线方向, 这可以对应湍流的各向异性. 可见, 该临界值的这些特征与湍流的间歇性, 多尺度及方向差异是很一致的, 符合湍流的物理特征.

记  $\theta(x)$  为尺度函数的自相关函数

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\varphi(y-x)dy, \tag{18}$$

$\varphi$  为尺度函数,它具有正交性质和有限支撑特征,正交性可以导致插值性质,

$$\theta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{19}$$

本文采用 6 阶 Daubechies 小波消失矩函数 (Db6), 虽然这类小波没有显式表达式,但是我们可以通过尺度公式(2)和(3)叠加得到任意尺度上的数值结果. 图 1 是 Db6 的尺度函数及小波函数在尺度  $j = 7$  上的结果. 图 2 是相应的尺度函数的自相关函数及其导数在尺度  $j = 7$  上的结果

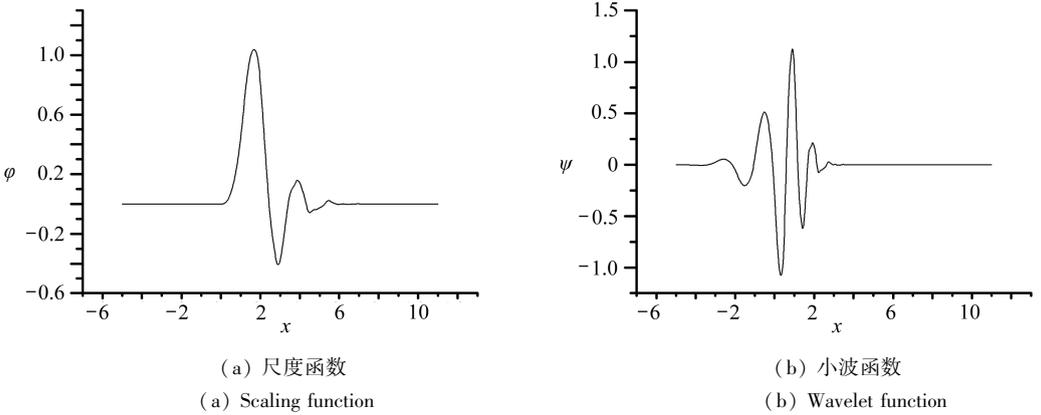


图 1 Db6 在尺度  $j = 7$  的函数

Fig.1 Functions of Db6 at scale of 7

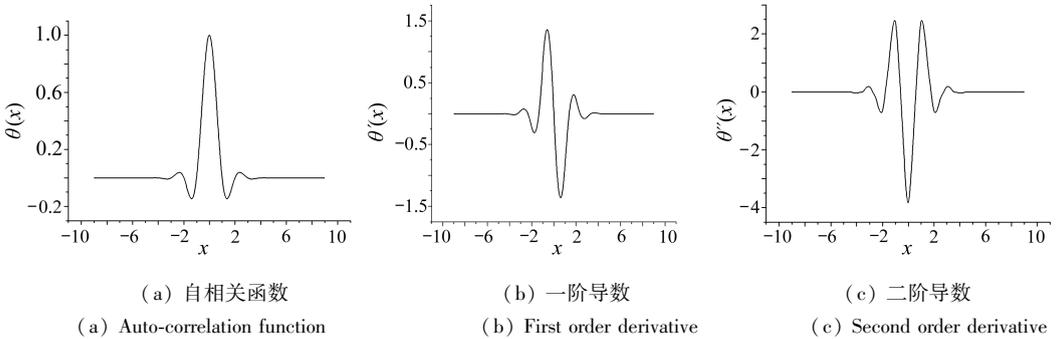


图 2 Db6 尺度函数的相关函数及其导数在尺度  $j = 7$  上的数值计算结果

Fig.2 Auto-correlation function and derivatives of scale 7 of Db6 numerical results

把公式(3)代入公式(18),得到

$$\theta(x) = \theta(2x) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^M a_{2l-1} [\theta(2x - 2l + 1) + \theta(2x + 2l - 1)], \tag{20}$$

其中

$$a_k = \begin{cases} 2 \sum_{l=0}^{2M-1-k} h_l h_{l+k}, & k = 1, 3, \dots, 2M - 1, \\ 0, & k = 2, 4, \dots, 2M - 2. \end{cases} \tag{21}$$

公式(20)对  $x$  求导,得到

$$\theta^{(n)}(x) = \theta^{(n)}(2x) + 2^{n-1} \sum_{l=1}^M a_{2l-1} [\theta^{(n)}(2x - 2l + 1) + \theta^{(n)}(2x + 2l - 1)]. \quad (22)$$

为了获得速度,需要求解以下 Poisson 方程:

$$\Delta \Psi = \omega^*, \quad (23)$$

其中  $\Psi$  为流函数,速度  $u$  和  $v$  可以如下获得:

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (24)$$

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (25)$$

$\Psi$  用自相关函数表示如下:

$$\Psi(x_{J,kk}, y_{J,ll}) = \sum_{k=1}^{2^{J-1}} \sum_{l=1}^{2^{J-1}} C_{J,kl} \theta(2^J x_{kk} - k) \theta(2^J y_{ll} - l). \quad (26)$$

利用插值性质,我们有

$$C_{J,kl} = \Psi(2^{-J}k, 2^{-J}l). \quad (27)$$

对公式(26)求导,得到

$$\begin{aligned} \Psi_x(x_{J,kk}, y_{J,ll}) &= 2^J \sum_{k=1}^{2^{J-1}} \sum_{l=1}^{2^{J-1}} C_{J,kl} \theta'(2^J x_{kk} - k) \theta(2^J y_{ll} - l) = \\ &2^J \sum_{k=-9}^9 C_{J,kk+k,ll} \theta'(-k), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Psi_y(x_{J,kk}, y_{J,ll}) &= 2^J \sum_{k=1}^{2^{J-1}} \sum_{l=1}^{2^{J-1}} C_{J,kl} \theta(2^J x_{kk} - k) \theta'(2^J y_{ll} - l) = \\ &2^J \sum_{l=-9}^9 C_{J,kk,ll+l} \theta'(-l), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{xx}(x_{J,kk}, y_{J,ll}) &= 2^{2J} \sum_{k=1}^{2^{J-1}} \sum_{l=1}^{2^{J-1}} C_{J,kl} \theta''(2^J x_{kk} - k) \theta(2^J y_{ll} - l) = \\ &2^{2J} \sum_{k=-9}^9 C_{J,kk+k,ll} \theta''(-k), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{yy}(x_{J,kk}, y_{J,ll}) &= 2^{2J} \sum_{k=1}^{2^{J-1}} \sum_{l=1}^{2^{J-1}} C_{J,kl} \theta(2^J x_{kk} - k) \theta''(2^J y_{ll} - l) = \\ &2^{2J} \sum_{l=-9}^9 C_{J,kk,ll+l} \theta''(-l). \end{aligned} \quad (31)$$

把公式(29)和(30)代入公式(23),采用连续超松弛迭代算法,得到

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}(x_{J,kk}, y_{J,ll}) &= \Psi_n(x_{J,kk}, y_{J,ll}) + \frac{R_e}{2\theta''(0)} \left\{ \frac{1}{2^{2J}} \omega(x_{kk}, y_{ll}) - \right. \\ &\sum_{k=-9}^{-1} \Psi_{n+1}(x_{J,kk+k}, y_{J,ll}) \theta''(-k) - \sum_{k=0}^9 \Psi_n(x_{J,kk+k}, y_{J,ll}) \theta''(-k) - \\ &\left. \sum_{l=-9}^{-1} \Psi_{n+1}(x_{J,kk}, y_{J,ll+l}) \theta''(-l) - \sum_{l=0}^9 \Psi_n(x_{J,kk}, y_{J,ll+l}) \theta''(-l) \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

下标  $n$  表示迭代次数,  $R_e$  表示松弛系数. 当  $0 < R_e < 2$ ,可以保证迭代是收敛的.  $\Psi$  收敛得到后,就可以用公式(24)和(25)计算速度.

本文计算的是周期边界初值问题,整个计算流程如下:

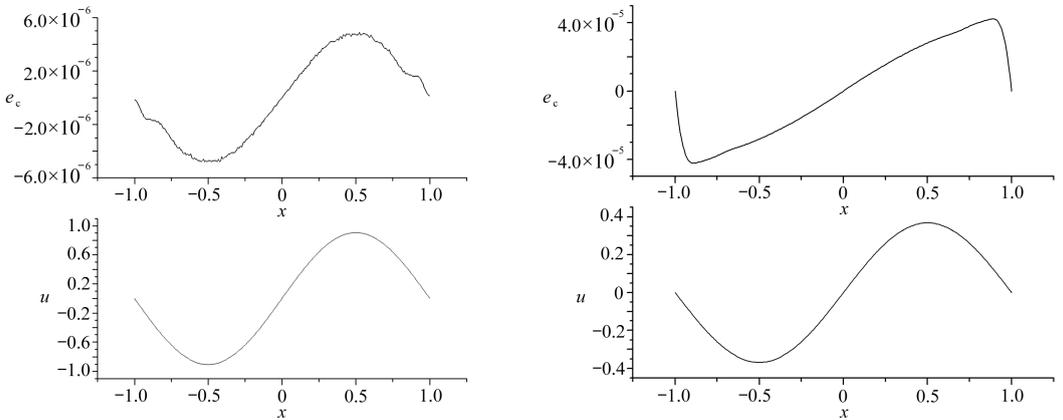
1) 确定计算尺度范围,即大尺度  $j_0$  和小尺度  $J$ ,  $j_0 \leq j \leq J$ ,得到嵌套节点位置  $x_{j,k} = (x_e - x_s) \cdot k/2^j$ ,  $y_{j,k} = (y_e - y_s) \cdot k/2^j$ ,  $x_e, x_s, y_e, y_s$  分别是水平方向和竖直方向的终点和起点坐标;

- 2) 利用二维 Mallat 快速分解算法计算涡量在各小尺度的小波系数和大尺度上的尺度系数;
- 3) 用尺度系数和显著小波系数重构涡量;
- 4) 用公式(32)迭代计算流函数;
- 5) 通过公式(24)及(25)计算速度  $u, v$ ;
- 6) 在计算边界及其附近的小波系数的时候,本文算例采用了周期延拓.时间递进了三阶 Rung-Kutta 方法,然后回到步骤 2);
- 7) 重复以上过程,计算到时间终点时刻结束.

通过设定小波系数临界值,定义相干结构,它与原始量之间的误差和临界值是同一量级,这在下一节的算例中将得到检验.重要的是,由于小波变换具有高压缩比,在利用公式(15)重构相干结构时,相比于公式(10)可以极大地减少参与重构的小波系数个数.通过第 3 节的算例表明,只需要 10% 的系数就可以重构出原始量的几乎所有特征,可以节约重构过程运算量的 90%,并且误差控制在 1% 以内.迭代求解流函数和对流函数求导得到速度,相比于重构确定相干结构这两个过程的计算量之和只是个小量.因为实际运算中,迭代是通过上一时刻的值作为当前时刻的初始值来计算的,而这只需要几次迭代就可完成,求导运算也只需要临域少数几个点就可完成.由此可见,小波自适应方法是一种精度可控的高效率数值方法,需要指出的是它的储存量并不减少,每个节点及其物理值都需要存储.

## 2 精度和自适应验证

以下算例,说明方法的精度.第 1 个问题为



(a)  $t = 0.1$  的计算结果及误差

(b)  $t = 1$  的计算结果及误差

(a) Numerical value and its error when  $t = 0.1$

(b) Numerical value and its error when  $t = 1$

图 3 方程(33)的数值解与解析解比较

Fig. 3 Comparison between numerical and precise value of equation (33)

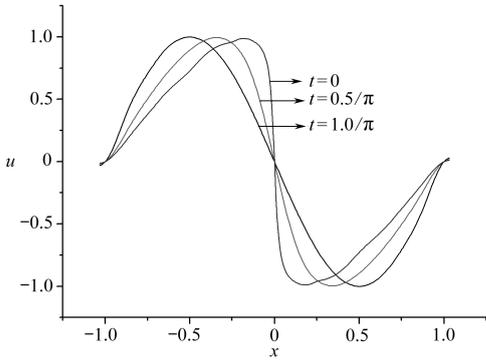
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\pi^2 \partial x^2}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), & x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (33)$$

该问题的精确解是:  $u(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x)$ . 计算中取  $j_0 = 3, J = 7$ , 临界值  $\varepsilon = 10^{-6}$ . 图 3 是误差和数值解, 误差控制在  $\varepsilon$  量级.

另举一例说明方法的自适应捕捉间断的能力. 该问题为

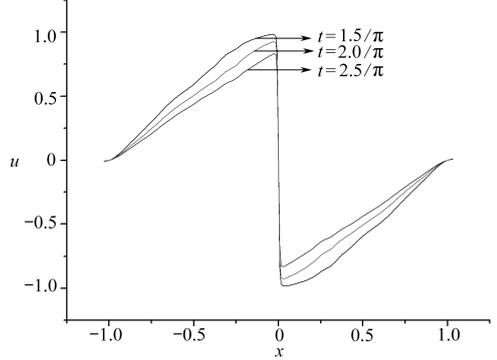
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (-1, 1), t > 0, \quad (34)$$

初始及边界条件  $u(x, 0) = -\sin(\pi x), u(\pm 1, t) = 0$ , 其中粘性系数  $\nu = 10^{-2}/\pi$ .



(a)  $t = 0, 0.5/\pi, 1.0/\pi$  时的数值解

(a) Numerical value when  $t = 0, 0.5/\pi, 1.0/\pi$

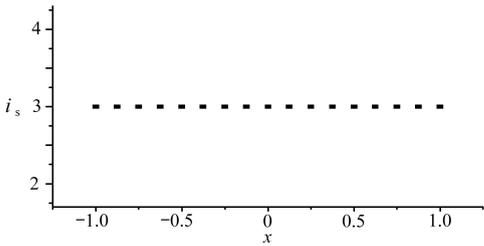


(b)  $t = 1.5/\pi, 2.0/\pi, 2.5/\pi$  时的数值解

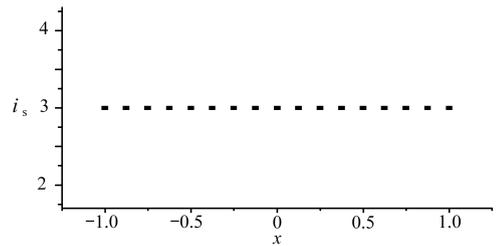
(b) Numerical value when  $t = 1.5/\pi, 2.0/\pi, 2.5/\pi$

图4 方程(34)的数值解

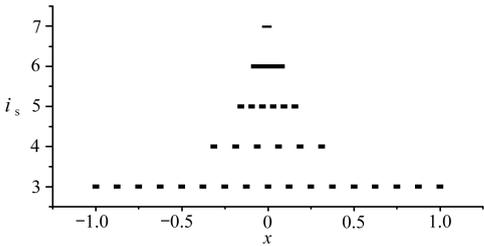
Fig.4 Numerical value of equation (34)



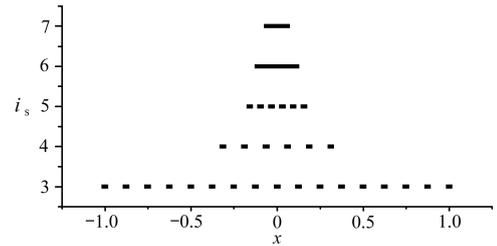
(a)  $t = 0.5/\pi$



(b)  $t = 1.0/\pi$



(c)  $t = 2.0/\pi$



(d)  $t = 2.5/\pi$

图5 方程(34)的节点自适应位置,纵坐标表示层次指标

Fig.5 Adaptive grid points of equation (34), the vertical coordinate is scale indexing is value

在有限的时间内,该方程会产生间断,通常可以用这种间断的捕捉来检验解微分方程算法的自适应性.为了有效分辨间断,最细微尺度取  $J = 7$ . 其余取  $j_0 = 3, \varepsilon = 10^{-3}, \Delta t = \nu$ . 图4是时间演化过程,计算表明,随着时间发展,解在  $x = 0$  处逐步发展成激波.在  $t = 1.5/\pi$ , 激波已经充分形成,速度梯度最大值达到 154.4. 之后由于粘性力的平滑作用,激波的幅度和梯度逐渐减小.结果表明,算法可以有效地捕捉激波.图5是计算过程中小波系数绝对值大于临界值  $\varepsilon$  对应的空间位置,在  $t = 1.0/\pi$  时刻之间,速度分布是均匀分布的,显著小波系数也均匀分布.随着时间递进,突出小波系数在间断发生的位置逐渐加密,这表明了小波算法具有自适应能力.这一节2个算例表明,本文方法具有精度可控和自适应的优点,下一节以三涡合并流动算

例,说明它在以涡旋演化为主导过程的流动也能获得良好的计算结果。

### 3 三涡合并计算

考虑以下的初始涡量分布:

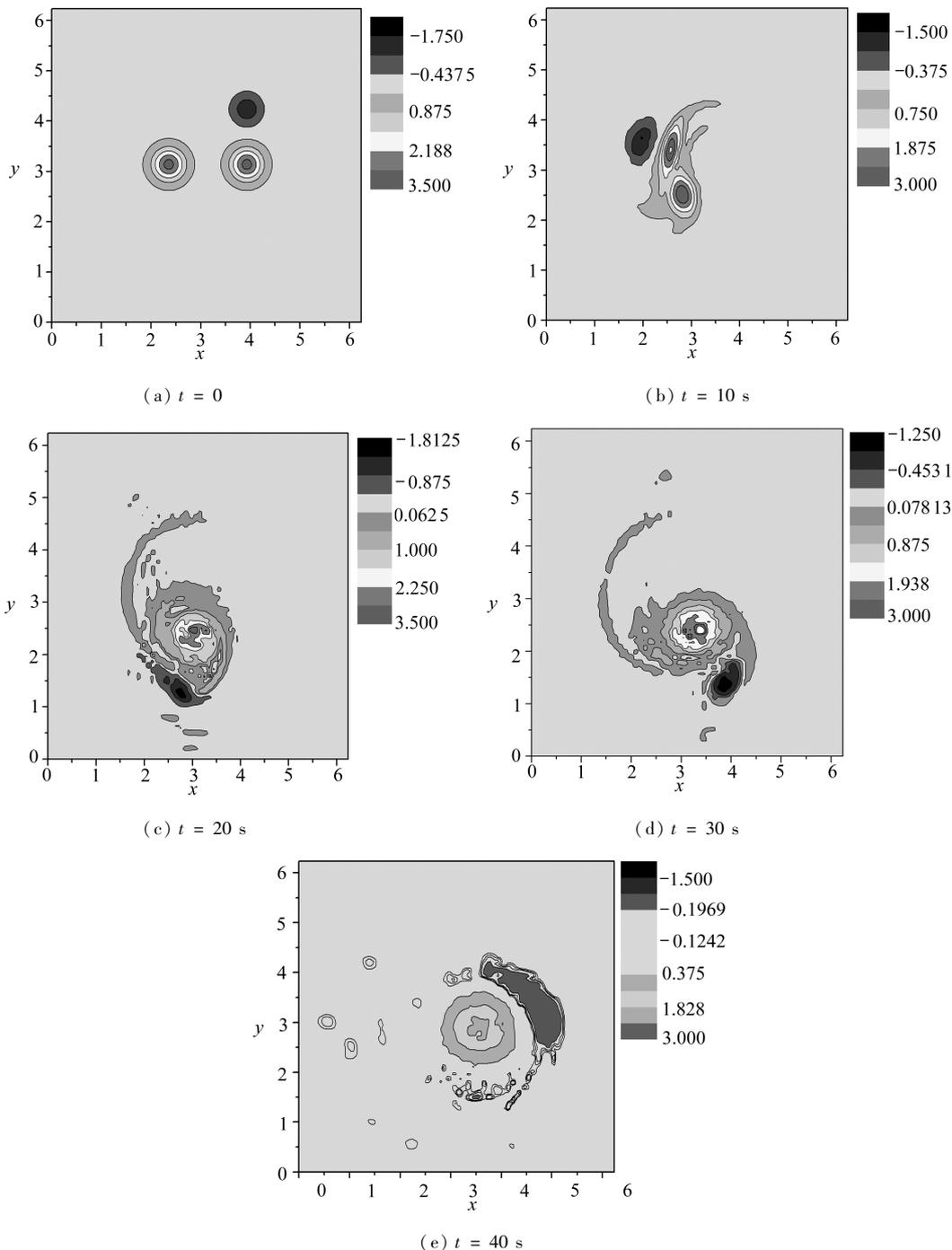


图6 涡量等值线各时刻演化图像

Fig. 6 Results of vorticity isolines from initial to 40 s

$$\omega(x, y, 0) = \sum_{i=1}^3 A_i \exp(-((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)/\sigma_i^2), \quad (35)$$

其中  $u, v$  分别是水平方向和竖直方向的速度,  $\nu$  是动力粘性系数, 取值  $\nu = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ . 其中方差  $\sigma_i = 1/\pi$ , 幅值  $A_1 = A_2 = -2A_3 = \pi$ . 初始位置  $x_1 = 3\pi/4, x_2 = x_3 = 5\pi/4, y_1 = y_2 = \pi, y_3 = \pi(1 + 1/(2\sigma_2))$ . 该初始条件对应了两个逆时针方向和一个顺时针方向的 Gauss 分布涡, 边界条件认为是周期的. 计算中, 给定  $j_0 = 4, J = 7$ , 计算空间区域是  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ , 时间区域是  $[0, 40]$ . 时间步长  $\Delta t = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$ .

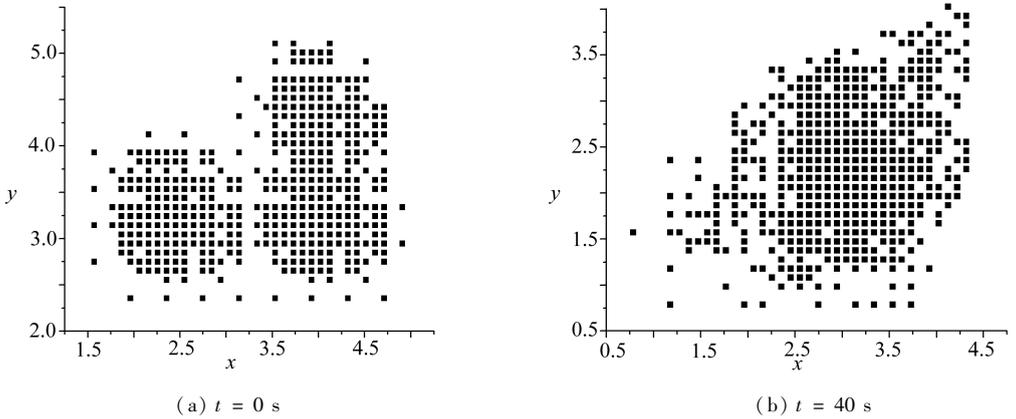


图7 显著小波节点位置

Fig. 7 Adaptive grid points distribution

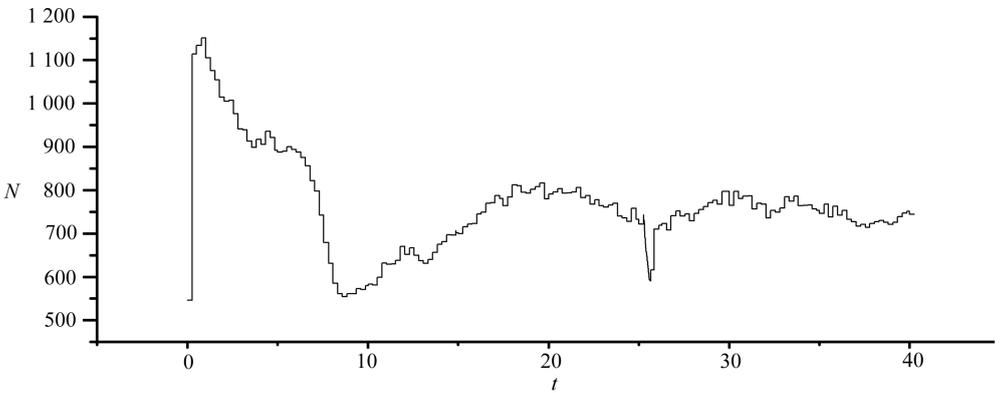


图8 显著小波系数数目随时间变化情况

Fig. 8 Number of significant wavelet coefficients during evolution

涡量的演化过程如图 6 所示, 演化形态和文献[11-12]是一致的. 图 7 显示了在初始时刻  $t = 0 \text{ s}$  和时刻  $t = 40 \text{ s}$  的自适应节点, 对比图 6, 可见节点能够很好地自动吻合大涡量区域. 图 8 显示了显著小波系数在整个涡旋演化中的数目变化, 看起来出现台阶状, 是因为实际计算的每 50 个时间步长, 我们只做一次相干结构的重构. 显著小波系数平均是 750 个, 而总体数目 7 536, 占 9.95%. 显著小波系数的数目在初始时刻是最小, 因为初始时刻涡量分布最均匀, 然后随即突然增大, 是因为计算中引入了一些数值误差, 然后趋于平稳. 图 9 显示的是拟涡能的演化, 分别对应着是原始涡量、相干结构涡量及残余涡量, 这说明了只需要不到 10% 的小波系数加上粗网格上的尺度系数就可以捕捉到大于 99% 的拟涡能. 这就是小波数值方法的最大优点, 不但

能自动追踪流动局部结构,而且还能控制精度。

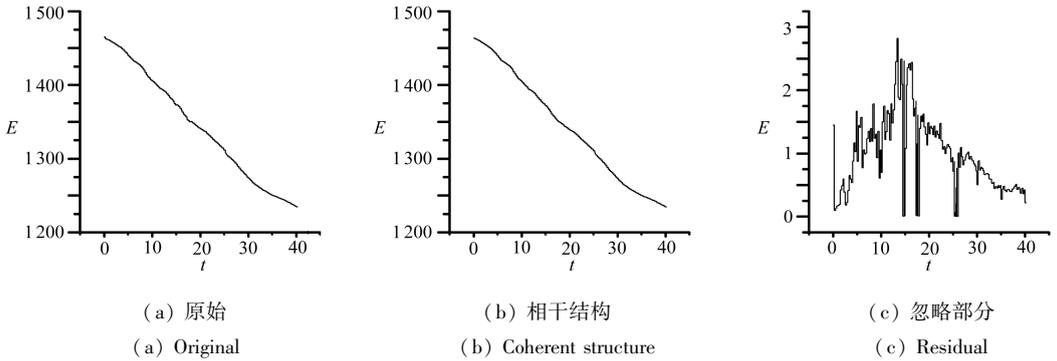


图9 拟涡能的时间变化

Fig.9 The evolution of enstrophy corresponding three vorticity respectively

## 4 结 论

小波自适应数值方法,可以用于微分方程数值求解,由于其基函数的有限支撑性质和多尺度分辨特征,特别适合于求解具有空间局部结构和多尺度特性的物理问题.通过第1个算例,表明了小波数值方法能控制精度,通过第2个算例,表明方法能自动追踪物理演化过程中的局部结构,并且还能保持精度,然后计算了三涡旋合并的过程.通过这个涡旋演化算例,说明小波方法能准确地预测流动脉动的演化规律.

在湍流数值模拟中,考虑涡旋局部结构特征和其多尺度特征对提高计算效率和对数值结果的认识水平是有帮助的,小波方法应该这方面能做出一些有希望地尝试,我们会在这方面做进一步的研究.

### 参考文献:

- [1] 梅树立, 陆启韶, 张森文, 金俐. 偏微分方程的区间小波自适应精细积分法[J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(3): 333-340. (MEI Shu-li, LU Qi-shao, ZHANG Sen-wen, JIN Li. Adaptive interval wavelet precise integration method for partial differential equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2005, **26**(3): 364-371.)
- [2] Beylkin G, Keiser J. On the adaptive numerical solution of nonlinear partial differential equations in wavelet bases[J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, **132**(2): 233-259.
- [3] 宗智, 赵勇, 邹文楠. 小波插值方法自适应数值求解时间进化微分方程[J]. 计算力学学报, 2010, **27**(1): 65-69. (ZONG Zhi, ZHAO Yong, ZOU Wen-nan. Numerical solution for differential evolutionary equation using adaptive interpolation wavelet method[J]. *Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**(1): 65-69. (in Chinese))
- [4] Qian S, Wiess J. Wavelets and the numerical solution of partial differential equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, **106**(1):155-175.
- [5] Farge M, Schneider K, Kevlahan N K R. Non-Gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using an adaptive orthogonal wavelet basis[J]. *Physics of Fluids*, 1999, **11**(8):2187-2201.
- [6] Farge M, Kaiser S. Coherent vortex simulation (CVS), a semi-deterministic turbulence model using wavelets[J]. *Flow, Turbulence and Combustion*, 2001, **66**(4):393-426.

- [7] 郭会芬, 邱翔, 刘宇陆. 小波变换在湍流数值研究中的应用[J]. 计算力学学报, 2006, **23**(1): 58-64. (GUO Hui-fen, QIU Xiang, LIU Yu-lu. Application of wavelet analysis in numerical study of turbulence[J]. *Journal of Computational Mechanics*, 2006, **23**(1): 58-64. (in Chinese))
- [8] 夏振炎, 田砚, 姜楠. 用子波谱分析壁湍流多尺度结构的能量传递[J]. 应用数学和力学, 2009, **30**(4):409-416. (XIA Zhen-yan, TIAN Yan, JIANG Nan. Wavelet spectrum analysis on energy transfer of multi-scale structures in wall turbulence[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2009, **30**(4): 435-443. )
- [9] Goldstein D E, Vasilyev O V. Stochastic coherent adaptive large eddy simulation method[J]. *Physics of Fluids*, 2004, **16**(7):2497-2513.
- [10] Schneider K, Kevlahan N K R, Farge M. Comparison of an adaptive wavelet method and non-linearly filtered pseudo-spectral methods for two-dimensional turbulence [J]. *Theory and Computational Fluid Dynamics*, 1997, **9**(3): 191-206.
- [11] Kumar B V R, Mehra M. A time accurate pseudo-wavelet scheme for two-dimensional turbulence[J]. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 2005, **3**(4):587-599.
- [12] Farge M. Wavelet transforms and their application to turbulence[J]. *Ann Rev Fluid Mech*, 1992, **24**:395-457.

## Numerical Simulation of Vortex Evolution Based on Adaptive Wavelet Method

ZHAO Yong<sup>1</sup>, ZONG Zhi<sup>1</sup>, ZOU Wen-nan<sup>2</sup>

(1. *School of Naval Architecture, Faculty of Vehicle Engineering and Mechanics, State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P. R. China;*

2. *Institute of Engineering Mechanics, Nanchang University, Nanchang 330029, P. R. China*)

**Abstract:** The application of wavelet method to vortex motion's prediction was investigated. First, the wavelet method was used to solve two initial boundary problems so as to verify its abilities of controlling numerical errors and capturing local structures. Then, the adaptive wavelet method was used to simulate the vortex emerging process. The results show that the wavelet method can predict the vortex evolution precisely and effectively. The application of this method to turbulence is suggested at last.

**Key words:** adaptive wavelet; vortex evolution; coherent structure; vorticity equation; turbulence