

# 通过有漏孔管道时的层流解析解\*

M·戈尔吉德<sup>1</sup>, M·阿里潘那<sup>1</sup>, M·沙特瑞<sup>1</sup>, E·法纳德<sup>2</sup>

(1. 巴博尔工业大学 机械工程学院, 484 信箱, 巴博尔, 马赞德兰, 伊朗;

2. Water & Westwater 公司, 纱丽, 马赞德兰, 伊朗)

**摘要:** 研究了通过有漏孔管道时的层流,并解析地求解了动量方程和能量守恒方程.由 Hagen-Poiseuille 的速度分布,同时定义轴向和径向速度分量的未知函数,得到了压力和质量输运方程,并根据不同的参数,画出其分布图.结果表明,管道中的轴向速度、径向速度、质量输运参数和压力,随着流体沿管道的流动而减小.

**关键词:** 有漏孔的管道; 渗透性; 质量输运; 层流; 解析解

**中图分类号:** O351.3      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.01.007

## 符 号 说 明

$V$	速度	$k$	渗透系数
$p$	压力	$\mu$	动粘度( $1.005 \times 10^3$ )
$j$	质量输运参数	$L$	管道长度
$U_0$	入口处的平均速度	$\beta$	无量纲参数
$R$	管道半径	$Q$	质量流量
$r$	径向坐标		
<b>下角</b>			
$r$	径向	in	入口
$z$	轴向	out	出口

## 引 言

有漏孔的管道,正如图 1 所示,是一个具有向其表面周围泄漏的管子,引起壁面渗透,导致通过壁面的质量输运<sup>[1-2]</sup>,流体在向前流动的同时,还出现泄漏.由于一些质量的泄漏,管子轴向的质量输运减小,这就解释了,为什么沿管子轴向的速度和压力会发生改变.

这个机理在自然界和工业上都有应用.例如在生长中的植物,植物的体液从土壤中输运到植物的枝叶里,就是通过一组类似于有漏孔的管子来实现的<sup>[3]</sup>;农业上对蔬菜喷洒农药和水,工业上用来润滑和冷却机器的流体,都使用了不同形式和大小的有漏孔的管道.因此,分析通过有漏孔管道中流体的流动,并研究流体的速度、压力和质量输运的变化,是非常重要的.最

\* 收稿日期: 2010-08-14; 修订日期: 2010-11-27

作者简介: Morteza Alipanah (Tel/Fax: +98-111-3234205; E-mail: morteza\_me2005@yahoo.com).

本文原文为英文,黄雅意译,张禄坤校.

近, Civan 在文献[4]中给出了有漏孔管道渗透性模型. 本文的主要目的是, 计算有漏孔管道中的速度、质量和压力分布. 文中采用解析法求解有漏孔管道中流体流动的控制方程.

本文对流体作了如下假设:

- 1) 流动是均匀稳定的, 并是得到充分发展的对称层流;
- 2) 流体为不可压缩的 Newton 流体;
- 3) 管壁面对质量运输的渗透性是均匀的;
- 4) 不计惯性力和体力.

## 1 问题的公式

考虑一通过有漏孔管道的层流, 如图 1 所示. 管道的长度为  $L$ , 直径为  $2R$ . 文中假设  $R$  和  $u_0$  分别为 0.1 和 2.

解决该问题的最终目的是, 确定通过有漏孔管道时流体的泄漏方程. 本文中, 将其表达为关于压力、径向速度、轴向速度、质量运输和泄漏量的方程<sup>[5]</sup>.

考虑到上述假设, 我们有

$$V = [V_r(r, z), 0, V_z(r, z)], \quad (1)$$

$$p = p(r, z). \quad (2)$$

写出管道轴向 ( $z$  方向) 的 Navier-Stokes 方程<sup>[6]</sup>及连续方程:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

必须注意的是, 沿管道轴向周围适量的泄漏, 使压力随流体沿着管道的流动而减小. 因此, 有必要定义一个与轴向速度分量同量纲的质量运输参数. 质量运输参数定义如下:

$$j(z) = k[p(z) - p_0], \quad (5)$$

其中,  $j(z)$  表示质量运输,  $p(z)$  为管道压力,  $p_0$  为大气压力,  $k$  为渗透系数. 考虑到管道半径周围有漏孔, 将管道壁面中的径向速度表达为

$$j(z) = V_r(r, z) = V_r(z). \quad (6)$$

由 Hagen-Poiseuille 速度分布<sup>[6]</sup>,

$$V_z = 2U_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] f(z), \quad (7)$$

其中,  $U_0$  为管道入口的平均速度, 并有  $U_0 = Q_{in}/(\pi R^2)$ ,  $f(z)$  为待定的任意未知的中间函数. 由连续方程(4), 可以得到  $V_r$  和  $V_z$  的关系:

$$V_r = -\frac{1}{r} \int_0^r r \frac{\partial V_z}{\partial z} dr. \quad (8)$$

## 2 问题的解

将方程(7)对  $z$  求导之后, 代入方程(8), 所得到的方程对  $r$  积分, 有

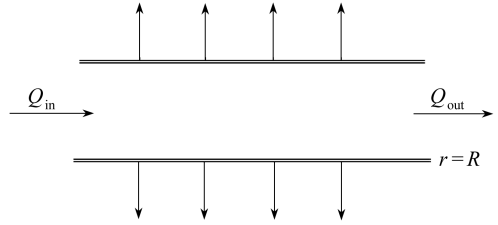


图 1 典型的通过有漏孔管道时的层流示意图

Fig. 1 Schematic view of a typical laminar flow through a leaky tube

$$V_r = -RU_0 f'(z) \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right], \quad (9)$$

其中

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

另一方面,在管道表面,即  $r = R$  处,有

$$V_r(R, z) \equiv V_R(z) = -\frac{RU_0}{2} f'(z). \quad (10)$$

由管道轴向的 Navier-Stokes 方程(3), 有

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left\{ -\frac{8U_0}{R^2} f(z) + 2U_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] f''(z) \right\}, \quad (11)$$

由方程(5)、(6)和(10), 有

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{k} \frac{dV_R}{dz} = -\frac{RU_0}{2k} f''(z). \quad (12)$$

将方程(12)代入方程(11), 有

$$f''(z) = \frac{16k\mu}{R^3} f(z) - \frac{4k\mu}{R} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] f''(z), \quad (13)$$

方程(13)中含有  $r$  的项, 意味着  $f$  是  $r$  和  $z$  的函数, 但是我们假设  $f$  仅是  $z$  的函数. 由于方程(13)中等号右边的第 2 项与第 1 项相比可以忽略, 故不计该项; 假定得以满足, 从而方程(13)可简化为如下的微分方程:

$$f''(z) - \frac{16k\mu}{R^3} f(z) = 0. \quad (14)$$

方程(14)为二阶线性微分方程, 需要 2 个边界条件才能求解. 应用文献[7-8]中叙述的假定, 流动得以完全发展的条件:

$$z = 0 \Rightarrow f(z) = 0,$$

$$z \rightarrow \infty \Rightarrow f(z) = \text{const},$$

于是得到

$$f(z) = \exp\left(-4\beta \frac{z}{R}\right), \quad (15)$$

其中  $\beta$  为一无量纲参数,

$$\beta = \left( \frac{k\mu}{R} \right)^{1/2}.$$

由方程(12)和(14)确定绝对压力  $p(z)$ ,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{8\mu U_0}{R^2} f(z) = -\frac{8\mu U_0}{R^2} \exp\left(-4\beta \frac{z}{R}\right). \quad (16)$$

当  $z = 0$  时, 压力  $p$  等于大气压力  $p_0$ , 对方程(16)进行积分, 有<sup>[9]</sup>

$$p(z) = p_0 + \frac{2\mu U_0}{\beta R} \left[ \exp\left(-4\beta \frac{z}{R}\right) - 1 \right]. \quad (17)$$

在上述压力表达式中出现的大气压力  $p_0$ , 假定有如下的关系式<sup>[10]</sup>:

$$p_0 = \Delta p = -\frac{2\mu U_0}{\beta R} \left[ 1 - \exp\left(-4\beta \frac{L}{R}\right) \right]. \quad (18)$$

将方程(18)代入方程(17),可得

$$p(z) = \frac{2\mu U_0}{\beta R} \left[ \exp\left(-4\beta \frac{z}{R}\right) - \exp\left(-4\beta \frac{L}{R}\right) \right]. \quad (19)$$

有质量输运时,

$$j(z) = kp(z) = 2\beta U_0 \left[ \exp\left(-4\beta \frac{z}{R}\right) - \exp\left(-4\beta \frac{L}{R}\right) \right], \quad (20)$$

于是,泄漏量为

$$Q_r = \int_0^z 2\pi R j(z) dz, \quad (21)$$

$$Q_r = \pi R^2 U_0 \left[ 1 - \exp\left(-4\beta \frac{z}{R}\right) \right] - 4\pi R \beta U_0 z \exp\left(-4\beta \frac{L}{R}\right), \quad (22)$$

即有

$$\frac{Q_z}{Q_{in}} = 1 - \frac{Q_r}{Q_{in}} = \exp\left(-4\beta \frac{z}{R}\right) + \frac{4\beta z}{R} \exp\left(-4\beta \frac{L}{R}\right). \quad (23)$$

径向速度为

$$V_r = 4\beta U_0 \exp\left(-4\beta \frac{z}{R}\right) \left[ \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^4 \right], \quad (24)$$

最终得到轴向速度:

$$V_z = 2U_0 \exp\left(-4\beta \frac{z}{R}\right) \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]. \quad (25)$$

### 3 结果和讨论

图2~图6给出了 $r$ 和 $z$ 方向流动的速度.图7和图8分别给出了质量输运和压力的分布.

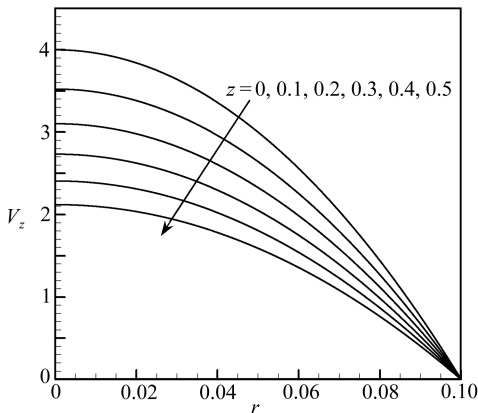


图2  $z$ 取不同值时,轴向速度 $V_z$ 随 $r$ 的变化( $k = 0.1$ )

Fig. 2 Axial velocity profile with respect to  $r$  at various  $z$  ( $k = 0.1$ )

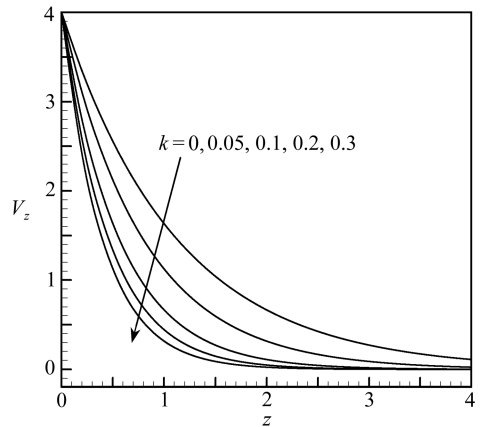


图3  $k$ 取不同值时,轴向速度 $V_z$ 随 $z$ 的变化( $r = 0$ )

Fig. 3 Axial velocity profile with respect to  $z$  at various  $k$  ( $r = 0$ )

由图2~8可以看出:

1) 轴向速度随半径的变化与一般管道是一致的.最大值出现在管轴上,而在管壁上为0(图2);

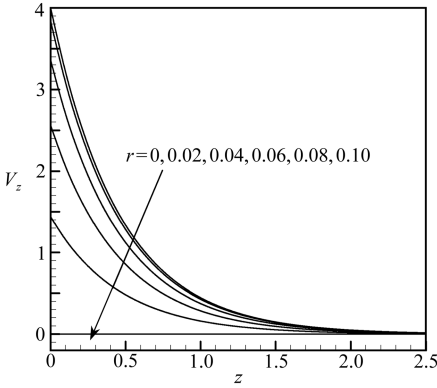


图4  $r$ 取不同值时,轴向速度  $V_z$  随  $z$  的变化 ( $k = 0.2$ )

Fig. 4 Axial velocity profile with respect to  $z$  at various  $r$  ( $k = 0.2$ )

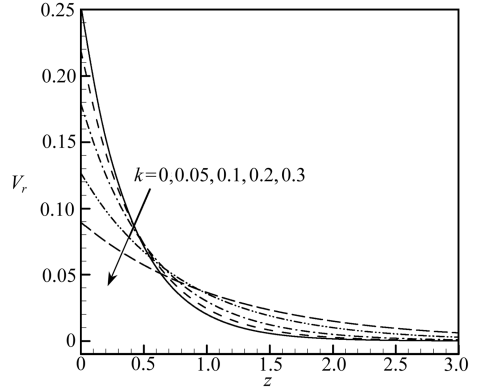


图5  $k$ 取不同值时,径向速度  $V_r$  随  $z$  的变化 ( $r = 0.1$ )

Fig. 5 Radial velocity profile with respect to  $z$  at various  $k$  ( $r = 0.1$ )

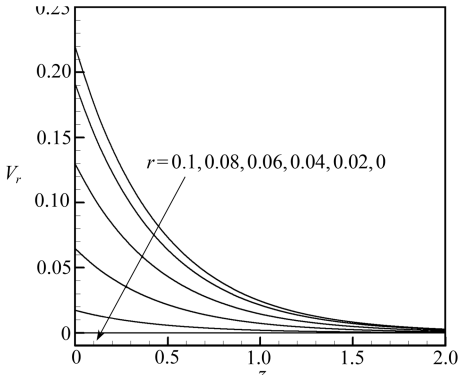


图6  $r$ 取不同值时,径向速度  $V_r$  随  $z$  的变化 ( $k = 0.2$ )

Fig. 6 Radial velocity profile with respect to  $z$  at various  $r$  ( $k = 0.2$ )

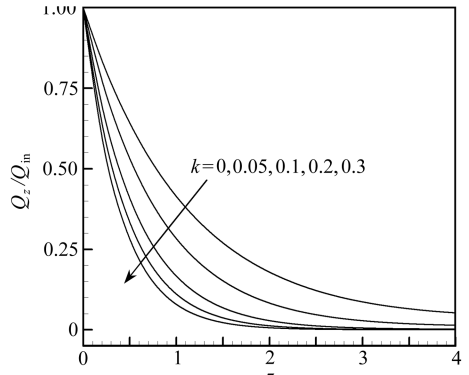


图7  $k$ 取不同值时,轴向质量流量  $Q_z$  与入口质量流量  $Q_{in}$  的比例随  $z$  的变化

Fig. 7 Ratio of axial mass transfer to entrance mass transfer profile with respect to  $z$  at various  $k$

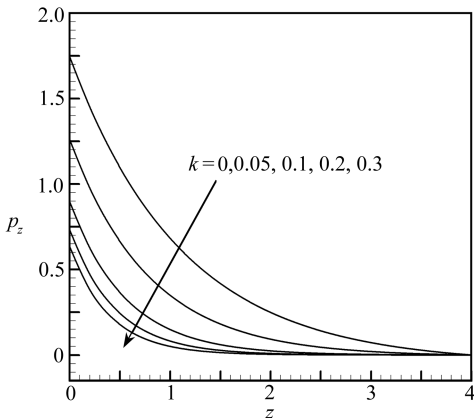


图8  $k$ 取不同值时,压力  $p_z$  随  $z$  的变化

Fig. 8 Pressure profile with respect to  $z$  at various  $k$

2) 当渗透系数  $k$  增加时,由于漏孔的质量传递增加,管道相同长度的轴向速度减小;另外,管道轴向速度的变化将减少,并最终趋于0(图3);

3) 轴向速度在有漏孔管道中心处达到最大值,而在管壁呈现最小值(图4);

4) 在有漏孔管道的入口处,渗透系数较小时的径向速度,比渗透系数较大时的径向速度要高得多,对较小的渗透系数,径向速度沿管道轴向的变化也更大(图5);

5) 径向速度在有漏孔管道轴线上为0,随着半径的增大,径向速度也增大,并在管道壁面处取得最大值(图6);

6) 随着渗透系数的增大,管道轴线方向上与质量运输有关的变化也增大(图7);

7) 管道轴向压力随着渗透系数的增加而减小,从而导致每个截面上的压力下降(图8)。

## 4 结 论

本文研究了通过有漏空管道时的层流,得到 $z$ 和 $r$ 方向速度的解析分布。结果表明,当渗透系数增加时,每个截面上的轴向速度和轴向质量流量都将减小。在有漏孔管道轴上,径向速度为0,管壁上出现最大值。流体沿管道流动时,管中的轴向速度、径向速度和压力将减小。结果还表明,对于一个确定的渗透系数,轴向速度和压力的变化与一般管道是类似的。

### 参考文献:

- [1] White A. Flow of fluid in an axially pipe[J]. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1964, **6**: 47-52.
- [2] Johnson R E. Steady state coating flows inside a rotating horizontal cylinder[J]. *Journal of Fluid Mechanical*, 1988, **190**: 321-342.
- [3] Canny M J. The xylem wedge as a functional unit speculation on the consequences of flow in a leaky tube[J]. *New Phytologist*, 1991, **118** (3): 367-374.
- [4] Civan F. Leaky-tube permeability model for identification, characterization, and calibration of reservoir flow units[C]//*SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Denver, Colorado, 2003.
- [5] Nagib H M, Lavan Z, Fejer A A, Wolf L. Stability of pipe flow with superposed solid body rotation[J]. *Physics Fluids*, 1971, **14**(4): 766-768.
- [6] Munson B R, Young D F, Okiishi T H. *Fundamentals of Fluid Mechanics*[M]. 5th ed. John Wiley and Sons, 2006.
- [7] Mackrodt P A. Stability of Hagen-Poiseuille flow with superimposed rigid rotation[J]. *Journal of Fluid Mechanic*, 1976, **73**: 153-164.
- [8] Shchukin V K. Hydraulic resistance of rotating tubes[J]. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 1967, **12**(6): 418-422.
- [9] Kröger D G. *Air-Cooled Heat Exchanger and Cooling Towers: Thermal Flow Performance Evaluation and Design*[M]. Department of Mechanical Engineering, South Africa, 1998: 248-256.
- [10] Kikuyama K, Murakami M, Nishibori K, Kaeda K. Flow in an axially rotating pipe[J]. *Bulletin of the JSME*, 1983, **26** (214): 506-513.

## An Analytical Solution for Laminar Flow Through a Leaky Tube

Mofid Gorjidi<sup>1</sup>, Morteza Alipanah<sup>1</sup>, Majid Shateri<sup>1</sup>, Elham Farnad<sup>2</sup>

(1. Department of Mechanical Engineering, Babol University of Technology,

P. O. Box 484, Babol, Mazandaran, I. R. Iran;

2. Water and Wastewater Company, Sari, Mazandaran, I. R. Iran)

**Abstract:** The laminar flow through a leaky tube was investigated, and the momentum and conservation of energy equations were solved analytically. Using the Hagen-Poiseuille velocity profile and defining unknown functions for the axial and radial velocity components, pressure and mass transfer equations were obtained and their profiles were plotted according to different parameters. The results indicate that the axial velocity, the radial velocity, mass transfer parameter and pressure in the tube decrease as the fluid moves along the tube.

**Key words:** leaky tube; permeability; mass transfer; laminar flow; analytical solution