

微极流体向受热面的 MHD 驻点流动*

M·阿斯拉夫, M·M·阿斯拉夫

(巴豪丁 扎卡利亚大学 理论与应用数学前沿研究中心, 木尔坦, 巴基斯坦)

摘要: 分析了有均匀横向磁场作用时, 导电微极流体垂直冲击受热面时形成的二维驻点流动问题. 应用适当的相似转换, 将连续、动量、角动量及热量的控制方程, 及其相应的边界条件, 简化为无量纲形式. 然后, 利用以有限差分离散化为基础的算法, 求解简化了的自相似非线性方程. 用 Richardson 外推法, 进一步求精其结果. 以图表形式表示磁场参数、微极性参数、Prandtl 数对流动和温度场的影响, 说明了其解的重要特性. 研究表明, 随着磁场参数的增大, 速度和热边界层厚度变小了. 与 Newton 流体相比较, 微极流体的剪应力和传热率出现明显的减少, 这对聚合物生产过程中流体的流动和热量控制是有益的.

关键词: 磁流体动力学(MHD); 驻点流动; 微极流体; 相似变换; 有限差分; 边界层

中图分类号: O361 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.01.005

引 言

流经加热或冷却物体的磁流体动力学驻点流动问题, 由于其在工程和自然过程中有着广泛的应用, 吸引了众多学者的关注. 例如包括血浆的研究、血液的流动问题、MHD 发电机和冷却槽中有限金属平板的冷却. Hiemenz^[1]首先研究了平板上经典二维驻点流动问题, Homann^[2]对该问题的轴对称情形做了延伸性研究. Wang^[3]对不同密度的两种流体, 作两种动力学冲击的驻点流问题进行了研究, 结果表明, 其流动场严重地依赖于流体的粘度和密度. Ariel^[4]研究了外加磁场对 Hiemenz 流动的影响. Mahapatra 和 Gupta^[5]分析了伸展表面上的二维 MHD 稳定驻点流问题, 得到的结论是, 当自由流速度小于/大于伸展面的速度时, 驻点上的速度随着外加磁场的增大而减小/增大. Chamkha 等^[6]也研究了二维 MHD 流经平板问题, 分析了放热/吸热和热泳对流动的影响. 朱婧等^[7]运用同伦分析法(HAM), 研究了不可压缩粘性流体, 流向延伸薄板的稳定二维驻点流动, 速度与裂缝间的距离成比例. 但是, 上述作者的研究工作仅限于 Newton 流体的流动. 经典的 Newton 模型, 不适用于描述一些现代工程和工业过程, 它们是由有内部结构的材料所组成.

Hoyt 和 Fabula^[8]实验研究了那些不能够由 Newton 模型描述的流体, 如有聚合物添加剂的流体, 剪应力和聚合物浓度显著减小(见文献[9]). Eringen^[10-11]引入微极流体理论, 该理论是

* 收稿日期: 2010-08-05; 修订日期: 2010-11-10

作者简介: Muhammad Ashraf, 巴基斯坦人(联系人. Tel. + 92-300-7354190; E-mail: mashraf_mul@yahoo.com).

本文原文为英文, 黄锋译, 张禄坤校.

描述这种材料变形的最好的理论之一。由于微极流体在许多工业过程的应用,因此吸引了许多学者进行研究。这些流体在血液流动、胶状流体流动、液体结晶、润滑剂、毛细管中的湍流剪切流、热量和质量交换等中已有应用。微极流体的其他应用,可参见文献[12-13]。

Guram 和 Smith^[14]解决了具有强和弱相互作用的,微极流体的驻点流问题。Ahmadi^[15]考虑了不可压缩微极流体,流经半无限平板时的边界层流动问题。Cheng^[16]在微极流体中的混合对流,沿着考虑传导效应的垂直平板流动时,开展了对其流动和传热特性的数值研究。Lok 等^[17]对控制参数的某些值,数值分析了平板上稳定的二维非正交微极流体的驻点流。Seddeek^[18]通过相似变换简化无量纲形式的运动控制方程,来研究磁场对微极流体流经连续移动平板时的影响。利用相同的简化方法,Ishak 等^[19]求解了向浸没在微极流体中的竖直面上的稳定驻点流问题。随后,用一个以有限差分离散化的算法,数值地求解了该简化的方程组。Ashraf 等^[20-21]利用有限差分法,在一个管道中,两个有限平行圆盘之间的微极流体,对称层流问题进行了研究。Ishak 等^[22]利用 Keller 工具箱,伸展面具有不同表面温度时的,稳定二维 MHD 驻点流问题进行了研究。最近,Ishak 等^[23]分析了收缩面上的稳定二维微极流体的驻点流,假设收缩速度和周围流体速度随离驻点的距离呈线性变化。

本文,我们要关注的是,导电微极流体流向有热传导效应表面时的 MHD 驻点流问题。以前的作者都没有考虑过该问题。用一个以有限差分离散化的算法,数值地求解转换后的控制方程及其相应的边界条件。

1 问题的公式化表示

考虑二维稳定的不可压缩导电微极流体,对表面作垂直冲击时的非线性驻点流动问题。流体承受强度为 B_0 的均匀横向磁场作用。令 (u, v) 为 Cartesian 坐标系 (x, y) 方向的速度分量。

根据文献[10-11],微极流体 MHD 稳定粘性层流运动的控制方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

$$(\lambda + 2\mu + \kappa) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\mu + \kappa) \nabla \times \nabla \times \mathbf{V} + \kappa \nabla \times \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \rho \dot{\mathbf{V}}, \quad (2)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \gamma(\nabla \times \nabla \times \mathbf{v}) + \kappa \nabla \times \mathbf{V} - 2\kappa \mathbf{v} + \rho \mathbf{l} = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_m \mathbf{J}, \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (7)$$

其中, \mathbf{V} 为流体速度矢量, \mathbf{v} 为微转动, ρ 为密度, p 为压力, \mathbf{l} 为单位质量的体力偶, \mathbf{j} 为微惯性矩, \mathbf{J} 为电流密度, ∇ 为梯度算子, μ_m 为磁导率, \mathbf{E} 为电场, \mathbf{B} 为总磁场, 因此有 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$, \mathbf{b} 为诱导磁场, σ_e 为流体的导电率, $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \kappa$ 为微极流体的材料常数(或粘性系数)。上述方程中字母上的点表示对其求导数。此外,由方程(4)和(5)得到 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 。

假设均匀稳定磁场 \mathbf{B} 垂直于速度场 \mathbf{V} 。假定磁场的 Reynolds 数很小^[24], 因为诱导磁场 \mathbf{b} 和外加磁场相比可以忽略。由于假定没有极化电压,所以电场 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ 。如果流体为电绝缘体,流体中的电流将会引起诱导磁场。在这里,我们认为流体为导电流体。

根据上述假定,在方程(2)中出现的电磁体力呈下列的线性形式^[25]:

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \sigma_e [(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0] = -\sigma_e B_0^2 \mathbf{V}. \quad (8)$$

根据文献[10]和[17],没有体力偶时,带边界层近似的,微极流体的稳定二维不可压缩流

动方程(1) ~ (8)可以简化为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\mu + \kappa}{\rho}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\sigma_e B_0^2}{\rho} (U - u), \quad (10)$$

$$\rho j \left(u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \kappa \left(2\phi + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (11)$$

其中, ϕ 为垂直于 xy -平面的微转动向量分量, U 为自由流速度. 假设所有的物理量 $\rho, \mu, \kappa, \gamma, j$ 为常量.

不考虑粘性耗散时, 该问题中控制温度分布的方程可以写为

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \kappa_0 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (12)$$

其中, T 为流体温度, κ_0 为热导率常数, c_p 为比热容. 该问题的速度、微转动和温度分布的边界条件可以写为

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, v(x, 0) = 0, u(x, \infty) = U = ax, \\ \phi(x, 0) = 0, \phi(x, \infty) = 0, T(x, 0) = T_w, T(x, \infty) = T_\infty. \end{cases} \quad (13)$$

为了获得速度、微转动和温度场, 在式(13)给出的边界条件下对方程(9) ~ (12)进行求解. 利用下面的相似变换:

$$\begin{cases} \eta = \sqrt{\frac{a}{v}} y, p(x, \infty) = p_0 - \frac{\rho a^2}{2} (x^2 + y^2), \\ u(x, y) = axf'(\eta), v(x, y) = -\sqrt{av}f(\eta), \\ \phi(x, y) = -a\sqrt{\frac{a}{v}} xg(\eta), \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \end{cases} \quad (14)$$

其中, η 为相似参数, p_0 为驻点压力, T_w 为冲击面处的温度, T_∞ 为流体在无穷远处的温度.

利用方程(14)发现, 连续方程(9)自动满足, 因此表明, 该速度场是一个可能的流体运动. 在方程(10) ~ (12)中利用方程(14), 经过简化得到

$$(1 + R)f''' - Rg' + M^2(1 - f') + 1 = f'^2 - ff'', \quad (15)$$

$$Ag'' + RC(f'' - 2g) = f'g - fg', \quad (16)$$

$$\theta'' + Prf\theta' = 0, \quad (17)$$

其中, $M = \sqrt{\sigma_e B_0^2 / (\rho a)}$ 为 Hartmann 数(或磁场参数), $R = \kappa / \mu$ 为涡流粘性参数, $A = \mu / (\rho j a)$ 为微惯性密度参数, $C = \gamma / (\mu j)$ 为转动梯度粘性参数, $Pr = \mu c_p / \kappa_0$ 为 Prandtl 数. 根据方程(14), 方程(13)中给出的边界条件可以写为

$$\begin{cases} f(0) = 0, f'(0) = 0, f'(\infty) = 1, \\ \theta(0) = 1, \theta(\infty) = 0, g(0) = 0, g(\infty) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

注意到, 不出现微转动, 即 $\kappa = 0$ 时, 方程(15) ~ (17) 简化为文献[3]($M = 0$)中得到的 Newton 流体情况. 本模型对微极流体运动有效.

2 数值解

控制方程(15) ~ (17)的高度非线性, 无法解析地求解. 为了求解这组耦合的方程组, 我们采用以数值算法为基础的有限差分法. 方程(15)可以借助 $q = f'$ 置换, 使得由方程(15) ~ (17)

及边界条件(18)给出的边界值问题,变为如下形式.

求解方程组

$$q = f' = \frac{df}{d\eta}, \quad (19)$$

$$(1 + R)q'' - Rg' + M^2(1 - q) + 1 = q^2 - fq', \quad (20)$$

$$Ag'' + RC(q' - 2g) - qg + fg' = 0, \quad (21)$$

$$\theta'' + Prf\theta' = 0, \quad (22)$$

满足相应的边界条件

$$\begin{cases} f(0) = 0, q(0) = 0, q(\infty) = 1, \\ \theta(0) = 1, \theta(\infty) = 0, g(0) = 0, g(\infty) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

为了得到该问题的数值解,首先以步长 h 均匀地离散区域 $(0, \infty)$. 由文献[26]给出的公式,利用 Simpson 定理^[27]对方程(19)进行积分. 在区间 $(0, \infty)$ 的典型网格点 $\eta = \eta_n$ 上,对导数应用中心差分逼近,离散方程(20)~(22),然后运用超松弛(SOR)法^[28],在给定的边界条件(23)下,对它们进行迭代求解. 为了加快迭代进度和提高解的计算精度,我们主要应用由文献[29]介绍的算法.

如果3次连续迭代满足下面的准则,迭代过程终止:

$$\begin{aligned} \max(\|q^{(k+1)} - q^{(k)}\|_2, \|g^{(k+1)} - g^{(k)}\|_2, \\ \|f^{(k+1)} - f^{(k)}\|_2, \|\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}\|_2) < T_{\text{iter}}, \end{aligned} \quad (24)$$

其中, T_{iter} 为给定的允许误差,计算中至少取为 10^{-12} .

应用 Richardson 外推法,可以得到更高阶的精度. 利用文献[30]中的任一外推法,可以完成该计算过程.

3 结果及讨论

在这节中,着重其解的重要特征,影响流动和热传导现象的参数值范围,并以表格和图形形式给出. 为了检验数值计算的有效性和提高解的精度,计算了3种网格尺寸 $h, h/2$ 和 $h/4$, 并应用 Richardson 外推法进行外推.

表1 3种尺寸网格和外推值下的无量纲法向速度 f (其中 $\eta_\infty = 6, M = 2, R = 4, Pr = 0.7$)

Table 1 Dimensionless normal velocity f on three grid levels and extrapolated values for $\eta_\infty = 6, M = 2, R = 4, Pr = 0.7$

η	f			
	$h = 0.035$	$h = 0.0175$	$h = 0.00875$	extrapolated value
0.0	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
0.6	0.159 171	0.159 199	0.159 206	0.159 209
1.2	0.555 414	0.555 478	0.555 494	0.555 499
1.8	1.069 900	1.069 980	1.070 001	1.070 007
2.4	1.635 279	1.635 365	1.635 386	1.635 393
3.0	2.221 620	2.221 708	2.221 729	2.221 737
3.6	2.816 397	2.816 485	2.816 507	2.816 514
4.2	3.414 474	3.414 562	3.414 584	3.414 592
4.8	4.013 803	4.013 891	4.013 913	4.013 920
5.4	4.613 592	4.613 680	4.613 702	4.613 709
6.0	5.213 549	5.213 637	5.213 660	5.213 667

表1给出了法向速度在3种网格尺寸和其外推数值的比较. 良好的比较结果,证实了数值

计算的有效性,同时证明了使用外推法可以得到更高阶的精度.对于表面上的磁场参数 M 、微转动参数(即涡流粘性参数 R 、微惯性密度参数 A 以及旋转梯度粘性系数 C) 和 Prandtl 数 Pr 的数值范围,选择给出剪切应力、应力偶、传热率、速度和热边界层厚度、速度和微转动场.任意选取涡流粘性参数 R 的值为 0, 2, 4, 6, 以研究其对流动特性的影响,另外两个参数 A 和 C , 对流动没有重要影响,因为它们的值是固定的,这与文献[16]和[31-33]的习惯做法一样.表 2 给出了外加磁场对剪切应力、应力偶和传热率的影响.冲击面处的剪切应力、应力偶和传热率,随着磁场参数 M 的增大而增大.涡流粘性参数 R 值的增大,会导致冲击面处的剪切应力和传热率减小,但是可以发现,对应力偶的影响正相反,如表 3 所示.产生这样结果的主要原因是,在流体运动时,微极流体比 Newton 流体产生的阻力(由于动粘性和涡流粘性)更大.Prandtl 数 Pr 的增大,会提高传热率,如表 4 所示,但是剪切应力和应力偶不受该变化的影响.

表 2 M 值变化时,冲击面处的剪切应力、应力偶及其传热率(其中 $\eta_\infty = 6, Pr = 0.7, R = 2$)

Table 2 Shear & couple stresses and heat transfer rate on the surface for $\eta_\infty = 6, Pr = 0.7, R = 2$ and various values of M

M	$f''(0)$	$g'(0)$	$-\theta'(0)$
0	0.649 9	0.731 2	0.443 2
2	1.275 5	1.101 7	0.498 7
4	2.327 3	1.513 8	0.551 7
6	3.447 5	1.803 8	0.605 3
8	4.587 3	2.013 4	0.634 7
10	5.734 1	2.171 5	0.647 1

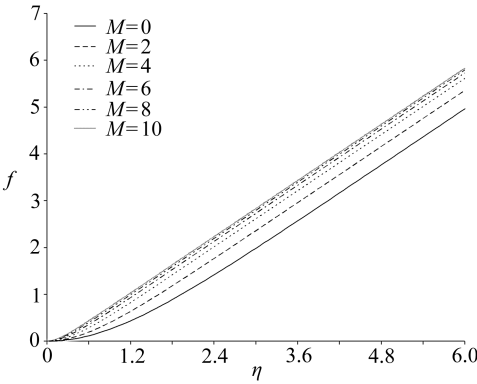


图 1 M 变化时的法向速度曲线 ($R = 2, Pr = 0.7$)

Fig. 1 Normal velocity profiles for $R = 2, Pr = 0.7$ and various M

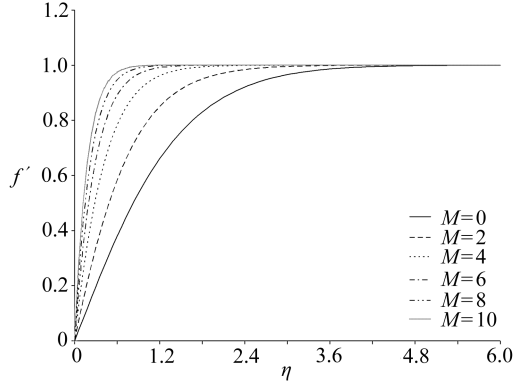


图 2 M 变化时的自由流速度曲线 ($R = 2, Pr = 0.7$)

Fig. 2 Streamwise velocity profiles for $R = 2, Pr = 0.7$ and various M

表 3 R 值变化时,冲击面处的剪切应力、应力偶及其传热率(其中 $\eta_\infty = 6, Pr = 0.7, M = 1.5$)

Table 3 Shear & couple stresses and heat transfer rate on the surface for $\eta_\infty = 6, Pr = 0.7, M = 1.5$ and various values of R

R	$f''(0)$	$g'(0)$	$-\theta'(0)$
0	1.938 9	0.000 0	0.533 4
2	1.044 8	0.980 4	0.482 0
4	0.759 9	1.291 2	0.460 3
6	0.616 1	1.433 2	0.446 2

外加磁场对速度、微转动和温度场的影响,在图 1 至图 4 中给出.法向速度曲线 f 和自由流

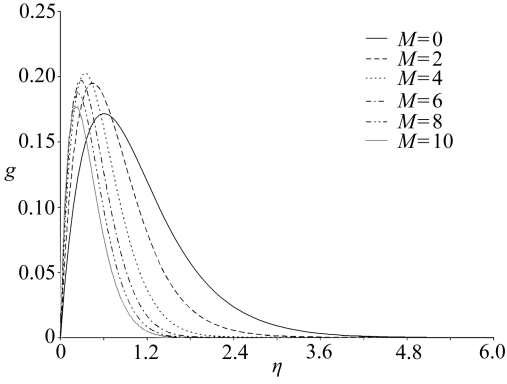


图3 M 变化时的微转动曲线 ($R = 2, Pr = 0.7$)

Fig. 3 Microrotation profiles for $R = 2, Pr = 0.7$ and various M

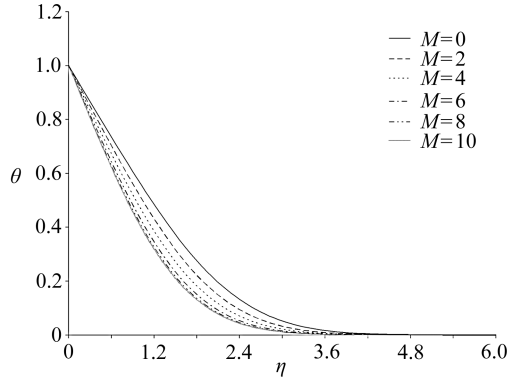


图4 M 变化时的温度曲线 ($R = 2, Pr = 0.7$)

Fig. 4 Temperature profiles for $R = 2, Pr = 0.7$ and various M

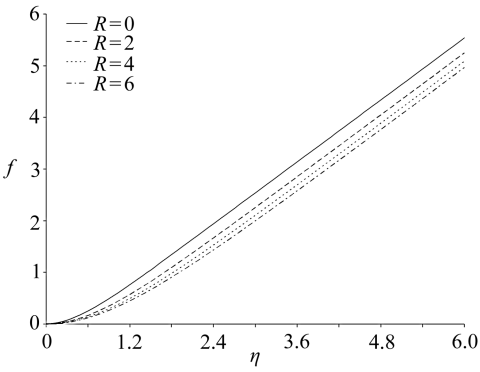


图5 R 变化时的法向速度曲线 ($M = 1.5, Pr = 0.7$)

Fig. 5 Normal velocity profiles for $M = 1.5, Pr = 0.7$ and various R

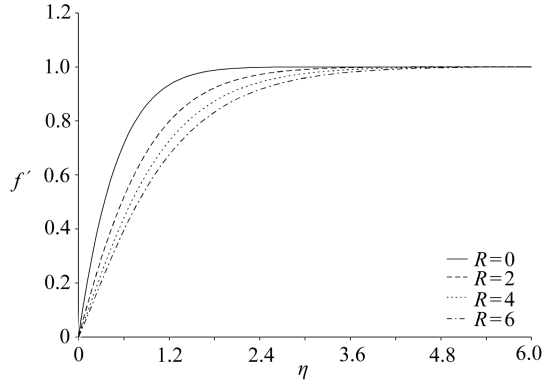


图6 R 变化时的自由流速度曲线 ($M = 1.5, Pr = 0.7$)

Fig. 6 Streamwise velocity profiles for $M = 1.5, Pr = 0.7$ and various R

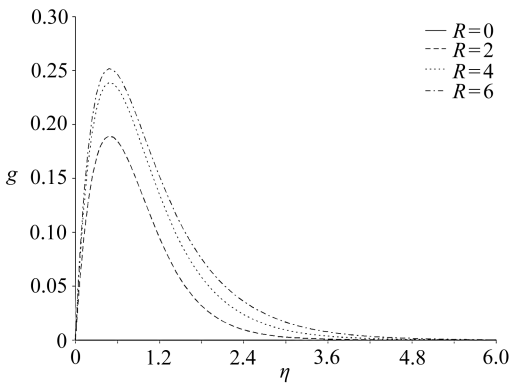


图7 R 变化时的微转动曲线 ($M = 1.5, Pr = 0.7$)

Fig. 7 Microrotation profiles for $M = 1.5, Pr = 0.7$ and various R

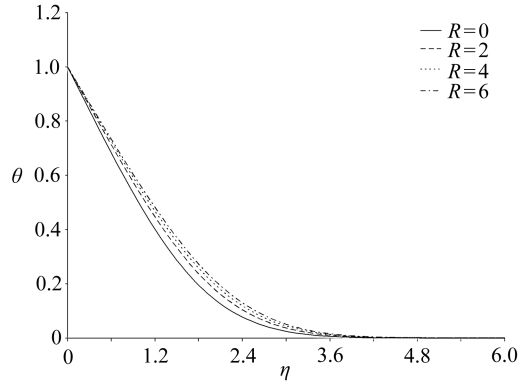


图8 R 变化时的温度曲线 ($M = 1.5, Pr = 0.7$)

Fig. 8 Temperature profiles for $M = 1.5, Pr = 0.7$ and various R

速度曲线 f' 均随着磁场参数 M 的增大而增大, 分别在图1和图2中表示. 由于速度衰减的影响, 速度边界层厚度随着外加磁场的增大而减小, 如图2所示. 微转动曲线随着 M 值的增大而减

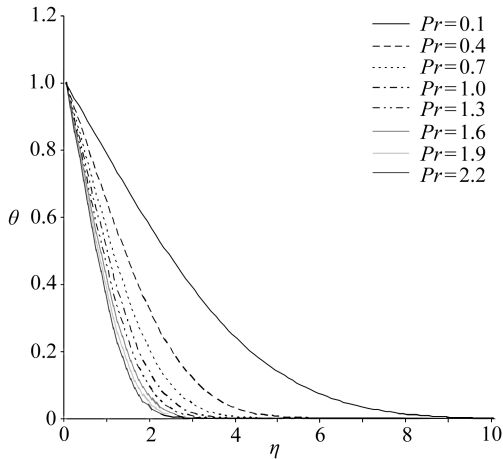


图9 Pr 变化时的温度曲线 ($M = 2, R = 4$)

Fig. 9 Temperature profiles for $M = 2, R = 4$ and various Pr

表4 Pr 值变化时,冲击面处的传热率(其中 $\eta_{\infty} = 10, M = 2, R = 4$)

Table 4 Heat transfer rate on the surface for $\eta_{\infty} = 10, M = 2, R = 4$ and various values of Pr

Pr	0.1	0.4	0.7	1.0	1.3	1.6	1.9	2.2
$-\theta'(0)$	0.236 5	0.382 8	0.477 3	0.547 7	0.605 0	0.654 1	0.697 3	0.736 0

4 结 论

就均匀外加磁场作用下流过冲击面的导电微极流体,给出了各个控制参数取不同数值时,热传导对 MHD 流动影响的数值研究.应用以有限差分法为基础的算法,数值地求解了无量纲化后的转换方程.得到以下主要结论:

- 1) 冲击面处的剪切应力和传热率,随着磁场参数的增大而增大;
- 2) 与 Newton 流体相比,冲击面处微极流体的剪切应力和传热率是减少的;
- 3) 速度和热边界层厚度随着磁场强度的增大而减小,但随着涡流粘性参数的增大反而增大;
- 4) Prandtl 数 Pr 的增大,使得温度曲线和热边界层厚度都减小.

致谢 作者对审稿人给本文提出的宝贵意见和建议,表示衷心地感谢.

参考文献:

- [1] Hiemenz K. Die Grenzschicht in einem in dem gleichförmigen flüssigkeitsstrom eingetauchten gerade kreiszylinder[J]. *Dingler Polytechnic Journal*, 1911, **326**: 321-340.
- [2] Homann F. Der einfluss grosser zahigkeit bei der stromung um den zylinder und um die kugel [J]. *ZAMM*, 1936, **16**: 153-164.
- [3] Wang C Y. Impinging stagnation flows[J]. *Phys Fluids*, 1987, **30**(3): 915-917.
- [4] Ariel P D. Hiemenz flow in hydromagnetics[J]. *Acta Mech*, 1994, **103**(1/4): 31-43.
- [5] Mahapatra T R, Gupta A S. Magnetohydrodynamic stagnation point flow towards a stretching sheet[J]. *Acta Mech*, 2001, **152**(1/4): 191-196.
- [6] Chamkha A J, Issa Camille. Effects of heat generation/absorption and thermophoresis on

小,清楚地表示在图3中.图4显示,温度曲线随着 M 值的增大而减小,热边界层厚度随着外加磁场的增大而减小.

固定 M 值和 Pr 值时,涡流粘性参数 R 的影响在图5至图8中给出.图5和图6分别给出,法向速度曲线 f 和自由流速度曲线 f' 均随着 R 值的增大而减小.图6中还可以发现,涡流粘性参数 R 的增大,会导致速度边界层厚度的增大.图7表明微转动曲线随着 R 值的增大而升高, $R = 0$ 时,没有微转动,这种情形相当于是 Newton 流体.图8表明,涡流粘性参数 R 的增大,影响温度曲线升高,增大流场中的热边界层厚度.最后,如图9所示,Prandtl 数 Pr 的增大,热边界层厚度会减少.为了在本图中得到温度曲线的渐近性,采用了大值的 η_{∞} [34-35].

- hydromagnetic flow with heat and mass transfer over a flat surface[J]. *International Journal of Numerical Method for Heat and Fluid Flow*, 2000, **10**(4): 432-449.
- [7] 朱婧,郑连存,张欣欣. 具有延伸表面的驻点流动和传热问题的级数解[J]. 应用数学和力学, 2009, **30**(4): 432-456. (ZHU Jing, ZHENG Lian-cun, ZHANG Xin-xin. Analytic solution to stagnation point flow and heat transfer over a stretching sheet based on homotopy analysis [J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2009, **30**(4): 463-474.)
- [8] Hoyt J W, Fabula A G. The effect of additives on fluid friction[R]. U S Naval Ordinance Test Station Report, 1964.
- [9] Eringen A C. Theory of micropolar continua[C] // *Proceedings of the Ninth Midwestern Conference*, 1965: 23.
- [10] Eringen A C. Simple microfluids[J]. *Int J Eng Sci*, 1964, **2**(2): 205-217.
- [11] Eringen A C. Theory of micropolar fluids[J]. *J Math*, 1966, **16**: 1-18.
- [12] Ariman T, Turk M A, Sylvester N D. Microcontinuum fluid mechanics—a review[J]. *Int J Eng Sci*, 1973, **11**(8): 905- 930.
- [13] Ariman T, Turk M A, Sylvester N D. Application of microcontinuum fluid mechanics[J]. *Int J Eng Sci*, 1974, **12**: 273-293.
- [14] Guram G S, Smith C. Stagnation flows of micropolar fluids with strong and weak interactions [J]. *Comp Math Appl*, 1980, **6**(2): 213-233.
- [15] Ahmadi G. Self-similar solution of incompressible micropolar boundary layer flow over a semi infinite plate[J]. *Int J Eng Sci*, 1972, **14**(7): 639-646.
- [16] CHENG Long-chang. Numerical simulation of micropolar fluid flow along a flat plate with wall conduction and boundary effects[J]. *J Phys D: Appl Phys*, 2006, **39**(6): 1132-1140.
- [17] Lok Y Y, Pop I, Chamkha A J. Non-orthogonal stagnation point flow of a micropolar fluid[J]. *Int J Eng Sci*, 2007, **45**(1): 173-184.
- [18] Seddeek M A. Flow of a magneto micropolar fluid past a continuously moving plate[J]. *Physics Letters A*, 2003, **306**(4): 255-257.
- [19] Ishak A, Nazar R, Pop I. Stagnation flow of a micropolar fluid towards a vertical permeable surface[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2008, **35**(3): 276-281.
- [20] Ashraf Muhammad, Anwar Kamal M, Syed K S. Numerical study of asymmetric laminar flow of micropolar fluids in a porous channel[J]. *Computers and Fluids*, 2009, **38**(10): 1895-1902.
- [21] Ashraf Muhammad, Anwar Kamal M, Syed K S. Numerical investigations of asymmetric flow of a micropolar fluid between two porous disks[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2009, **25**(6): 787-794.
- [22] Ishak A, Jafar K, Nazar R, Pop I. MHD stagnation point flow towards a stretching sheet[J]. *Physica A*, 2009, **388**(17): 3377-3383.
- [23] Ishak A, Lok Y Y, Pop I. Stagnation point flow over a shrinking sheet in a micropolar fluid [J]. *Chem Eng Comm*, 2010, **197**(11): 1417-1427.
- [24] Shercliff J A. *A Text Book of Magnetohydrodynamics*[M]. Oxford: Pergamon Press, 1965.
- [25] Rossow V J. On flow of electrically conducting fluids over a flat plate in the presence of a transverse magnetic field[R]. NACA, *Tech Report* 1358, 1958.
- [27] Gerald C F. *Applied Numerical Analysis*[M]. Massachusetts: Addison Wesley Publishing Company Reading, 1974.
- [27] Milne W E. *Numerical Solutions of Different Equations*[M]. New York: John Willy and

- Sons Inc, 1953.
- [28] Hildebrand F B. *Introduction to Numerical Analysis*[M]. Tata McGraw Hill Publishing Company Ltd, 1978.
- [29] Syed K S, Tupholme G E, Wood A S. Iterative solution of fluid flow in finned tubes[C]// Taylor C, Cross J T. *Proceeding of the 10th International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*. Swansea, UK 429-440; Pineridge Press, 1997; 21-25.
- [30] Deuflhard P. Order and step size control in extrapolation methods[J]. *Numer Math*, 1983, **41**(3): 399-422.
- [31] Guram G S, Anwar M. Micropolar flow due to a rotating disc with suction and injection[J]. *ZAMM*, 1981, **61**(11): 589-605.
- [32] Takhar H S, Bhargava R, Agrawal R S, Balaji A V S. Finite element solution of micropolar flow and heat transfer between two porous discs[J]. *Int J Eng Sci*, 2000, **38**(17): 1907-1922.
- [33] Ashraf Muhammad, Anwar Kamal M, Syed K S. Numerical simulation of a micropolar fluid between a porous disk and a non-porous disk[J]. *Appl Math Modell*, 2009, **33**(4): 1933-1943.
- [34] Pantokratoras A. Comment on "laminar boundary layer flow over a horizontal permeable flat plate" [J]. *Appl Math Comput*, 2006, **182**(2): 1-2.
- [35] Pantokratoras A. A common error made in investigation of boundary layer flows[J]. *Appl Math Model*, 2009, **33**(1): 413-422.

MHD Stagnation Point Flow of a Micropolar Fluid Towards a Heated Surface

Muhammad Ashraf, M. M. Ashraf

(Centre for Advanced Studies in Pure and Applied Mathematics,
Bahauddin Zakariya University, Multan, Pakistan)

Abstract: The problem of two dimensional stagnation point flow of an electrically conducting micropolar fluid impinging normally on a heated surface in the presence of a uniform transverse magnetic field was analyzed. The governing continuity, momentum, angular momentum, and heat equations together with the associated boundary conditions were reduced to dimensionless form using suitable similarity transformations. The reduced self similar non-linear equations were then solved numerically by an algorithm based on finite difference discretization. The results were further refined by Richardson's extrapolation. The effects of the magnetic parameter, the micropolar parameters, and the Prandtl number on the flow and temperature fields were predicted in tabular and graphical forms to show the important features of the solution. The study shows that the velocity and thermal boundary layers become thinner as the magnetic parameter is increased. The micropolar fluids display more reduction in shear stress as well as heat transfer rate than that exhibited by Newtonian fluids, which is beneficial in the flow and thermal control of polymeric processing.

Key words: magnetohydrodynamics (MHD); stagnation flow; micropolar fluids; similarity transformations; finite differences; boundary layer