

# 有限高狭长压电体中半无限 反平面裂纹分析\*

郭俊宏<sup>1</sup>, 刘 萍<sup>1</sup>, 卢子兴<sup>1</sup>, 秦太验<sup>2</sup>

(1. 北京航空航天大学 固体力学所,北京 100191;  
2. 中国农业大学 理学院,北京 100083)

**摘要:** 利用保角变换和复变函数方法,研究了裂纹面上受反平面剪应力和面内电载荷共同作用下的有限高狭长压电体中半无限裂纹的断裂问题,给出了电不可通边界条件下裂纹尖端场强度因子和机械应变能释放率的解析解.当狭长体高度趋于无限大时,可得到无限大压电体中半无限裂纹的解析解.若不考虑电场作用,所得解可退化为纯弹性材料的已知结果.此外,通过数值算例,分析了裂纹面上受载长度、狭长体高度以及机电载荷对机械应变能释放率的影响规律.

**关键词:** 狭长压电体; 半无限裂纹; 复变函数方法; 场强度因子; 机械应变能释放率  
**中图分类号:** O346.1      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.01.008

## 引 言

随着压电材料的广泛应用,关于含缺陷(如裂纹、孔洞、夹杂等)压电介质的断裂问题一直受到国内外诸多学者的广泛关注,并取得了大量研究成果<sup>[1-4]</sup>.最近,基于电不可通边界条件,Wang和Gao<sup>[5]</sup>利用复变函数方法,研究了压电弹性体中圆孔边单裂纹和双裂纹的反平面问题,得到了远场受反平面剪应力和面内电载荷共同作用下的裂纹尖端场强度因子和能量释放率的解析解.Guo等<sup>[6]</sup>应用复变函数方法和保角映射技术,研究了压电材料中椭圆孔边双不等长裂纹的反平面问题,给出了裂纹尖端的场强度因子和能量释放率的解析解.进一步,Guo等<sup>[7-8]</sup>基于Stroh公式,给出一种电可通和半可通边界条件下求解复杂缺陷问题的解析方法,分别解决了压电材料中椭圆孔边非对称双裂纹和圆孔边均布多裂纹的反平面问题,导出了裂纹尖端处的场强度因子和能量释放率的解析解.对于半无限裂纹问题,Razzaq等<sup>[9]</sup>采用Stroh公式研究了精确电边界条件下压电介质中半无限裂纹的广义二维问题,获得了Green函数和场强度因子的显式表达式.Li和Fan<sup>[10]</sup>及Li<sup>[11]</sup>分别研究了压电材料中绝缘半无限裂纹的静态

\* 收稿日期: 2010-09-06; 修订日期: 2010-11-17

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(10932001;11072015);北京市教育委员会共建项目建设计划资助项目(KZ201010005003);高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20101102110016)

**作者简介:** 郭俊宏(1981—),男,内蒙古乌兰察布人,博士生(E-mail: guojunhong@ase.buaa.edu.cn);  
卢子兴(1960—),男,河北枣强人,教授,博士生导师(联系人. Tel: +86-10-82317507;  
Fax: +86-10-82328501; E-mail: luzixing@buaa.edu.cn).

和动态问题,给出了裂纹表面受一对集中力和自由电荷作用的场强度因子和机械应变能释放率。Li 和 Mataga 分别在电可通<sup>[12]</sup>和电不可通<sup>[13]</sup>边界条件下分析了半无限反平面裂纹扩展的动态响应。刘淑红等<sup>[14]</sup>研究了含半无限长裂纹压电材料在远场受反平面机械载荷和面内电场作用下的问题,给出了级数形式表达的位移函数解和电势函数解。但这些研究主要针对无限大压电体,而对有限高狭长压电体中半无限裂纹问题的研究目前尚未见报道。

本文利用保角变换和复变函数方法,在电不可通边界条件下,考虑了裂纹面上受反平面剪应力和面内电载荷共同作用下的有限高狭长压电体半无限长裂纹的断裂问题,导出了裂纹尖端场强度因子和机械应变能释放率的解析解。此外,通过数值算例,讨论了裂纹面上受载长度与狭长体高度以及机电载荷对机械应变能释放率的影响规律。

## 1 问题的描述

考虑一横观各向同性狭长压电体,其极化方向沿坐标轴  $z$  轴方向,各向同性面与  $x$ - $y$  平面一致。反平面位移  $w(x, y)$  和面内电势  $\varphi(x, y)$  是相互耦合的。本文问题描述如图 1 所示。

在有限高狭长压电体中,裂纹位于狭长体中部,裂纹面到物体上、下表面的高度均为  $H$ ,设裂纹是半无限长的,在裂纹面上长度为  $a$  的一段上受反平面剪应力  $\tau_0$  和面内电载荷  $D_0$  的共同作用(见图 1)。边界条件可写为

$$y = \pm H, -\infty < x < +\infty: \quad \sigma_{yz} = 0, D_y = 0, \quad (1a)$$

$$y = 0, -\infty < x < -a: \quad \sigma_{yz} = 0, D_y = 0, \quad (1b)$$

$$y = 0, -a < x < 0: \quad \sigma_{yz} = -\tau_0, D_y = D_0, \quad (1c)$$

$$x = \pm \infty, -H < y < H: \sigma_{yz} = 0, D_y = 0. \quad (1d)$$

此时,所有变量和  $z$  无关,故本构方程为

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \sigma_{yz} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ D_x = e_{15} \frac{\partial w}{\partial x} - \kappa_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & D_y = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \kappa_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{cases} \quad (2)$$

而平衡方程为

$$c_{44} \nabla^2 w + e_{15} \nabla^2 \varphi = 0, \quad e_{15} \nabla^2 w - \kappa_{11} \nabla^2 \varphi = 0, \quad (3)$$

其中,  $\sigma_{ij}, D, w, \varphi$  分别代表应力、电位移、反平面位移和面内电势,  $c_{ij}, e_{ij}$  和  $\kappa_{ij}$  分别是材料常数、压电常数和介电常数。

如果  $c_{44}\kappa_{11} + e_{15}^2 \neq 0$ , 平衡方程(3)可以进一步写为

$$\nabla^2 w = 0, \quad \nabla^2 \varphi = 0. \quad (4)$$

这样反平面问题最终归结为求解满足以上调和方程组(4)和边界条件(1)的边值问题。

由复变函数理论知,方程(4)的解可表示为解析函数的实部或虚部。设解析函数为  $U_1(z)$ ,  $\Phi_1(z)$ , 其中  $z = x + iy$ , 因此有

$$w = \text{Re}[U_1(z)], \quad \varphi = \text{Re}[\Phi_1(z)], \quad (5)$$

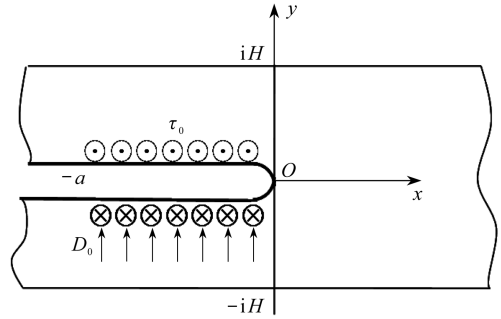


图 1 狭长压电体中半无限裂纹

Fig. 1 A semi-infinite crack in a piezoelectric strip

式中  $\text{Re}$  表示解析函数的实部, 将上式代入本构方程(2), 得

$$\begin{cases} \sigma_{yz} = \frac{i}{2} [c_{44}(U'_1 - \bar{U}'_1) + e_{15}(\Phi'_1 - \bar{\Phi}'_1)], \\ \sigma_{xz} = \frac{1}{2} [c_{44}(U'_1 + \bar{U}'_1) + e_{15}(\Phi'_1 + \bar{\Phi}'_1)], \end{cases} \quad (6a)$$

$$\begin{cases} D_x = \frac{1}{2} [e_{15}(U'_1 + \bar{U}'_1) - \kappa_{11}(\Phi'_1 + \bar{\Phi}'_1)], \\ D_y = \frac{i}{2} [e_{15}(U'_1 - \bar{U}'_1) - \kappa_{11}(\Phi'_1 - \bar{\Phi}'_1)], \end{cases} \quad (6b)$$

由边界条件(1)可得

$$c_{44}(U'_1 - \bar{U}'_1) + e_{15}(\Phi'_1 - \bar{\Phi}'_1) = 2i\tau_0, \quad e_{15}(U'_1 - \bar{U}'_1) - \kappa_{11}(\Phi'_1 - \bar{\Phi}'_1) = -2iD_0. \quad (7)$$

## 2 问题的求解

### 2.1 保角变换的引入及求解

引入如下保角变换<sup>[15]</sup>:

$$z = \omega(\zeta) = \frac{H}{\pi} \ln \left[ 1 + \left( \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right)^2 \right], \quad (8)$$

该变换可把  $z$  平面上的区域映射到  $\zeta$  平面上单位圆  $\gamma$  的内部, 其逆变换为

$$\zeta = \omega^{-1}(z) = \frac{-e^{\pi z/H} \mp 2i\sqrt{1 - e^{\pi z/H}}}{2 - e^{\pi z/H}}. \quad (9)$$

由逆变换(9)可知,  $z = 0$  对应  $\zeta = -1$ ;  $y = 0^+$ ,  $x = -a$  对应  $\sigma_{-a}$ ;  $y = 0^-$ ,  $x = -a$  对应  $\bar{\sigma}_{-a}$ , 其中  $\sigma_{-a}$  和  $\bar{\sigma}_{-a}$  分别为

$$\sigma_{-a} = \frac{-e^{-\pi a/H} + 2i\sqrt{1 - e^{-\pi a/H}}}{2 - e^{-\pi a/H}}, \quad \bar{\sigma}_{-a} = \frac{-e^{-\pi a/H} - 2i\sqrt{1 - e^{-\pi a/H}}}{2 - e^{-\pi a/H}}. \quad (10)$$

引入如下记号:

$$\begin{cases} U_1(z) = U_1[\omega(\zeta)] = U(\zeta), \quad \Phi_1(z) = \Phi[\omega(\zeta)], \\ U'_1(z) = U'(\zeta)/\omega'(\zeta), \quad \Phi'_1(z) = \Phi'(\zeta)/\omega'(\zeta). \end{cases} \quad (11)$$

将式(11)代入式(7)中, 并在等式两边各乘以  $\omega'(\sigma) d\sigma / [2\pi i(\sigma - \zeta)]$ , 其中  $\zeta$  是在  $|\zeta| < 1$  中的任意一点, 沿着单位圆  $\gamma$  积分, 根据 Cauchy 积分公式, 得

$$\begin{cases} U'(\zeta) + \frac{e_{15}}{c_{44}} \Phi'(\zeta) = \frac{2i\tau_0}{c_{44}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma, \\ \Phi'(\zeta) - \frac{e_{15}}{\kappa_{11}} U'(\zeta) = \frac{2i\tau_0}{\kappa_{11}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma, \end{cases} \quad (12)$$

其中用到了  $U'(\sigma)$ ,  $\Phi'(\sigma)$  均为单位圆内的解析函数这个条件.

记

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma,$$

积分后有

$$F(\zeta) = \frac{H}{i\pi^2} \left[ \frac{1 + \zeta}{(1 + \zeta^2)(1 - \zeta)} \ln(\sigma - \zeta) + \frac{-1}{1 - \zeta} \ln(\sigma - 1) \right] +$$

$$\left. \frac{-i}{2(1+\zeta^2)} \ln \frac{\sigma-i}{\sigma+i} + \frac{-\zeta}{2(1+\zeta^2)} \ln(1+\sigma^2) \right] \Bigg|_{\sigma=-a}^{\bar{\sigma}=-a}. \quad (13)$$

由式(12)可得

$$U'(\zeta) = \frac{\tau_0 \kappa_{11} - D_0 e_{15}}{c_{44} \kappa_{11} + e_{15}^2} 2iF(\zeta), \quad \Phi'(\zeta) = \frac{D_0 c_{44} + \tau_0 e_{15}}{c_{44} \kappa_{11} + e_{15}^2} 2iF(\zeta). \quad (14)$$

结合式(11),将式(14)代入式(6),整理得

$$\begin{cases} \sigma_{xz} - i\sigma_{yz} = c_{44} U'_1 + e_{15} \Phi'_1 = 2i\tau_0 \frac{F(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \\ D_x - iD_y = e_{15} U'_1 - \kappa_{11} \Phi'_1 = -2iD_0 \frac{F(\zeta)}{\omega'(\zeta)}. \end{cases} \quad (15)$$

## 2.2 场强度因子

由文献[5-6]可知,  $\zeta$  平面上场强度因子的计算公式为

$$\mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} k_\sigma \\ k_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ D_0 \end{pmatrix} 2\sqrt{\pi} \frac{F(-1)}{\sqrt{\omega'(-1)}}. \quad (16)$$

由式(8)、(13)和(16),可得到场强度因子的解析表达式为

$$\mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} k_\sigma \\ k_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ D_0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2H}}{2\pi} \ln \frac{2e^{\pi a/H} - 1 + 2e^{\pi a/H} \sqrt{1 - e^{-\pi a/H}}}{2e^{\pi a/H} - 1 - 2e^{\pi a/H} \sqrt{1 - e^{-\pi a/H}}}. \quad (17)$$

当狭长体的高度  $H$  趋于无穷大时,便得到无限大压电体中半无限裂纹尖端场强度因子的解析表达式为

$$\mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} k_\sigma \\ k_D \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{8a}{\pi}} \begin{pmatrix} \tau_0 \\ D_0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

若不考虑电场的作用,则式(18)与纯弹性材料的结果<sup>[15]</sup>完全一致,这也一定程度上验证了本文结果的正确性。

## 2.3 机械应变能释放率

许多研究者提出不同的断裂参数作为压电材料的断裂准则,如应力强度因子准则、总能量释放率准则、能量密度因子准则、局部能量释放率准则、机械应变能释放率准则以及 COD 准则等。但这些准则都不能和所有的实验结果一致,甚至得出相反的结论。方岱宁和刘金喜<sup>[1]</sup>将不同的断裂准则与实验结果进行了比较,认为机械应变能释放率、局部能量释放率和 COD 准则均与实验比较吻合。因此,本文选择机械应变能释放率准则来分析裂纹的断裂行为。

设  $k_s$  为裂纹尖端应变强度因子,由式(2),  $k_s$  可表示为

$$k_s = \frac{e_{15} k_D + \kappa_{11} k_\sigma}{e_{15}^2 + \kappa_{11} c_{44}}. \quad (19)$$

机械应变能释放率<sup>[16]</sup>可表示为

$$G_m = \frac{k_\sigma k_s}{2}. \quad (20)$$

将式(17)和(19)代入式(20)得到裂纹尖端的机械应变能释放率为

$$G_m = \frac{H}{4\pi^2(e_{15}^2 + \kappa_{11} c_{44})} (e_{15} \tau_0 D_0 + \kappa_{11} \tau_0^2) \ln^2 \frac{2e^{\pi a/H} - 1 + 2e^{\pi a/H} \sqrt{1 - e^{-\pi a/H}}}{2e^{\pi a/H} - 1 - 2e^{\pi a/H} \sqrt{1 - e^{-\pi a/H}}}. \quad (21)$$

## 2.4 算例分析

为了分析狭长体高度  $H$ , 受载长度  $a$  和机电载荷对机械应变能释放率的影响规律, 这里取压电陶瓷材料 PZT-5H 为例, 其材料参数<sup>[1]</sup>为

$$\begin{cases} c_{44} = 3.53 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, e_{15} = 17.0 \text{ C/m}^2, \\ \kappa_{11} = 151 \times 10^{-10} \text{ C/(Vm)}, G_{\text{cr}} = 5.0 \text{ N/m}, \end{cases} \quad (22)$$

其中  $G_{\text{cr}}$  代表临界机械应变能释放率。

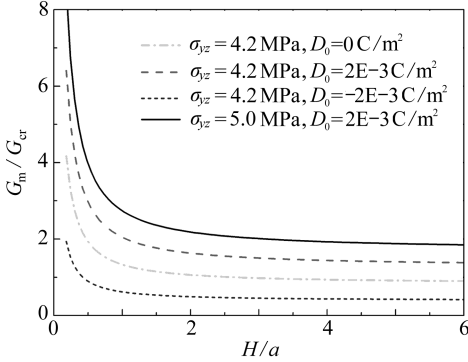


图2  $G_m/G_{\text{cr}}$  随  $H/a$  的变化

Fig. 2 Variation of  $G_m/G_{\text{cr}}$  with a ratio  $H/a$

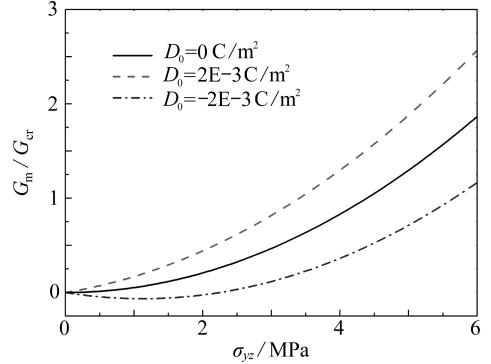


图3 机械载荷对  $G_m/G_{\text{cr}}$  的影响

Fig. 3 Effect of mechanical load on  $G_m/G_{\text{cr}}$

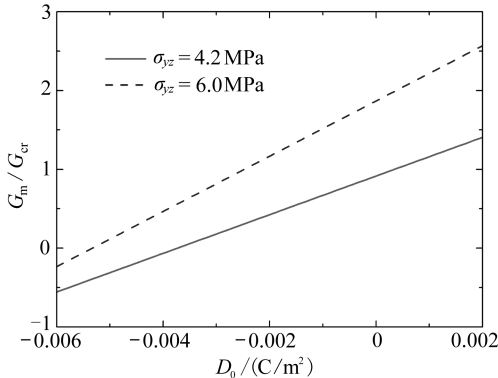


图4 电载荷对  $G_m/G_{\text{cr}}$  的影响

Fig. 4 Effect of applied electric load on  $G_m/G_{\text{cr}}$

给定  $a = 0.01 \text{ m}$ , 图 2 显示了不同的机电载荷下狭长体高度对机械应变能释放率的影响曲线。可以看出, 机械应变能释放率随狭长体高度  $H$  的增加而减小, 表明狭长压电体越窄, 该材料越容易破坏。当狭长体高度小于受载裂纹长度时, 狭长体高度的增加对机械应变能释放率的影响显著。而当狭长体高度大于受载裂纹长度时, 狭长体高度的增加对机械应变能释放率的影响不大。若  $H$  趋于无穷大, 机械应变能释放率趋于一定值, 这对应于无限大压电体中半无限裂纹的情形。若  $H$  为定值, 随  $H/a$  减小, 即  $a$  增大, 机械应变能释放率增大, 这表明受载裂纹长度的增加容易导致裂纹

扩展。

给定  $a = 0.01 \text{ m}$ ,  $H = 0.05 \text{ m}$ , 图 3 和图 4 分别给出了机械载荷和电载荷对机械应变能释放率的影响规律。从图 3 可以看出, 在纯机械载荷作用下, 机械载荷始终促进裂纹扩展。正电场可以使机械应变能释放率变大, 而负电场可以使机械应变能释放率变小。图 4 显示了不同的机械载荷作用下, 机械应变能释放率线性地依赖于电载荷的大小且与电载荷的方向有关。机械应变能释放率随正电场的增加而增加, 随负电场的增加而减小, 这表明正电场可促进裂纹扩展, 而负电场则阻止裂纹扩展, 这与已有的实验结果<sup>[1,16]</sup>一致。

## 3 结 论

本文利用保角变换和复变函数方法, 分析了有限高狭长压电体中半无限裂纹的反平面问

题,导出了电不可通边界条件下裂纹尖端的场强度因子和机械应变能释放率的解析表达式。通过算例分析,讨论了受载裂纹长度、狭长体高度、机械载荷和电载荷对机械应变能释放率的影响规律,得到如下结论:

1) 狭长压电体越窄,该材料越容易破坏。当狭长体高度小于受载裂纹长度时,狭长体高度的增加对机械应变能释放率的影响显著;而当狭长体高度大于受载裂纹长度时,狭长体高度的增加对机械应变能释放率的影响不大。若  $H$  趋于无穷大,机械应变能释放率趋于一定值,这对应于无限大压电体中半无限裂纹的情形;

2) 受载裂纹长度的增加容易导致裂纹扩展;

3) 机械载荷总是促使裂纹扩展的;

4) 机械应变能释放率线性地依赖于电载荷的大小且与电载荷的方向有关。正电场可促进裂纹扩展,而负电场则阻止裂纹扩展。

**致谢** 本文得到北京航空航天大学博士创新基金(300351)的资助,对此表示感谢。

## 参考文献:

- [1] 方岱宁,刘金喜. 压电与铁电体的断裂力学[M]. 北京:清华大学出版社,2008. (FANG Daining, LIU Jin-xi. *Fracture Mechanics of Piezoelectric and Ferroelectric Solids*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008. (in Chinese))
- [2] ZHANG Tong-yi, ZHAO Ming-hao, TONG Ping. Fracture of piezoelectric ceramics[J]. *Advanced Applied Mechanics*, 2002, **38**: 147-289.
- [3] ZHANG Tong-yi, GAO Cun-fa. Fracture behaviors of piezoelectric materials[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2004, **41**(1/3): 339-379.
- [4] Kuna M. Fracture mechanics of piezoelectric materials-where are we right now? [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2010, **77**(2): 309-326.
- [5] WANG Yong-jian, GAO Cun-fa. The mode III cracks originating from the edge of a circular hole in a piezoelectric solid[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, **45**(16): 4590-4599.
- [6] GUO Jun-hong, LU Zi-xing, HAN Hai-tao, YANG Zhen-yu. Exact solutions for anti-plane problem of two asymmetrical edge cracks emanating from an elliptical hole in a piezoelectric material[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, **46**(21): 3799-3809.
- [7] GUO Jun-hong, LU Zi-xing, HAN Hai-tao, YANG Zhen-yu. The behavior of two non-symmetrical permeable cracks emanating from an elliptical hole in a piezoelectric solid[J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2010, **29**(4): 654-663.
- [8] GUO Jun-hong, LU Zi-xing, FENG Xiang. The fracture behavior of multiple cracks emanating from a circular hole in piezoelectric materials[J]. *Acta Mechanica*, 2010, doi: 10.1007/s00707-010-0327-4.
- [9] Razzaq A A, Hussain R, Gao C F, Yu J H. Two-dimensional analysis of a semi-infinite crack in piezoelectric media[J]. *Mechanics Research Communications*, 1998, **25**(6): 695-700.
- [10] LI Xian-fang, FAN Tian-you. Semi-infinite anti-plane crack in a piezoelectric material[J]. *International Journal of Fracture*, 2000, **102**(3): 53-60.
- [11] LI Xian-fang. Transient response of a piezoelectric material with a semi-infinite mode-III crack under impact loads[J]. *International Journal of Fracture*, 2001, **111**(2): 119-130.
- [12] Li S, Mataga P A. Dynamic crack propagation in piezoelectric materials—part I: Electrode

- solution[J]. *Journal of Mechanics and Physics Solids*, 1996, **44**(11): 1799-1830.
- [13] Li S, Mataga P A. Dynamic crack propagation in piezoelectric materials—part II: Vacuum solution[J]. *Journal of Mechanics and Physics Solids*, 1996, **44**(11): 1831-1866.
- [14] 刘淑红, 郭增强, 邹振祝. 含半无限长裂纹压电材料的Ⅲ型强度因子[J]. 中国安全科学学报, 2003, **13**(9): 62-64. (LIU Shu-hong, GUO Zeng-qiang, ZOU Zhen-zhu. Mode-III intensity factors of semi-infinite crack in a piezoelectric material[J]. *China Safety Science Journal*, 2003, **13**(9): 62-64. (in Chinese))
- [15] FAN Tian-you. Exact solutions of semi-infinite crack in a strip[J]. *Chinese Physics Letters*, 1990, **44**(11): 402-405.
- [16] Park S B, Sun C T. Fracture criteria for piezoelectric ceramics[J]. *Journal of the American Ceramic Society*, 1995, **78**(6): 1475-1480.

## Anti-Plane Analysis of a Semi-Infinite Crack in a Piezoelectric Strip

GUO Jun-hong<sup>1</sup>, LIU Ping<sup>1</sup>, LU Zi-xing<sup>1</sup>, QIN Tai-yan<sup>2</sup>

(1. *Institute of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, P. R. China;*

2. *College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083, P. R. China*)

**Abstract:** Using the complex variable function method and the technique of conformal mapping, the fracture problem of a semi-infinite crack in a piezoelectric strip was studied under the anti-plane shear stress and in-plane electric load. The analytical solutions of the field intensity factors and the mechanical strain energy release rate were presented with the assumption that the surface of the crack was electrically impermeable. When the height of the strip tends to infinity, the analytical solutions of an infinitely large piezoelectric solid with a semi-infinite crack were obtained. Moreover, the present results can be reduced to the well-known solutions for a purely elastic material in the absence of electric loading. In addition, numerical examples were conducted to analyze the influences of loaded crack length, the height of the strip and applied mechanical/electric loads on the mechanical strain energy release rate.

**Key words:** piezoelectric strip; semi-infinite crack; complex variable function method; field intensity factors; mechanical strain energy release rate