文章编号:1000-0887(2011)01-0103-10


# 函数空间中总极值的 $R$-收敛有限维逼近*

陈 熙[1], 姚奕荣[1], 郑 权[1,2]

(1. 上海大学 理学院 数学系, 上海 200444;
2. 哥伦布州立大学 数学系, 乔治州 哥伦布市 31907, 美国)

**摘要:** 应用测度序列 $R$-收敛的新概念来描述函数空间中总极值问题解的有限维逼近,并利用变差积分途径来寻找这样的解. 针对有约束问题,运用罚变差积分算法把所给问题转化为无约束问题,且给出一个非凸状态约束最优控制问题的数值例子以说明该算法的有效性.

**关 键 词:** 总极值; 变差积分; 变测度; $R$-收敛; 有限维逼近

**中图分类号:** O224 **文献标志码:** A

DOI:10.3879/j.issn.1000-0887.2011.01.011

## 引 言

总极值问题在现实生活各个领域有着很广泛的应用,其中包括自然科学、社会科学和工业应用等领域. 作为最优化的的一种,无限维最优化研究的可行解集是无限维空间的子集的情况,在变分学、形状最优化、最优控制和微分对策中存在着许多这样的实例. 一般来说,逼近方法通常被用来求解无限维问题. 作为一种总极值方法,积分水平集方法可用来求解无限维问题. Zheng 等[1]提出了一个变测度算法来寻找逼近解. He 等[2]提出 $m$-均值和 $v$-方差来逼近总极小值. 本文中,我们用 $R$-收敛的变差积分途径来逼近总极小值. 关于更多的变差积分方法,见文献[3-6]. $R$-收敛比 $Q$-收敛有一个更广泛的应用领域.

设 $X$ 是一个拓扑空间, $S$ 是 $X$ 的一个子集并且 $f$ 是定义在 $X$ 上的一个实值函数. 这里考虑的问题是寻找

$$c^* = \inf_{x \in S} f(x) \tag{1}$$

及总极小值点集

$$H^* = \{x \in S \mid f(x) = c^*\}. \tag{2}$$

无论来自变分和最优控制问题, 还是微分对策问题, 我们都需要考虑的空间 $X$ 是无限维的. 但常常找到这样的总极小值 $c^*$ 和总极小值点集 $H^*$ 是困难的. 一般我们尽可能找到它们的逼近解

$$c_n^* = \inf_{x \in S^n} f(x),\ H_n^* = \{x \in S^n \mid f(x) = c_n^*\}, \tag{3}$$

* **收稿日期:** 2010-09-20; **修订日期:** 2010-11-24
**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(10771158);上海市重点学科资助项目(S30104)
**作者简介:** 陈熙(1986—),男,硕士生(E-mail: chenxi@shu.edu.cn);
姚奕荣(联系人. E-mail: yryao@staff.shu.edu.cn).

这里 $S^n$ 是 $S$ 的一个子集,它通常是 $X$ 的有限维子空间 $X_n$ 的一个子集. 因此我们自然地提出如何利用积分总极值途径构造序列 $\{S^n\}$ 使得序列 $\{c_n^*\}$ 收敛于总极小值 $c^*$ 和 $\{H_n^*\}$ 收敛于总极小值点集 $H^*$ .

在本文中,我们用 $R$-收敛研究逼近问题. 在第 1 节,概述了积分总极值的一些概念和结论. 根据有限维逼近,第 2 节研究了最优性条件和约束问题(1)的总极值算法. 第 3 节给出了罚变差积分的最优性条件. 基于这些结论,第 4 节提出了一个罚变差积分算法. 最后,第 5 节给出了一个具有非凸状态约束最优控制问题的数值例子来说明该算法的有效性.

# 1　无限维空间中的积分总极值

这节中,我们将概述积分总极值的一些概念和性质,它们将被应用到以下的几节中,更详细可参见文献[7-11].

## 1.1　丰满集和丰满函数

设 $X$ 是一个拓扑空间,若 $X$ 的一个子集 $D$ 满足

$$\mathrm{cl}\, D = \mathrm{cl}\ \mathrm{int}\, D, \tag{4}$$

则称 $D$ 为丰满集. 其中 $\mathrm{cl}\, D$ 表示 $D$ 的闭包,$\mathrm{int}\, D$ 表示 $D$ 的内部.

若 $x \in D$ 且对于 $x$ 的任意一个邻域 $N(x)$,有 $N(x) \cap \mathrm{int}\, D \neq \emptyset$,则称 $x$ 是 $D$ 的丰满点. 一个集合 $D$ 是丰满的当且仅当对 $D$ 中每一点都是丰满点.

若集合

$$F_c = \{x : f(x) < c\} \tag{5}$$

对于每个实数 $c$ 都是丰满的,则称函数 $f: X \to R$ 是上丰满的.

函数 $f$ 是上丰满的当且仅当 $f$ 在每一点都是上丰满的. 若 $x \in F_c$ 且 $f$ 在点 $x$ 是上丰满的,则 $x$ 是 $F_c$ 的一个丰满点.

## 1.2　$Q$-测度空间

为了利用积分途径研究总极小值问题,我们需要引入一类特殊的测度空间,称之为 $Q$- 测度空间.

设 $X$ 是一个拓扑空间,$\Omega$ 是 $X$ 的子集的一个 $\sigma$-域,$\mu$ 是 $\Omega$ 上的测度. $(X,\Omega,\mu)$ 称之为 $Q$- 测度空间,如果满足下列条件:

1) $X$ 中每个开集都是可测的;

2) $X$ 中非空开集 $G$ 的测度 $\mu(G)$ 为正: $\mu(G) > 0$;

3) $X$ 中紧集 $K$ 的测度 $\mu(K)$ 是有限的.

$n$ 维 Lebesgue 测度空间 $(R^n,\Omega,\mu)$ 是一个 $Q$-测度空间. 在由 Borel 集合作为可测集的可分离 Hilbert 空间 $H$ 上的非退化 Gaussian 测度 $\mu$ 构成了一个无限维 $Q$- 测度空间. 一个特定的总极值问题,应考虑与之相适应的一个特定 $Q$-测度空间. 一旦测度空间给定,我们就可用传统方式定义积分.

## 1.3　$R$-收敛

当我们希望通过研究有限维子空间中一系列确定的最优解来逼近无限维空间中最优解时,考虑测度空间序列和研究它的收敛性是很有意义的. 在概率论和随机过程的理论中我们已了解到测度收敛的一些概念.

设 $(X_1,\Omega_1,\mu_1),\cdots,(X_n,\Omega_n,\mu_n)$ 为测度空间序列,并且$(X,\Omega,\mu)$ 为 $Q$- 测度空间,其中,$X_n$

是 $X$ 的子空间和 $\Omega_n = \{A \cap X_n : A \in \Omega\}$.

**定义 1** 定义在可测空间 $\{(X_n, \Omega_n)\}$ 上的 $Q$-测度序列 $\{\mu_n\}$，被称为 $R$-收敛于定义在 $(X, \Omega)$ 上的 $Q$-测度 $\mu$，如果对于任意丰满集 $G \subset X$，有

$$\mu_n(G \cap X_n) \to \mu(G), \qquad n \to \infty, \tag{6}$$

记作 $\mu_n \xrightarrow{R} \mu$.

**性质 1** 若 $(X_1, \Omega_1, \mu_1), \cdots, (X_n, \Omega_n, \mu_n), \cdots$ 和 $(X, \Omega, \mu)$ 都是 $Q$-测度空间，其中，$X_n$ 是 $X$ 的子空间，$n = 1, 2, \cdots$，则 $\mu_n \xrightarrow{R} \mu$ 当且仅当对于在 $X$ 中的每一可测丰满集 $G$ 和在 $X$ 上每一有界可测上丰满函数 $f$，有

$$\int_{X_n \cap G} f \mathrm{d}\mu_n \to \int_G f \mathrm{d}\mu. \tag{7}$$

## 2 有限维逼近

我们现在来研究最优性条件和约束问题(1)的总极小值算法. 假设

$(A1)$：$S$ 是可测丰满集并且 $f$ 是一个可测上丰满函数.

**定义 2** 设 $\varphi : R^1 \to R^1$ 是一个严格递增的连续函数，并且 $\varphi(0) = 0$. 我们定义 $f$ 的变差积分如下：

$$V_\varphi(c, \mu) = V_\varphi(c; S; \mu) = \int_{H_c \cap S} \varphi(c - f(x)) \mathrm{d}\mu, \tag{8}$$

其中积分是关于 $x$ 在 $H_c \cap S$ 上的.

设 $\{X_n\}$ 是 $X$ 的序列子空间，$(X_n, \Omega_n, \mu_n)$，$n = 1, 2, \cdots$ 是 $Q$-测度空间，$\{\mu_n\}$ $R$-收敛于 $\mu$ 和 $S^n = S \cap X_n$，$n = 1, \cdots$，且具有如下性质：

$$\mu_n(D \cap X_n) \geqslant \mu(D), \qquad \forall D \in \Omega, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{9}$$

现在我们来研究刚才定义的变差积分的收敛性. 通常，我们考虑

$$c_n \geqslant c_n^* = \inf_{x \in S^n} f(x), \qquad n = 1, \cdots, \ c_n \downarrow c \geqslant \inf_{x \in S} f(x) = c^*.$$

**引理 1** 假设 $c \geqslant c^*$，$c_n \geqslant c_n^*$，和 $c_n \downarrow c$，若 $\mu_n \xrightarrow{R} \mu$，并且

$$\mu_n(S^n) \to \mu(S), \tag{10}$$

则

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n(H_{c_n} \cap S^n) = \mu(H_c \cap S). \tag{11}$$

**证明** 注意到

$$0 \leqslant \mu_n(S \cap X_n) - \mu_n(S^n) = \mu_n((S \cap X_n) - \mu(S)) + (\mu(S) - \mu_n(S^n)).$$

由于 $S$ 是丰满的，由 $\mu_n \xrightarrow{R} \mu$，我们可以得到

$$\mu_n(S \cap X_n) - \mu(S) \to 0;$$

根据条件(10)，我们有

$$\mu_n(S \cap X_n) - \mu_n(S^n) \to 0. \tag{12}$$

现在我们证明

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n(H_{c_n} \cap S \cap X_n) = \mu(H_c \cap S). \tag{13}$$

因为 $H_c \subset H_{c_n}$ 和 $\mu_n \xrightarrow{R} \mu$，我们可以得到

$$\mu_n(H_{c_n} \cap S \cap X_n) \geqslant \mu_n(H_c \cap S \cap X_n) \to \mu(H_c \cap S),$$

从而

$$\liminf_{n\to\infty}\mu_n(H_{c_n}\cap S\cap X_n)\geqslant\mu(H_c\cap S).$$

固定 $k$. 如果 $n\geqslant k$,那么 $H_{c_n}\subset H_{c_k}$,并且 $\mu_n(H_{c_n}\cap S\cap X_n)\leqslant\mu_n(H_{c_k}\cap S\cap X_n)$. 从而,

$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n(H_{c_n}\cap S\cap X_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}\mu_n(H_{c_k}\cap S\cap X_n)=\mu(H_{c_k}\cap S).$$

令 $k\to\infty$,由测度 $\mu$ 的连续性,于是我们得到

$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n(H_{c_n}\cap S\cap X_n)\leqslant\lim_{k\to\infty}\mu(H_{c_k}\cap S)=\mu(H_c\cap S),$$

因此式(13)的极限存在并且有意义. 最后,令 $n\to\infty$, 我们可以得到

$$\begin{aligned}&|\mu_n(H_{c_n}\cap S^n)-\mu(H_c\cap S)|\leqslant\\&\quad|\mu_n(H_{c_n}\cap S^n)-\mu_n(H_{c_n}\cap S\cap X_n)|+|\mu_n(H_{c_n}\cap S\cap X_n)-\mu(H_c\cap S)|\to 0,\end{aligned}$$

这是因为式(12)第 1 项趋向于 0. 为了证明第 2 项也趋向于 0,我们再次利用式(12),得

$$\begin{aligned}0&\leqslant\mu_n(H_{c_n}\cap S\cap X_n)-\mu_n(H_{c_n}\cap S^n)=\\&\quad\mu_n(H_{c_n}\cap(S\cap X_n\backslash S^n))\leqslant\\&\quad\mu_n(S\cap X_n\backslash S^n)\to 0.\end{aligned}$$

**定理 1** 假设对最小化问题 $c^*=\inf\limits_{x\in S}f(x)$ 和 $c_n^*=\inf\limits_{x\in S^n}f(x)$, $n=1,\cdots$. 在引理 1 的假设下,对 $c\geqslant c^*$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{H_{c_n}\cap S^n}\varphi(c_n-f(x))\,\mathrm{d}\mu_n=V_\varphi(c;S;\mu).\tag{14}$$

**证明**

$$\begin{aligned}&V_\varphi(c_n;S^n;\mu_n)-V_\varphi(c;S;\mu)=\\&\quad\int_{H_{c_n}\cap S^n}\varphi(c_n-f(x))\,\mathrm{d}\mu_n-\int_{H_c\cap S}\varphi(c-f(x))\,\mathrm{d}\mu=\\&\quad\left(\int_{H_{c_n}\cap S^n}\varphi(c_n-f(x))\,\mathrm{d}\mu_n-\int_{H_c\cap S\cap X_n}\varphi(c_n-f(x))\,\mathrm{d}\mu_n\right)+\\&\quad\left(\int_{H_c\cap S\cap X_n}\varphi(c_n-f(x))\,\mathrm{d}\mu_n-\int_{H_c\cap S\cap X_n}\varphi(c-f(x))\,\mathrm{d}\mu_n\right)+\\&\quad\left(\int_{H_c\cap S\cap X_n}\varphi(c-f(x))\,\mathrm{d}\mu_n-\int_{H_c\cap S}\varphi(c-f(x))\,\mathrm{d}\mu\right)=\\&\quad I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}|I_1|&\leqslant 2B\cdot|\mu_n(H_{c_n}\cap S^n)-\mu_n(H_c\cap S\cap X_n)|\leqslant\\&\quad 2B\cdot(|\mu_n(H_{c_n}\cap S^n)-\mu(H_c\cap S)|+\\&\quad|\mu(H_c\cap S)-\mu_n(H_c\cap S\cap X_n)|),\end{aligned}$$

其中 $B$ 是 $|\varphi(c_n-f(x))|$ 的界,由引理 1 和 $\mu_n\xrightarrow{R}\mu$ 当 $n\to\infty$ 时,则 $I_1$ 趋向于 0. 又因为 $c_n\downarrow c$ 当 $n\to\infty$ 时,则 $I_2\to 0$. 根据性质 1,我们有 $I_3\to 0$.

**定理 2** 在定理 1 的假设条件下, $c^*(c_n\downarrow c=c^*)$ 是 $f$ 在 $S$ 上的总极小值当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}V_\varphi(c_n;S^n;\mu_n)=0.\tag{15}$$

## 3 罚变差积分最优性条件

假设 $S$ 是度量空间 $X$ 的一个闭的丰满子集, $f$ 是 $X$ 上的实值函数. 约束问题(1) 的最优解

能用有限维空间中相应的罚无约束问题的一系列解来逼近. 关于约束集 $S$ 的罚函数定义如下:

**定义 3**[12] 在度量空间 $(X,d)$ 上的函数 $p(x)$ 称为关于约束集 $S$ 上的罚函数,如果

1) $p$ 是下半连续的;

2) $p(x)=0$ 若 $x\in S$;

3) $\inf_{x\notin S_\beta}p(x)>0$,其中 $S_\beta=\{u:d(u,v)\leqslant\beta,\forall v\in S\}$ 和 $\beta>0$.

本节中,我们假定最小点集非空,且假定:

(A2): $f$ 是下半连续函数且是下紧的.

在(A2)的条件下,最小点集是非空的,它可以被其他更弱的条件代替.

利用罚函数 $p$, 我们研究对应于式(1)的一个罚无约束最小化问题:

$$\min_{x\in X}\{f(x)+\alpha p(x)\},\qquad n=1,2,\cdots,\tag{16}$$

其中 $\alpha(>0)$ 是罚参数. 在假设条件(A2)下,罚水平集

$$H_c^\alpha=\{x:f(x)+\alpha p(x)\leqslant c\}$$

是集合 $H_c$ 的一个非空闭子集. 这样,$H_c^\alpha$ 在 $X$ 中是紧的,也就说明了式(16)最优解的存在性. 进一步,

$$\min_{x\in X}\{f(x)+\alpha p(x)\}\leqslant\min_{x\in S}\{f(x)+\alpha p(x)\}=\min_{x\in S}f(x)=c^*.$$

我们将构造两个序列 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{c_n\}$,使得当 $n\to\infty$ 时,$\alpha_n\uparrow\infty$ 和 $c_n\downarrow c(\geqslant c^*)$ 并有如下性质:

$$\min_{x\in H_n}\{f(x)+\alpha_n p(x)\}\to c^*,\qquad 当\ n\to\infty,\tag{17}$$

其中,为了简化符号,记

$$H_n=\{x:f(x)+\alpha_n p(x)\leqslant c_n\}.\tag{18}$$

**性质 2**[12] 若 $c_n\downarrow c\geqslant c^*$, 则

$$\lim_{n\to\infty}H_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}H_n=H_c\cap S.\tag{19}$$

下面的性质表明了一个约束问题的总极小值是相应罚问题的总极小值的极限.

**性质 3**[12] 假设 $\{\alpha_n\}$ 是一个正的递增序列且当 $n\to\infty$ 时,趋于无穷和 $\{c_n\}$ 是一个递减序列,且当 $n\to\infty$ 时,趋于 $c(c\geqslant c^*)$. 在假设(A2)下,我们有

$$\min_{x\in X}\{f(x)+\alpha_n p(x)\}=\min_{x\in H_n}\{f(x)+\alpha_n p(x)\}\to c^*=\min_{x\in S}f(x).\tag{20}$$

**定义 4**[5] 对于约束集 $S$,称罚函数 $p$ 关于问题(1)是精确的,如果存在一个实数 $\alpha_0>0$,使得对于每个 $\alpha\geqslant\alpha_0$, 有

$$\min_{x\in X}\{f(x)+\alpha p(x)\}=\min_{x\in S}f(x)=c^*\tag{21}$$

并且

$$\{x:f(x)+\alpha p(x)=c^*\}=\{x\in S:f(x)=c^*\}=H^*.\tag{22}$$

**定义 5** 设 $c_n>c^*=\inf_{x\in S\cap X_n}f(x)$. 在罚水平集 $H_n=\{x:f(x)+\alpha_n p(x)\leqslant c_n\}$ 且在 $X_n$ 上 $Q$- 测度 $\mu_n$,我们定义 $f+\alpha_n p$ 的罚变差积分函数如下:

$$V_\varphi(c_n;p;\alpha_n;\mu_n)=\int_{H_n\cap X_n}\varphi[c_n-f(x)-\alpha_n p(x)]\,\mathrm{d}\mu_n.\tag{23}$$

**引理 2** 假设 $c\geqslant c^*$ 和 $c_n\downarrow c$. 若 $\mu_n\xrightarrow{R}\mu$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(H_n\cap X_n)=\mu(H_c\cap S).\tag{24}$$

**定理 3** 假设 $S$ 是丰满的和 $f+\alpha p(\alpha>0)$ 在 $S$ 上是丰满的．在(A2)假定下，对 $c\geqslant c^*$ 成立：

$$\lim_{n\to\infty} V_\varphi(c_n;p;\alpha_n;\mu_n)=V_\varphi(c;S;\mu). \tag{25}$$

**证明** 我们有

$$\begin{aligned}
&V_\varphi(c_n;p;\alpha_n;\mu_n)-V_\varphi(c;S;\mu)=\\
&\quad\int_{H_n\cap X_n}\varphi[c_n-f(x)-\alpha_n p(x)]\,\mathrm{d}\mu_n-\int_{H_c\cap S}\varphi[c-f(x)]\,\mathrm{d}\mu=\\
&\quad\left(\int_{H_n\cap X_n}\varphi[c_n-f(x)-\alpha_n p(x)]\,\mathrm{d}\mu_n-\int_{H_c\cap S\cap X_n}\varphi[c_n-f(x)]\,\mathrm{d}\mu_n\right)+\\
&\quad\left(\int_{H_c\cap S\cap X_n}\varphi[c_n-f(x)]\,\mathrm{d}\mu_n-\int_{H_c\cap S\cap X_n}\varphi[c-f(x)]\,\mathrm{d}\mu_n\right)+\\
&\quad\left(\int_{H_c\cap S\cap X_n}\varphi[c-f(x)]\,\mathrm{d}\mu_n-\int_{H_c\cap S}\varphi[c-f(x)]\,\mathrm{d}\mu\right)=\\
&\quad I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}$$

由于在 $S$ 上 $\alpha_n p(x)=0$，

$$I_1=\int_{H_n\cap X_n}\varphi[c_n-f(x)-\alpha_n p(x)]\,\mathrm{d}\mu_n-\int_{H_c\cap S}\varphi[c-f(x)-\alpha_n p(x)]\,\mathrm{d}\mu,$$

并且

$$0\leqslant\varphi(c_n-f(x)-\alpha_n p(x))\leqslant\varphi(c_1-c^*),$$

它是有界的，令其界为 $B$，这样

$$\begin{aligned}
|I_1|\leqslant{}&2B\cdot|\mu_n(H_n\cap X_n)-\mu_n(H_c\cap S\cap X_n)|\leqslant\\
&2B\cdot(|\mu_n(H_n\cap X_n)-\mu(H_c\cap S)|+\\
&|\mu(H_c\cap S)-\mu_n(H_c\cap S\cap X_n)|),
\end{aligned}$$

由引理 2 和 $\mu_n\xrightarrow{R}\mu$ 当 $n\to\infty$ 时，$I_1$ 趋向于0. 又因为 $c_n\downarrow c$，所以当 $n\to\infty$ 时，$I_2\to 0$. 从性质 1 得到 $I_3\to 0$.

**定理 4** 在定理 3 的假定下，$c^*(c_n\downarrow c=c^*)$ 是 $f$ 在 $S$ 上的总极小值当且仅当下面的条件成立：

$$\lim_{n\to\infty} V_\varphi(c_n;p;\alpha_n;\mu_n)=0. \tag{26}$$

## 4 一个变测度罚变差积分算法

在这节，我们提出了一个罚变差积分算法，于是我们证明由该算法所产生的序列收敛于总极小值. 由于 $X_n, n=1,2\cdots$ 是空间 $X$ 的子空间，那么

$$\mathrm{cl}\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n\subset X.$$

很自然的可以假定关于逼近无间隙存在. 于是，我们假设

(A3)：$\mathrm{cl}\cup_{n=1}^{\infty}X_n=X$，和存在一个 $Q$- 测度空间$(X_n,\Omega_n,\mu_n)$ 序列使得 $\mu_n\xrightarrow{R}\mu$ 且 $\mu$ 是一个由 $\{\mu_n\}$ 扩展的 $Q$- 测度.

**注** 由于 $\{X_n\}$ 是一个递增集合序列，这样假设(A3)等价于 $\mathrm{cl}\cup_{n=k}^{\infty}X_n=X, k=1,2,\cdots$.

进一步取 $\varphi$ 使 $\varphi'$ 在$[0,\infty)$上严格递增，且 $\varphi'(0)=0$.

现在我们来描述算法过程. 取一实数

$$c_1 > \min_{x \in S \cap X_1} f(x),$$

精确罚函数 $p(x)$ 和罚参数 $\alpha_1$. 令

$$c_2 = \int_{H_1 \cap X_1} \varphi[c_1 - f(x) - \alpha_1 p(x)] \mathrm{d}\mu_1,$$

用 $c_2$ 取代 $c_1$, $\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \beta(\beta \geqslant 1.0)$, $X_2$ 取代 $X_1$ 和 $\mu_2$ 取代 $\mu_1$, 于是转下一步并继续迭代.

罚变差积分算法如下:

**步骤 1** 取 $\varepsilon > 0$ 足够小的值和 $\{\alpha_k\}(\uparrow \infty)$. 给定点 $x_0 \in X$, 计算 $c_0 = f(x_0) + \alpha_0 p(x_0)$, 置 $k := 0$.

**步骤 2** 计算 $V_\varphi(c_k; p; \alpha_k; \mu_k)$ 如下:

$$V_\varphi(c_k; p; \alpha_k; \mu_k) = \int_{H_k \cap X_k} \varphi[c_k - f(x) - \alpha_k p(x)] \mathrm{d}\mu_k, \tag{27}$$

其中

$$H_k = \{x \in X: f(x) + \alpha_k p(x) \leqslant c_k\}. \tag{28}$$

**注** 我们总是有 $V_\varphi(c_k; p; \alpha_k; \mu_k) > 0$, 因为 $c_k > c^*$. $V'_\varphi(c_k; p; \alpha_k; \mu_k)$ 是 $V_\varphi(c_k; p; \alpha_k; \mu_k)$ 的导数.

令

$$\lambda_k = \frac{V_\varphi(c_k; p; \alpha_k; \mu_k)}{V'_\varphi(c_k; p; \alpha_k; \mu_k)}. \tag{29}$$

**步骤 3** 若 $\lambda_k < \varepsilon$, 则转步骤 4; 否则令

$$c_{k+1} = c_k - \lambda_k, \tag{30}$$

且置 $k := k + 1$, 转步骤 2.

**步骤 4** 令 $c^* := c_k$ 和 $H^* := H_k$, 其中 $c^*$ 是近似总极值, $H^*$ 是近似总极小值点集.

在这个算法中令 $\varepsilon = 0$, 我们可以得到一递减水平常数序列

$$c_1 \geqslant c_2 \geqslant \cdots \geqslant c_k \geqslant c_{k+1} \geqslant \cdots > c^*,$$

其极限

$$\lim_{k \to \infty} c_k = \hat{c}$$

存在.

**定理 5**(收敛性定理) 由上述算法, 我们有

$$\lim_{k \to \infty} c_k = c^* = \min_{x \in S} f(x), \tag{31}$$

且总极小点集是非空的:

$$\varnothing \neq \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{cl} \bigcup_{n=k}^{\infty} (H_n \cap X_n) \subset H^*. \tag{32}$$

**证明** 根据序列 $\{c_k\}$ 极限存在可得

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = \lim_{k \to \infty} (c_k - c_{k+1}) = \hat{c} - \hat{c} = 0.$$

进一步我们有

$$\lambda_k = \frac{V_\varphi(c_k; p; \alpha_k; \mu_k)}{V'_\varphi(c_k; p; \alpha_k; \mu_k)} \geqslant \frac{V_\varphi(c_k; p; \alpha_k; \mu_k)}{V'_\varphi(c_1; p; \alpha_1; \mu_1)} \geqslant 0,$$

则极限存在

$$\frac{V_\varphi(c_k; p; \alpha_k; \mu_k)}{V'_\varphi(c_1; p; \alpha_1; \mu_1)} = 0,$$

或者

$$\lim_{k\to\infty} V_{\varphi}(c_k;p;\alpha_k;\mu_k)=0.$$

因此，$\hat{c}=c^*$ 是 $f$ 在 $S$ 上的总极小值.

由于 $\cup_{n=k}^{\infty} H_n \cap X_n \subset H_k$，$k=1,2,\cdots$，我们有

$$\mathrm{cl}\bigcup_{n=k}^{\infty} H_n \cap X_n \subset H_k, \qquad k=1,2,\cdots,$$

从而

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{cl}\bigcup_{n=k}^{\infty} H_n \cap X_n \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} H_k = H_{c^*} \cap S = H^*.$$

集合 $\mathrm{cl}\cup_{n=k}^{\infty} H_n \cap X_n, k=1,2,\cdots$ 是紧集 $H_1$ 中的闭集.这样，它们是递减紧集且这些集合的交非空.

# 5 数值例子

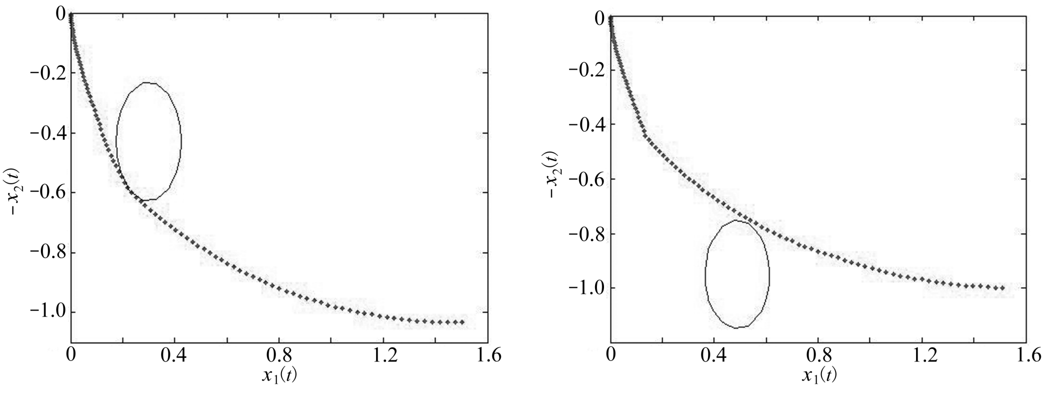
考虑在状态空间中有障碍的最速下降问题可化为约束最优控制问题如下：

$$\begin{cases} \min f = \min[-x_1(t_T)] \\ \text{s.t.} \quad \dot{x}_1(t)=x_3(t)\cos[u(t)], x_1(0)=0, \\ \qquad \dot{x}_2(t)=x_3(t)\sin[u(t)], \ x_2(0)=0, \\ \qquad \dot{x}_3(t)=g\sin[u(t)], \ x_3(0)=0.2, \\ \qquad \dfrac{(x_1(t)-a)^2}{0.4}+(x_2(t)-b)^2 \geqslant (0.2)^2, \end{cases} \tag{33}$$

其中 $g=1.0, t_T=2.0$ 和点 $(a,b)$ 是椭圆约束的中心.一旦控制 $u(t)$ 给定，那么动态系统(33)能被求解.状态 $x_1, x_2$ 和 $x_3$ 是控制 $u(t)$ 的函数

$$x_i(t)=x_i[u(\cdot),t], \qquad i=1,2,3,$$

并且目标函数 $f$ 也是 $u(\cdot)$ 的函数.




(a) $a=0.3$, $b=0.43$ (b) $a=0.49$, $b=0.95$

**图 1** 非凸状态约束的最优控制问题

Fig. 1 Optimal control proplem with non-convex state constraints

关于最优控制问题在状态空间中障碍的出现在应用中是相当常见的，但是在最优控制理论和数值计算中非凸状态约束的出现会带来很大的困难.传统的最优性条件，如最大化原理

和 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程不能描述总极值. 同样基于梯度的数值最优化算法也无法找到最优解. 我们运用不连续罚函数积分总极值方法把此问题转化为无约束问题. 这里我们利用罚函数

$$p(u)=\begin{cases}0, & u\in S,\\ \delta+\mathrm{d}(u), & u\notin S,\ \delta>0,\end{cases}$$

其中

$$d(u)=\int_0^{t_T}(0.2)^2-\left[\frac{(x_1(t)-a)^2}{0.4}+(x_2(t)-b)^2\right]\mathrm{d}t.$$

所给程序用不同的椭圆中心来解上述问题,它是一个 101 个变量的总极值问题(其中, $t_j$, $j=0,\cdots,100$). 按照椭圆的中心最优轨迹可以在障碍上方或下方取道而行. 我们选择二个最优解如图 1. 图 1(a)中,总体最优控制 $u(\cdot)$ 需要竭力推进轨迹向下是为了在障碍椭圆下通过. 相反,图 1(b)中,总体最优控制 $u(\cdot)$ 不能维持下降使作出椭圆上方绕道而行.

**参考文献:**


[1] Zheng Q, Zhuang D. Integral global optimization of constrained problems in functional spaces with discontinuous penalty functions[C]//Floundas C A, Pardalos P M. *Recent Advances in Global Optimization*. New Jersey: Princeton University Press, 1992, 298-320.

[2] HE Zhen-zhen, CUI Hong-quan, ZHENG Quan. Finite dimensional approximation to global minima—an integral approach[J]. *OR Transactions*, 2005, **9**(1): 21-31.

[3] Phu H X, Hoffmann A. Essential supremum and supremum of summable functions[J]. *Numer Funct Anal and Optimiz*, 1996, **17**(1/2): 167-180.

[4] WU Dog-hua, YU Wu-yang, ZHENG Quan. A sufficient and necessary condition for global optimization[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2010, **23**(1): 17-21.

[5] 陈柳,姚奕荣,郑权. 变差积分型约束总极值问题的不连续罚函数[J]. 应用数学和力学, 2009, **30**(9):1125-1134. (CHEN Liu, YAO Yi-rong, ZHENG Quan. Discontinuous penalty approach with deviation integral for global constrained minimization[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*,2009, **30**(9):1201-1210.)

[6] YAO Yi-rong,CHEN Liu, ZHENG Quan. Optimality condition and algorithm with deviation integral for global optimaization[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, **357**(2): 371-384.

[7] SHI Shu-zhong, ZHENG Quan, ZHUANG De-ming. Discontinuous robust mapping are approximatable[J]. *Trans Amer Math Soc*, 1995, **347**(12): 4943-4957.

[8] ZHENG Quan. Robust analysis and global minimization of a class of discontinuous functions (I)[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, *English Ser*, 1990, **6**(3): 205-223.

[9] ZHENG Quan. Robust analysis and global minimization of a class of discontinuous functions (II)[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, *English Ser*, 1990, **6**(3): 317-337.

[10] ZHENG Quan. Robust analysis and global optimization[J]. *International J Computers and Mathematics With Applications*, 1990, **24**(1): 273-286.

[11] HONG Chew Soo, ZHENG Quan. *Integral Global Optimization-Theory*, *Implementation and Applications*[M]. Berlin Heidelberg: Spring-Verlag, 1988.

[12] ZHENG Quan, Zhang L. Global minimization of constrained problems with discontinuous pen-

alty functions[J]. *International J Computers and Mathematics With Applications*, 1999, **37**(4/5): 41-58.

# Finite Dimensional Approximation to Global Minimizers in Functional Spaces With *R*-Convergence

CHEN Xi[1], YAO Yi-rong[1], ZHENG Quan[1,2]

(1. *Department of Mathematics*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200444, *P. R. China*;
2. *Department of Mathematics*, *Columbus State University*, *Columbus*, *GA* 31907, *USA*)

**Abstract**: New concept of convergence (*R*-convergence) of a sequence of measures was applied to characterize global minimizers in functional space as a sequence of approximating solutions in finite-dimensional spaces. A deviation integral approach was used to find such solutions. For a constrained problem, a penalized deviation integral algorithm was proposed to convert it to unconstrained ones. A numerical example on optimal control problem with non convex state constrains was given to show that the algorithm is efficient.

**Key words**: global optimization; deviation integral; variable measure; *R*-convergence; finite dimensional approximation