

# 功能梯度厚壁中空圆柱体弹性动力学 平面应变响应的解析解\*

M·尼克哈, F·汉那瓦, E·德格罕

(K. N. 土西科技大学 机械工程学院, 德黑兰, 伊朗)

**摘要:** 研究了边界表面受均布动压力作用的功能梯度(FGM)厚壁中空圆柱体,给出了其平面应变响应下的弹性动力学解.假设材料性能(除 Poisson 比外)随厚度按幂律函数变化.为了得到一个精确解,将动力径向位移分为准静力部分和动力部分,导出了每个部分的一个解析解.先由 Euler 方程得到准静力学部分的解,再由分离变量法和正交展开法得到动力学部分的解.在不同动荷载作用下,对不同的 FGM 中空圆柱体,画出径向位移和应力图,并对本方法的优点进行了讨论.该解析解适用于中空圆柱体各种组合的 FGM,厚度可以是任意的,初始条件也可以是任意的,壁面上均匀分布着任意形式的动压力.

**关键词:** 功能梯度材料(FGM); 弹性动力学解; 中空圆柱体; 幂律函数

**中图分类号:** O175.4      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.02.006

## 引言

功能梯度材料(FGM)是材料科学中一个新的分支,可用于承受突然施加热力学荷载的结构设计中. FGM 的性能随结构几何形状的组成材料逐渐变化.众所周知,传统的复合材料易于在基层和纤维之间的界面上破坏.因此,FGM 逐渐变化的材料性能,有利于承受高强度的冲击荷载.在各种各样的 FGM 结构中,圆柱体结构有着特别的吸引力.在宏观意义上,这些结构的热学和力学性能从一个表面到另一个表面连续变化.这可以通过逐渐改变组成材料(特别是在制造过程中的陶瓷和金属材料)的体积分数,使其朝着所期望的方向发展.因此,在保持其结构整体性的同时,还能够承受高温梯度环境<sup>[1-2]</sup>.对应用于航空航天、核工业和汽车工业中的 FGM 圆柱体结构,分析其在各种动荷载下的瞬态响应是非常重要的.鉴于此,近年来很多学者致力于研究 FGM 圆柱体结构<sup>[3-28]</sup>.通过这些研究,对于多层 FGM 圆柱体的解析解,其中多数与稳态情况有关,这些学者表现出更大的兴趣<sup>[3-12]</sup>.

例如,Zimmerman 和 Lutz 提出了 FGM 圆柱体的稳态热-力学应力的一个解析解<sup>[3]</sup>.他们考虑了稳态径向热负荷的厚壁中空圆柱体,并假设其组成材料与径向梯度材料之间的复合是线性的. Jabbari 等<sup>[4]</sup>分析了径向对称荷载作用下 FGM 中空圆柱体的力学和热应力.假设材料性能,除 Poisson 比外,沿厚度随半径的幂律函数变化.他们提出了一种直接解析法来求解热传导

\* 收稿日期: 2010-10-24; 修订日期: 2010-11-22

作者简介: Mehdi Nikkhah (联系人. E-mail: me.nikkhah@gmail.com).

本文原文为英文,黄雅意译,张禄坤校.

和 Navier 方程. Xiang 等<sup>[6]</sup>就内外表面受均布压力作用的多层圆柱体,提出了双向递归算法来确定其两相邻层之间的挤压应力;接着,基于 Lamé 方程解,求出了多层结构的精确解;最后,利用 Whittaker 函数和超几何函数,分别得到了指数和线性径向梯度材料的厚壁空心 FGM 圆柱体的位移和应力的分布. Tutuncu<sup>[7]</sup>利用幂级数解,得到了材料性能呈指数变化的厚壁 FGM 圆柱体的径向位移和稳态应力. Li 和 Peng<sup>[9]</sup>通过将相关问题简化为求解 Fredholm 积分方程,对一承压 FGM 中空圆柱体或圆盘进行了弹性分析;再将其解展开为 Legendre 多项式的级数,来求解最终方程.

对于动力情况,研究多层 FGM 圆柱体结构的动力响应有很多数值方法<sup>[13-20]</sup>,但其解析解鲜有见诸文献<sup>[21-28]</sup>. 例如, Hosseini 等<sup>[21]</sup>给出了 FGM 厚壁中空圆柱体中瞬态热传导的解析解. 他们假设材料性能随厚度呈幂律变化,利用 Bessel 函数解析得到了温度分布. Babaei 和 Chen<sup>[22]</sup>给出了径向压电 FGM 旋转中空轴的一个解析解,并直接求解了所得到的两个关于位移和电势的完全耦合微分方程.

FGM 中空圆柱体的解析弹性动力学分析是一个非常重要的课题,但其在数学公式化上仍有很大的困难. 研究者大多尝试利用多层次方法,将 FGM 厚壁中空圆柱体分为多个均质、各向同性的同轴小圆柱体,来求解该问题<sup>[23-25]</sup>. 他们所得到的方程在界面上满足径向位移和径向应力的连续性条件,在内外边界表面上满足附着力为非零. 然而,由于界面压力的存在及多层圆柱体的连续性条件,使得在解析法的数学计算中,出现了新的难题.

本文对于边界表面上作用均布动压力的 FGM 厚壁中空圆柱体,提出了得到其平面应变响应的弹性动力学解的简化方法. 假设材料性能随厚度按幂律函数变化. 不顾先前的很多研究,认为材料密度的变化与弹性模量不同. 为了得到一个精确解,将动力径向位移分为准静力部分和动力部分,导出了每个部分的一个解析解. 先由 Euler 方程得到准静力解;再由分离变量法和正交展开法得到动力解. 对不同的 FGM 中空圆柱体,绘出径向位移和应力的分布图,并讨论了所提出方法的优点.

## 1 问题的解

### 1.1 初始边界条件

考虑一内径为  $a$ , 外径为  $b$  的无限长 FGM 厚壁中空圆柱体. 该圆柱体在内外边界表面上受到均布动压力作用. 并且其材料性能随厚度变化,满足幂律函数

$$P = P_0 \left( \frac{r}{b} \right)^n, \quad (1)$$

其中,  $P_0$  为外表面的性能,  $n$  为幂律函数的非负指数. 可以看出,内表面上的材料性能值随指数  $n$  或中空圆柱体厚度的增加而减小.

本文假设弹性模量和质量密度随厚度按方程(1)变化,而 Poisson 比  $\nu$  为常数. 为了通过厚度来控制 FGM 圆柱体的材料性能,并得到不同结构壁厚的中空 FGM 圆柱体,认为弹性模量和质量密度的幂律函数指数不同,则

$$E = E_0 \left( \frac{r}{b} \right)^{n_1}, \quad (2a)$$

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{r}{b} \right)^{n_2}. \quad (2b)$$

随着体力趋于 0,对于平面应变条件和轴对称加载, Navier 运动方程变为<sup>[15]</sup>

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho(r) \frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2}, \quad (3)$$

其中  $u(r,t)$  为径向位移. 相应的应变-位移关系可简化为

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (4a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (4b)$$

又, 应力-应变方程可以表示如下:

$$\sigma_r = c_1 \varepsilon_r + c_2 \varepsilon_\theta, \quad (5a)$$

$$\sigma_\theta = c_2 \varepsilon_r + c_1 \varepsilon_\theta, \quad (5b)$$

其中, 平面应力条件下的  $c_1$  和  $c_2$  分别为

$$c_1(r) = \frac{E(r)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = c_{10} \left(\frac{r}{b}\right)^{n_1}, \quad (6a)$$

$$c_2(r) = \frac{E(r)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = c_{20} \left(\frac{r}{b}\right)^{n_1}. \quad (6b)$$

中空圆柱体的初始边界条件可表示为

$$\sigma_r(a,t) = -p_1(t), \quad (7a)$$

$$\sigma_r(b,t) = -p_2(t), \quad (7b)$$

$$u(r,0) = u_0(r), \quad (7c)$$

$$V(r,0) = V_0(r), \quad (7d)$$

其中,  $\sigma_r(r,t)$ ,  $u_0(r)$ ,  $V_0(r)$  分别为径向应力、初始径向位移和初始径向速度.

为了简单起见, 引入如下无量纲参数:

$$\begin{cases} \xi = \frac{r}{b}, \bar{u} = \frac{u}{b}, s = \frac{a}{b}, \tau = \frac{c_v}{b}t, c_v = \sqrt{\frac{c_{10}}{\rho_0}}, \bar{V} = \frac{V}{c_v}, \\ \bar{E} = \frac{E}{E_0} = \frac{c_1}{c_{10}} = \frac{c_2}{c_{20}} = \xi^{n_1}, \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} = \xi^{n_2}, \bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{c_{10}}, \bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{c_{10}}. \end{cases} \quad (8)$$

将方程(4)和(5)代入方程(3), 则关于径向位移的 Navier 方程变为

$$\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial c_1}{c_1 \partial r} + \frac{1}{r}\right) \frac{\partial u(r,t)}{\partial r} + \left(\frac{\partial c_2}{rc_1 \partial r} - \frac{1}{r^2}\right) u(r,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2}, \quad (9)$$

这里,  $c$  为随厚度变化的径向波速, 可由以下方程计算得到:

$$c = \sqrt{\frac{c_1(r)}{\rho(r)}} = \sqrt{\frac{c_{10}}{\rho_0}} \left(\frac{r}{b}\right)^{(n_1-n_2)/2} = c_v \xi^{(n_1-n_2)/2}, \quad (10)$$

其中,  $c_{10}, \rho_0$  分别为外表面上的弹性系数和质量密度. 将无量纲参数(8)代入方程(9), 可得到以下的方程:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \left(\frac{n_1+1}{\xi}\right) \frac{\partial \bar{u}(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \left(\frac{\chi n_1 - 1}{\xi^2}\right) \bar{u}(\xi, \tau) = \xi^{n_2-n_1} \frac{\partial^2 \bar{u}(\xi, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad (11)$$

其中  $\chi = \frac{c_{20}}{c_{10}} = \frac{v}{1-v} = \text{const}, s \leq \xi \leq 1$ .

方程(7)的无量纲形式的初始边界条件可写为

$$\bar{\sigma}_r(s, \tau) = -\bar{p}_1(\tau), \quad (12a)$$

$$\bar{\sigma}_r(1, \tau) = -\bar{p}_2(\tau), \quad (12b)$$

$$\bar{u}(\xi, 0) = \bar{u}_0(\xi), \quad (12c)$$

$$\bar{V}(\xi, 0) = \bar{V}_0(\xi). \quad (12d)$$

## 1.2 求解方法

为了在相应的无量纲初始边界条件(12)下,寻求方程(11)的精确解,先将无量纲动力径向位移  $\bar{u}(\xi, \tau)$  分为准静力部分  $\bar{u}_{st}(\xi, \tau)$  和动力部分  $\bar{u}_{dy}(\xi, \tau)$ . 准静力部分  $\bar{u}_{st}(\xi, \tau)$  满足静力平衡方程和加在壁面上的附着力边界条件. 动力部分  $\bar{u}_{dy}(\xi, \tau)$  满足运动方程和无应力边界条件,并由分离变量法来用一系列特征函数表示. 因此,无量纲动力径向位移可以表示如下<sup>[31]</sup>:

$$\bar{u}(\xi, \tau) = \bar{u}_{st}(\xi, \tau) + \bar{u}_{dy}(\xi, \tau) = \bar{u}_{st}(\xi, \tau) + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{U}_i(\xi) \Omega_i(\tau), \quad (13)$$

其中,  $\bar{U}_i(\xi)$  为 FGM 厚壁中空圆柱体的第  $i$  个无量纲波型,  $\Omega_i(\tau)$  为与  $\bar{U}_i(\xi)$  相关的未知无量纲时变系数. 以前有一些研究者将该方法用于求解内部多重效应问题<sup>[29-30]</sup>. 为了得到无量纲动力径向位移  $\bar{u}(\xi, \tau)$  的一个精确解,有必要找出准静力部分和动力部分.

### 1.2.1 准静力部分

无量纲准静力径向位移可以通过求解以下的准静力平衡方程和相关的边界条件得到:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \left( \frac{n_1 + 1}{\xi} \right) \frac{\partial \bar{u}(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \left( \frac{\chi n_1 - 1}{\xi^2} \right) \bar{u}(\xi, \tau) = 0, \quad (14a)$$

$$\bar{\sigma}_r(s, \tau) = -\bar{p}_1(\tau), \quad (14b)$$

$$\bar{\sigma}_r(1, \tau) = -\bar{p}_2(\tau). \quad (14c)$$

上述方程为含常系数的 Euler 方程,可以简单地求解如下:

$$\bar{u}_{st}(\xi, \tau) = A \xi^\eta, \quad (15)$$

将方程(15)代入方程(14a),可得到一个特征方程. 该特征方程的根为方程(15)的指数:

$$\eta^2 + n_1 \eta + (\chi n_1 - 1) = 0, \quad (16a)$$

$$\eta_1, \eta_2 = \frac{-n_1 \pm \sqrt{n_1^2 - 4\chi n_1 + 4}}{2}. \quad (16b)$$

从而,得到无量纲动力径向位移的准静力部分如下:

$$\bar{u}_{st}(\xi, \tau) = A(\tau) \xi^{\eta_1} + B(\tau) \xi^{\eta_2}, \quad (17)$$

其中,  $A(\tau)$  和  $B(\tau)$  为与时间相关的未知无量纲系数,可从边界条件(14)中求得.

### 1.2.2 动力部分

为了得到无量纲径向位移的动力部分,必须找出无量纲波型的控制方程、未知无量纲时变系数以及波型的正交条件. 无量纲波型  $\bar{U}(\xi)$  由以下的特征问题确定<sup>[31]</sup>:

$$\frac{d^2 \bar{U}(\xi)}{d\xi^2} + \left( \frac{n_1 + 1}{\xi} \right) \frac{d\bar{U}(\xi)}{d\xi} + \left( \frac{\chi n_1 - 1}{\xi^2} \right) \bar{U}(\xi) = -\omega^2 \xi^{n_2 - n_1} \bar{U}(\xi), \quad (18a)$$

其中方程(18a)相应的边界条件为无应力条件,从而,

$$\bar{\sigma}_r(s, \omega) = 0, \quad (18b)$$

$$\bar{\sigma}_r(1, \omega) = 0. \quad (18c)$$

可以看出,特征值  $\omega^2$  为实数且为非负数<sup>[32]</sup>. 由 Bessel 方程,方程(18)的一般解为<sup>[33]</sup>

$$\bar{U}(\xi) = D \varepsilon_\alpha(\lambda \xi^q), \quad (19a)$$

其中

$$\varepsilon_\alpha(\lambda\xi^q) = \xi^{-n_1/2}(\beta_1 J_\alpha(\lambda\xi^q) + \beta_2 Y_\alpha(\lambda\xi^q)), \quad (19b)$$

$$q = \frac{2 + n_2 - n_1}{2}, \quad (19c)$$

$$\lambda = \frac{2\omega}{2 + n_2 - n_1}, \quad (19d)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{n_1^2 - 4\chi n_1 + 4}}{2 + n_2 - n_1}, \quad (19e)$$

$J_\alpha(\lambda\xi^q)$  和  $Y_\alpha(\lambda\xi^q)$  分别为  $\alpha$  阶的第一和第二类 Bessel 函数.  $\beta_1$  和  $\beta_2$  为由无应力边界条件 (18) 得到的未知系数, 基于以下的过程:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r(\xi, \omega) &= \xi^{n_1} \frac{\partial \bar{U}(\xi, \omega)}{\partial \xi} + \chi \xi^{n_1} \frac{\bar{U}(\xi, \omega)}{\xi} = \\ &\beta_1 \left( \left( \frac{-n_1}{2} \right) \xi^{n_1/2-1} J_\alpha(\lambda\xi^q) + \xi^{n_1/2} \frac{\partial (J_\alpha(\lambda\xi^q))}{\partial \xi} + \chi \xi^{n_1/2-1} J_\alpha(\lambda\xi^q) \right) + \\ &\beta_2 \left( \left( \frac{-n_1}{2} \right) \xi^{n_1/2-1} Y_\alpha(\lambda\xi^q) + \xi^{n_1/2} \frac{\partial (Y_\alpha(\lambda\xi^q))}{\partial \xi} + \chi \xi^{n_1/2-1} Y_\alpha(\lambda\xi^q) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

可以看出<sup>[33]</sup>:

$$\frac{\partial (J_\alpha(\lambda\xi^q))}{\partial \xi} = \left( J_{\alpha-1}(\lambda\xi^q) - \frac{\alpha}{\lambda\xi^q} J_\alpha(\lambda\xi^q) \right) \lambda q \xi^{q-1}, \quad (21a)$$

$$\frac{\partial (Y_\alpha(\lambda\xi^q))}{\partial \xi} = \left( Y_{\alpha-1}(\lambda\xi^q) - \frac{\alpha}{\lambda\xi^q} Y_\alpha(\lambda\xi^q) \right) \lambda q \xi^{q-1}. \quad (21b)$$

将方程(21)代入方程(20), 得到:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r(\xi, \omega) &= \xi^{n_1} \frac{\partial \bar{U}(\xi, \omega)}{\partial \xi} + \chi \xi^{n_1} \frac{\bar{U}(\xi, \omega)}{\xi} = \\ &\beta_1 \left( \left( \left( \frac{-n_1}{2} \right) \xi^{n_1/2-1} - \xi^{n_1/2-1} \alpha q + \chi \xi^{n_1/2-1} \right) J_\alpha(\lambda\xi^q) + \right. \\ &\left. (\xi^{n_1/2} \lambda q \xi^{q-1}) J_{\alpha-1}(\lambda\xi^q) \right) + \beta_2 \left( \left( \left( \frac{-n_1}{2} \right) \xi^{n_1/2-1} - \right. \right. \\ &\left. \left. \xi^{n_1/2-1} \alpha q + \chi \xi^{n_1/2-1} \right) Y_\alpha(\lambda\xi^q) + (\xi^{n_1/2} \lambda q \xi^{q-1}) Y_{\alpha-1}(\lambda\xi^q) \right), \end{aligned} \quad (22)$$

通过定义

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi, \omega) &= \left( \left( \frac{-n_1}{2} \right) \xi^{n_1/2-1} - \xi^{n_1/2-1} \alpha q + \chi \xi^{n_1/2-1} \right) J_\alpha(\lambda\xi^q) + \\ &(\xi^{n_1/2} \lambda q \xi^{q-1}) J_{\alpha-1}(\lambda\xi^q), \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(\xi, \omega) &= \left( \left( \frac{-n_1}{2} \right) \xi^{n_1/2-1} - \xi^{n_1/2-1} \alpha q + \chi \xi^{n_1/2-1} \right) Y_\alpha(\lambda\xi^q) + \\ &(\xi^{n_1/2} \lambda q \xi^{q-1}) Y_{\alpha-1}(\lambda\xi^q), \end{aligned} \quad (23b)$$

并将方程 (23) 代入无应力边界条件(18), 可以得到以下矩阵形式的线性代数方程组:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(s, \omega) & \Psi_2(s, \omega) \\ \Psi_1(1, \omega) & \Psi_2(1, \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

方程(24)可以进一步简化为

$$\Psi \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}, \quad (25)$$

其中  $\boldsymbol{\beta}$  为含有 2 个元素的特征向量, 非平凡解的存在性使得矩阵的行列式为 0, 即

$$\det |\Psi| = 0. \quad (26)$$

对于材料性能随厚度呈幂律变化的一无限长 FGM 厚壁中空圆柱体, 方程(26)给出了其在平面应变径向振动时的一个超越方程, 也叫特征方程(或频率方程). 由文献[34]可以看出, 弹性体的正特征值有无穷个, 故 FGM 圆柱体的特征方程有着无穷个正根. 该方程的正根给出了  $\omega_i (i = 1, 2, 3, \dots)$  值, 表示该 FGM 厚壁中空圆柱体的共振角频率或特征值. 利用一些数值方法, 如 Newton-Rophson 法, 可以从特征(或频率)方程(26)中准确地确定这些角频率.

FGM 厚壁中空圆柱体中, 与第  $i$  个角频率  $\omega_i$  相关的第  $i$  个振型  $\bar{U}_i(\xi)$  可以表示为

$$\bar{U}_i(\xi) = D_i \varepsilon_\alpha(\lambda_i \xi^q), \quad (27a)$$

$$\varepsilon_\alpha(\lambda_i \xi^q) = \xi^{-n_1/2} (\beta_{1i} J_\alpha(\lambda_i \xi^q) + \beta_{2i} Y_\alpha(\lambda_i \xi^q)), \quad (27b)$$

其中  $\beta_{1i}$  和  $\beta_{2i}$  为与角频率  $\omega_i$  相关的未知系数, 可由方程(24) 得到. 无量纲波型  $\bar{U}_i(\xi)$  形成了一个正交集. 该集合可由方程(18)直接得到, 并满足以下的正交条件:

$$\int_s^1 \rho(\xi) \bar{U}_i(\xi) \bar{U}_j(\xi) 2\pi\xi d\xi = \delta_{ij}, \quad (28)$$

其中  $\delta_{ij}$  为 Kronecker- $\delta$  函数.

由正交条件(28), 可得到方程(27)中的系数  $D_i$  如下:

$$D_i^2 = \frac{1}{\int_s^1 \rho(\xi) \varepsilon_\alpha^2(\lambda_i \xi^q) 2\pi\xi d\xi}. \quad (29)$$

将方程(13)代入方程(11), 并利用  $\bar{u}_{st}(\xi, \tau)$  和  $\bar{u}_{dv}(\xi, \tau)$  的控制方程<sup>[31]</sup>, 可得到以下方程:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{d^2 \Omega_i(\tau)}{d\tau^2} + \omega_i^2 \Omega_i(\tau) \right) \bar{U}_i(\xi) = - \frac{d^2 \bar{u}_{st}(\xi, \tau)}{d\tau^2}. \quad (30)$$

利用正交条件(28), 可得到  $\Omega_i(\tau)$  的常微分控制方程如下:

$$\frac{d^2 \Omega_i(\tau)}{d\tau^2} + \omega_i^2 \Omega_i(\tau) = \frac{d^2 \Phi_i(\tau)}{d\tau^2}, \quad (31a)$$

$$\Phi_i(\tau) = - \int_s^1 \rho(\xi) \bar{u}_{st}(\xi, \tau) \bar{U}_i(\xi) 2\pi\xi d\xi. \quad (31b)$$

现在, 对于给出的初始条件(12), 有必要确定  $\Omega_i(\tau)$  的初始条件. 由方程(13)可得

$$u_0(\xi) = \bar{u}_{st}(\xi, 0) + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{U}_i(\xi) \Omega_i(0), \quad (32a)$$

$$V_0(\xi) = \left[ \frac{d\bar{u}_{st}(\xi, \tau)}{d\tau} + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{U}_i(\xi) \frac{d\Omega_i(\tau)}{d\tau} \right] \Big|_{\tau=0}. \quad (32b)$$

在方程(32a)和(32b)中, 利用正交条件(28)可得

$$\Omega_i(0) = \int_s^1 \rho(\xi) \bar{u}_0(\xi) \bar{U}_i(\xi) 2\pi\xi d\xi + \Phi_i(0), \quad (33a)$$

$$\frac{d\Omega_i(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \int_s^1 \rho(\xi) \bar{V}_0(\xi) \bar{U}_i(\xi) 2\pi\xi d\xi + \frac{d\Phi_i(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0}. \quad (33b)$$

因此, 在初始条件(33)下, 方程(31)的解为<sup>[31]</sup>



$$\Omega_i(\tau) = \Omega_i(0) \cos \omega_i \tau + \frac{1}{\omega_i} \left. \frac{d\Omega_i(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} \sin \omega_i \tau + \frac{1}{\omega_i} \int_0^\tau \frac{d^2 \Phi_i(\kappa)}{d\kappa^2} \sin \omega_i(\tau - \kappa) d\kappa. \quad (34)$$

最后,通过寻求准静力部分和动力部分,由方程(13)可得到无量纲动力径向位移的解。

## 2 数值结果

利用上述的弹性动力学解,求得径向位移和应力的计算程序可以简化如下:

- 1) 利用方程(17)确定无量纲准静力径向位移;
  - 2) 利用方程(26)数值计算出共振频率,再由方程(24)、(27)和(29)确定相应的系数和波型;
  - 3) 利用方程(34)计算出无量纲时变系数函数  $\Omega_i(\tau)$ ;
  - 4) 利用方程(13)计算出无量纲动力径向位移,再由方程(4)和(5)求出应力分量。
- 在数值计算中,用有限个波型  $m$  来表示方程(13)给出的解:

$$\bar{u}(\xi, \tau) = \bar{u}_{st}(\xi, \tau) + \bar{u}_{dy}(\xi, \tau) = \bar{u}_{st}(\xi, \tau) + \sum_{i=1}^m \bar{U}_i(\xi) \Omega_i(\tau). \quad (35)$$

首先,为了研究所提出精确解的有效性,考虑一完全各向同性的铝制中空圆柱体。因此,方程(2a)和(2b)中幂律函数的指数等于0( $n_1 = n_2 = 0$ )。在内表面上作用动压力,满足以下方程<sup>[20]</sup>:

$$P(t) = P_0(1 - e^{-c_0 t}), \quad (36)$$

其中  $P_0$  和  $c_0$  为常数,分别假设为 20 MPa 和  $10^5 \text{ s}^{-1}$ 。图 1 描述了在相当长一段时间后,径向位移沿厚度的分布,并与 Shahabian 等<sup>[20]</sup>给出的数值方法相比较。可以看出,两者显示出很好的一致性。

本节将给出 3 个例子来阐述任意厚度的 FGM 中空圆柱体在不同动荷载下,弹性动力学响应的变化。例 1 中,FGM 圆柱体的内表面受到一均布短期脉冲压力作用。同时研究了该圆柱体无负载时的振动和瞬态应力分析。例 2 中,在另一个 FGM 圆柱体内表面上施加一指数型荷载,研究壁厚的变化对其弹性动力学响应的影响。例 3 中,对一外表面受阶跃荷载作用的 FGM 圆柱体,研究其瞬态性能和应力分析。在每个例子中,这些 FGM 圆柱体的弹性动力学解都包括以下两个过程。首先,为了简化分析,假设指数  $n_1$  和  $n_2$  相等。其次,假设圆柱体的外表面为纯氧化铝 ( $E_{\text{Al}_2\text{O}_3} = 380 \text{ GPa}$ ,  $\rho_{\text{Al}_2\text{O}_3} = 3800 \text{ kg/m}^3$ ),内表面为纯铝 ( $E_{\text{Al}} = 70 \text{ GPa}$ ,  $\rho_{\text{Al}} = 2707 \text{ kg/m}^3$ ),材料性能由内表面到外表面随厚度按方程(2)呈梯度变化。为了确保所需的计算精度,3 个例子均取波型数  $m = 100$ 。

**例 1** 考虑一内径  $a = 1 \text{ m}$ 、外径  $b = 1.2 \text{ m}$  的无限长中空 FGM 圆柱体。外表面由纯氧化铝制成,  $E_0 = 380 \text{ GPa}$  ( $C_{10} = 511.54 \text{ GPa}$ ,  $C_{20} = 219.23 \text{ GPa}$ ),  $\rho_0 = 3800 \text{ kg/m}^3$ 。该 FGM 圆柱体的内表面受到一均布短期脉冲压力作用,表示为如下方程:

$$p_1(t) = \begin{cases} p^* t, & 0 < t \leq t_0, \\ 0, & t > t_0, \end{cases} \quad (37a)$$

$$p_2(t) = 0, \quad (37b)$$

其中  $p^*$  和  $t_0$  分别取  $4 \text{ GPa/s}$  和  $0.005 \text{ s}$ 。图 2 给出了不同幂律指数值下,壁厚中心点径向位移

的时程比较。幂律指数值对径向位移幅值有着直接的影响。可以清楚地看出,在  $t = 0.005$  s 时卸载后,FGM 圆柱体开始自由振动,且由于未考虑结构阻尼,振幅并不减小。图 3 和图 4 分别对比了在刚卸载后,幂律指数相等和不同这两种情况下,壁厚中心点的径向应力值。显然,对圆柱体来讲,卸载相当于一个反向脉冲作用,径向应力波沿厚度传播。径向应力的幅值随幂律指数  $n$  的增加而增加。由方程(10)及图 3 和图 4 可以直接得知,当假设  $n_1$  和  $n_2$  相等时,径向应力波速  $c$  为常数,而当这  $n_1$  和  $n_2$  不相等时,径向应力波速随着位置而定。因此,在 FGM 圆柱体的设计过程中,选择合适的材料性能,将可以对径向应力波速加以控制。图 5 给出了不同幂律指数值下,中空 FGM 圆柱体壁厚中心点环向应力的时程。

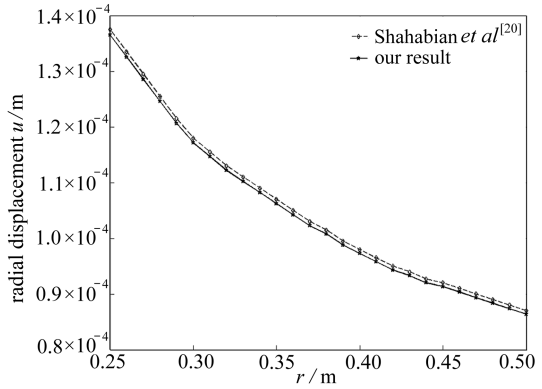


图 1 在相当长一段时间后,径向位移沿厚度的分布 (与文献[20]的数值方法对比)

Fig. 1 Comparing the distribution of the radial displacement along the thickness for a relatively long time with the results reported in [20]

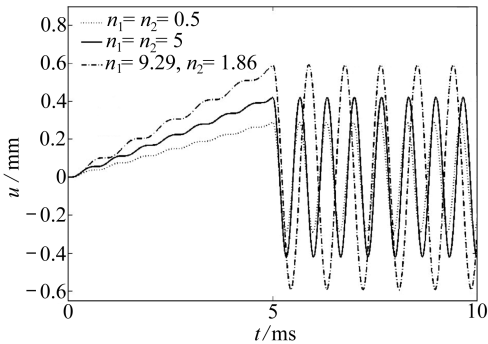


图 2 不同幂律指数下,壁厚中心点径向位移的时程

Fig. 2 Time histories of the radial displacement at the middle point of the thickness for various values of power law exponents

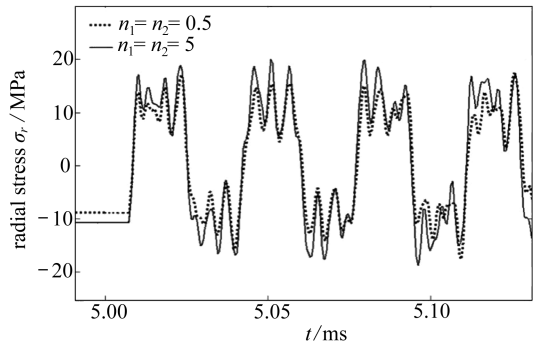


图 3 在刚卸载后,相同幂律指数下,壁厚中心点径向应力的时程

Fig. 3 Time histories of the radial stress at the middle point of the cylinder thickness for the same values of the power law exponents, immediately after unloading

**例 2** 考虑一厚度为  $b - a = 0.5$  ( $a = 1$  m,  $b = 1.5$  m) 的 FGM 圆柱体,在内边界表面上受到一指数型的均布动压力荷载作用。因此,内/外边界表面上外加压力的无量纲时程可分别表示为

$$\bar{p}_1(\tau) = 0.001(1 - e^{-c_0\tau}), \tag{38a}$$

$$\bar{p}_2(\tau) = 0, \tag{38b}$$

其中  $c_0$  为常数,并假设取 0.1。

图 6 给出了当  $\tau = 3$  时,不同幂律指数下,无量纲径向位移沿厚度的分布。幂律指数对径向位移幅值有着直接影响。对于一厚度为 0.5 m 的氧化铝-铝 FGM 圆柱体,计算出其幂律指数为  $n_1 = 4.17$  和  $n_2 = 0.836$ 。图 7 给出了 FGM 不同组合时,中空圆柱体壁厚中心点径向位移的无量纲时程。



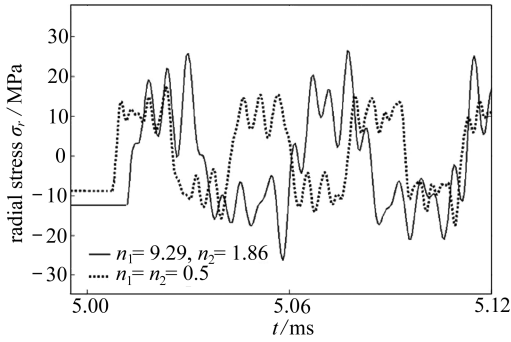


图4 在刚卸载后,相同/不同幂律指数下,壁厚中心点径向应力的历程

Fig.4 Time histories of the radial stress at the middle point of the cylinder thickness for the same and different values of the power law exponents, immediately after unloading

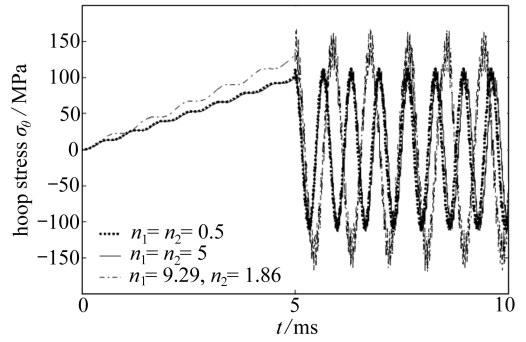


图5 幂律指数变化时,圆柱体壁厚中心点环向应力的历程

Fig.5 Time histories of the hoop stress at the middle point of the cylinder thickness for various values of the power law exponents

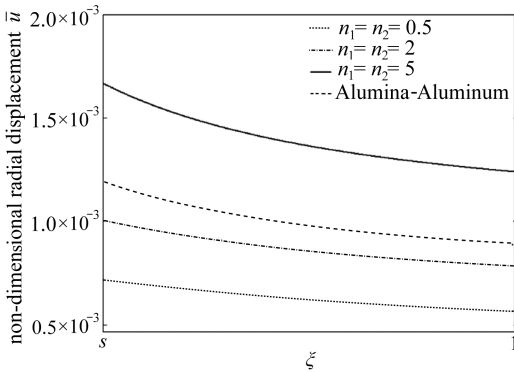


图6 当 \$\tau = 3\$ 时,不同幂律指数下,无量纲径向位移沿厚度方向的分布

Fig.6 Distribution of the non-dimensional radial displacement through the thickness for various values of the power law exponents at time \$\tau = 3\$

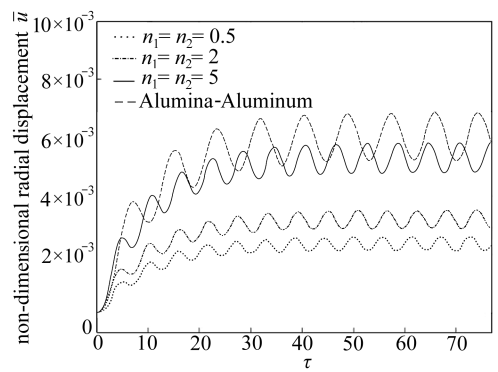


图7 FGM不同组合时,中空圆柱体壁厚中心点径向位移的无量纲历程

Fig.7 Time histories of the non-dimensional radial displacement at the middle point of various thick hollow FGM cylinders

图8对比了幂律指数  $n = n_1 = n_2 = 0.5$  时,中空 FGM 圆柱体壁厚不同点处无量纲径向应力的历程.可以看出,内外表面上的径向应力分别与外加动压力  $\bar{p}_1(\tau)$  和  $\bar{p}_2(\tau)$  相等.图9给出了当  $\tau = 3$ ,幂律指数变化时,FGM 圆柱体无量纲径向应力沿壁厚的分布.可以看出,幂律指数对内外壁面间沿壁厚各点的径向应力幅值有着直接影响.图10给出了幂律指数变化时,中空 FGM 圆柱体壁厚中心点处无量纲径向应力的历程.如前所述,幂律指数对中空 FGM 圆柱体壁厚中心点的径向应力幅值有着直接影响.图11给出了 FGM 不同组合时,中空圆柱体壁厚中心点处无量纲环向应力的历程.

例3 考虑一厚度为  $b - a = 1$  m ( $a = 1$  m,  $b = 2$  m) 的厚壁 FGM 圆柱体,研究其外表面上突然作用有阶跃荷载时的瞬态响应.那么,作用在内外壁面上荷载的历程可以表示如下:

$$\bar{p}_1(\tau) = 0, \quad (39a)$$

$$\bar{p}_2(\tau) = 0.001H(\tau), \quad (39b)$$

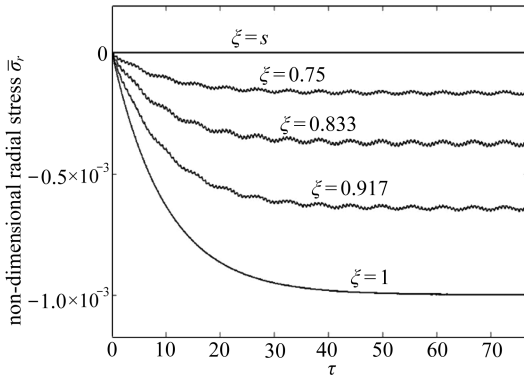


图 8 幂律指数  $n = n_1 = n_2 = 0.5$  时,中空 FGM 圆柱体壁厚不同点的无量纲径向应力的时程  
 Fig. 8 Time histories of the non-dimensional radial stress at different points of the hollow FGM cylinder along the thickness in a certain power law exponent  $n = n_1 = n_2 = 0.5$

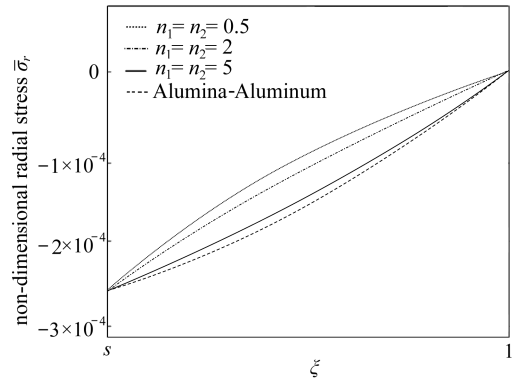


图 9 当  $\tau = 3$ , 幂律指数变化时,FGM 圆柱体无量纲径向应力沿壁厚的分布  
 Fig. 9 Distribution of the non-dimensional radial stress across the thickness of the FGM cylinder for various values of the power law exponents at time  $\tau = 3$

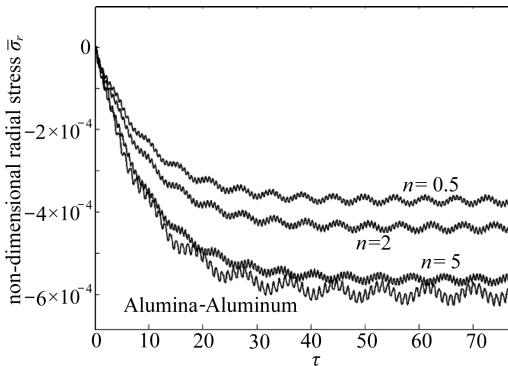


图 10 不同幂律指数下,中空 FGM 圆柱体壁厚中心点处无量纲径向应力的时程  
 Fig. 10 Time histories of the non-dimensional radial stress at the middle point of the thick hollow FGM cylinder for various values of the power law exponents

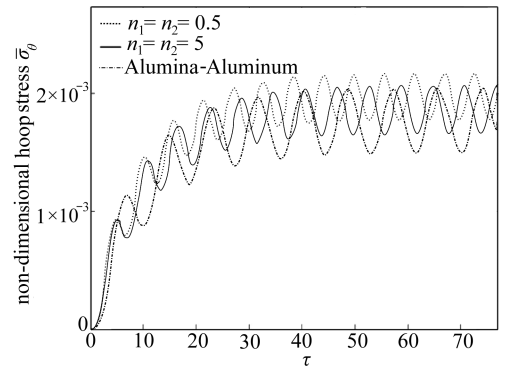


图 11 FGM 不同组合时,中空圆柱体壁厚中心点处无量纲环向应力的时程  
 Fig. 11 Time histories of the non-dimensional hoop stress at the middle points of various thick hollow FGM cylinders

其中  $H(\tau)$  为无量纲 Heaviside 阶跃函数。

图 12 给出了幂律指数  $n = n_1 = n_2 = 0.5$  时,中空 FGM 圆柱体壁厚不同点处径向位移的无量纲时程。可以清楚地看到,尽管荷载作用在外壁面上,但由于 FGM 圆柱体的分布,外壁面附近的径向位移幅值比内壁面小。图 13 对比了幂律指数变化时,中空 FGM 圆柱体壁厚中心点处无量纲径向位移的时程。对于厚度为 1 m 的氧化铝-铝 FGM 圆柱体,确定其幂律指数为  $n_1 = 2.44$ ,  $n_2 = 0.49$ 。图 14 给出了 FGM 不同组合时,中空圆柱体壁厚中心点处无量纲径向应力的时程。可以看出,当  $n_1$  和  $n_2$  相等时,径向应力波速  $c$  为常数,因为当  $n_1$  和  $n_2$  不相等时,径向应力波的传播速度随位置而定。图 15 给出了幂律指数变化时,中空 FGM 圆柱体壁厚中心点处无量纲环向应力的时程。

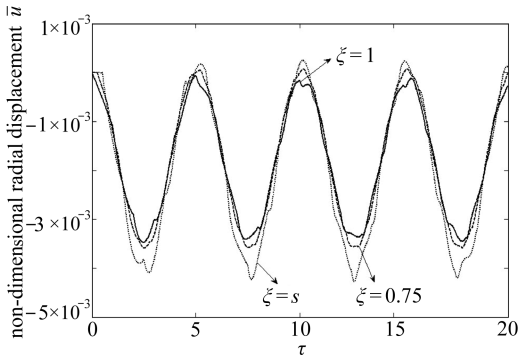


图 12 幂律指数  $n = n_1 = n_2 = 0.5$  时, 中空 FGM 圆柱体壁厚不同点处径向位移的无量纲时程

Fig. 12 Time histories of the non-dimensional radial displacement at different points of the thick hollow FGM cylinder along the thickness for certain power law exponent  $n = n_1 = n_2 = 0.5$

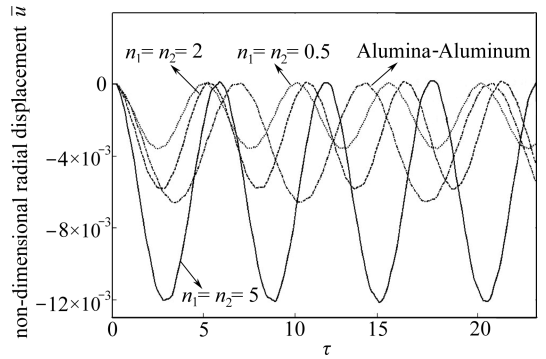


图 13 幂律指数变化时, 中空 FGM 圆柱体壁厚中心点处无量纲径向位移的时程

Fig. 13 Time histories of the non-dimensional radial displacement at the middle point of the thick hollow FGM cylinder with various power law exponents

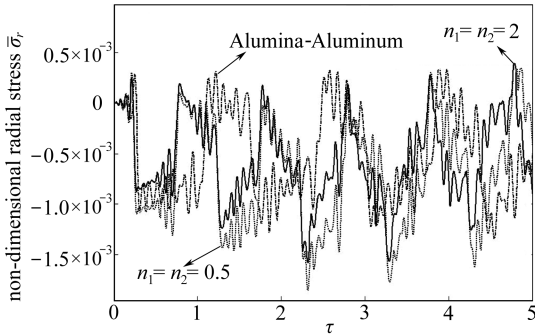


图 14 FGM 不同组合时, 中空圆柱体壁厚中心点处无量纲径向应力的时程

Fig. 14 Time histories of the non-dimensional radial stress at the middle point of various thick hollow FGM cylinders

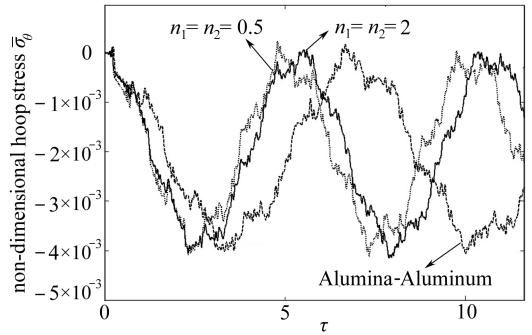


图 15 幂律指数变化时, 中空 FGM 圆柱体壁厚中心点处无量纲环向应力的时程

Fig. 15 Time histories of the non-dimensional hoop stress at the middle points of various thick hollow FGM cylinders

### 3 结 论

本文研究了边界表面上作用有均布动压力的厚壁中空 FGM 圆柱体, 给出了其平面应变响应的弹性动力学解. 材料性能按幂律函数随厚度而变化. 所给出的精确解有很多优势. 首先, 不同于文献[12, 14, 18]的多层次方法, 本文在分析厚壁中空 FGM 圆柱体时, 采用的是简单的单层次方法. 该方法就不再像多层次方法需要满足界面的连续性条件. 从而, 计算时间大大地减少. 进一步地, 通过在弹性模量和质量密度的计算中取不同的指数值, 厚壁中空 FGM 圆柱体的材料性能得到控制, 并且可以对不同应用领域中的圆柱体, 采用不同组合的 FGM. 本文将问题分为准静力部分和动力部分, 分别给出了解析解. 这更易于得到闭式解. 此外, 本文所提出的方法, 适用于中空 FGM 圆柱体有任意厚度, 以及任意的初始条件和壁面上承受任意形式的动力学荷载.

## 参考文献:

- [1] Hirai T. Functional gradient materials[C]// Brook R J. *Processing of Ceramics, Part 2*. Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers, 1996.
- [2] Suresh S, Mortensen A. *Fundamentals of Functionally Graded Materials*[M]. London: IOM Communications, 1998.
- [3] Zimmerman R W, Lutz M P. Thermal stresses and effective thermal expansion in a uniformly heated functionally graded cylinder[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 1999, **22**(2): 177-188.
- [4] Jabbari M, Sohrabpour S, Eslami M R. Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads[J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2002, **79**(7): 493-497.
- [5] Shao Z S. Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length[J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2005, **82**(3): 155-163.
- [6] Xiang H J, Shi Z F, Zhang T T. Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders[J]. *Mechanics Research Communications*, 2006, **33**(5): 681-691.
- [7] Tutuncu N. Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties[J]. *Engineering Structures*, 2007, **29**(9): 2032-2035.
- [8] Chen Y Z, Lin X Y. Elastic analysis for thick cylinders and spherical pressure vessels made of functionally graded materials[J]. *Computational Materials Science*, 2008, **44**(2): 581-587.
- [9] Li X F, Peng X L. A pressurized functionally graded hollow cylinder with arbitrary varying material properties[J]. *Journal of Elasticity*, 2009, **96**(1): 81-95.
- [10] Tutuncu N, Temel B. A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres[J]. *Composite Structures*, 2009, **91**(3): 385-390.
- [11] Dai H L, Xiao X, Fu Y M. Analytical solutions of Stresses in functionally graded piezoelectric hollow structures[J]. *Solid State Communications*, 2010, **150**(15/16): 763-767.
- [12] Chen Y Z, Lin X Y. An alternative numerical solution of thick-walled cylinders and spheres made of functionally graded materials[J]. *Computational Materials Science*, 2010, **48**(3): 640-647.
- [13] Han X, Liu G R, Xi Z C, Lam K Y. Transient waves in a functionally graded cylinder[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**(17): 3021-3037.
- [14] Elmaimouni L, Lefebvre J E, Zhang V, Gryba T. Guided waves in radially graded cylinders: a polynomial approach[J]. *NDT and E International*, 2005, **38**(5): 344-353.
- [15] Shakeri M, Akhlaghi M, Hoseini S M. Vibration and radial wave propagation in functionally graded thick hollow cylinder[J]. *Composite Structures*, 2006, **76**(1/2): 174-181.
- [16] Bahtui A, Eslami M R. Coupled thermoelasticity of functionally graded cylindrical shells[J]. *Mechanics Research Communications*, 2007, **34**(1): 1-18.
- [17] Hoseini S M, Akhlaghi M, Shakeri M. Dynamic response and radial wave propagation velocity in thick hollow cylinders made of functionally graded materials[J]. *Engineering Computations*, 2007, **24**(3): 288-303.
- [18] Shariyat M. A nonlinear Hermitian transfinite element method for transient behavior analysis of hollow functionally graded cylinder with temperature-dependent materials under thermo-mechanical loads[J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2009, **86**(4): 280-289.

- [19] Asgari M, Akhlaghi M. Transient thermal stresses in two-dimensional functionally graded thick hollow cylinder with finite length[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2009, **80**(4): 353-376.
- [20] Shahabian F, Hosseini S M. Stochastic dynamic analysis of a functionally graded thick hollow cylinder with uncertain material properties subjected to shock loading[J]. *Materials and Design*, 2010, **31**(2): 894-901.
- [21] Hosseini S M, Akhlaghi M, Shakeri M. Transient heat conduction in functionally graded thick hollow cylinder by analytical method[J]. *Heat and Mass Transfer*, 2007, **43**(7): 669-675.
- [22] Babaei M H, Chen Z T. Analytical solution for the electromechanical behavior of a rotating functionally graded piezoelectric hollow shaft[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2008, **78**(7): 489-500.
- [23] Yue Z Q, Yin X C. Transient plane-strain response of multilayered elastic cylinders to axisymmetric impulse[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2002, **69**(6): 825-835.
- [24] Wang H M, Ding H J, Chen Y M. Dynamic solution of a multilayered orthotropic piezoelectric hollow cylinder for axisymmetric plane strain problems[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, **42**(1): 85-102.
- [25] Bayat M, Sahari B B, Saleem M, Hamouda A M S, Reddy J N. Thermo elastic analysis of functionally graded rotating disks with temperature-dependant materials properties: uniform and variable thickness[J]. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2009, **5**(3): 263-279.
- [26] Hou P F, Wang H M, Ding H J. Analytical solution for axisymmetric plane strain electroelastic dynamics of a special non-homogenous piezoelectric hollow cylinder[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2003, **41**(16): 1849-1868.
- [27] Dai H L, Fu Y M. Magnetoelastostatic interactions in hollow structures of functionally graded material subjected to dynamic loads[J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2007, **84**(3): 132-138.
- [28] Yu J G, Wu B, Chen G Q. Wave characteristics in functionally graded piezoelectric hollow cylinders[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2008, **79**(9): 807-824.
- [29] Yin X C. Multiple impacts of two concentric hollow cylinders with zero clearance[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, **34**(35/36): 4597-4616.
- [30] Yin X C, Wang L G. The effect of multiple impacts on the dynamics of an impact system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, **228**(5): 995-1015.
- [31] Eringen A C, Suhubi E S. *Elastodynamics*[M]. Linear Theory. Vol 2. New York: Academic Press, 1975: 440-441.
- [32] Hough L A E. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*[M]. New York: Dover, 1944.
- [33] Rade L, Westergren B. *Mathematics Handbook for Science and Engineering*[M]. 5th ed. Berlin: Springer-Verlag, 2004.
- [34] Gurtin M E. *The Linear Theory of Elasticity, Mechanics of Solids*[M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1984: 270.

# Elastodynamic Solution for Plane-Strain Response of Functionally Graded Thick Hollow Cylinders by Analytical Method

Mehdi Nikkhah, Farhang Honarvar, Ehsan Dehghan

(Faculty of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran)

**Abstract:** An elastodynamic solution for the plane-strain response of functionally graded thick hollow cylinders subjected to uniformly-distributed dynamic pressures at the boundary surfaces, was presented. The material properties, except Poisson's ratio, were assumed to vary through the thickness following a power law function. To achieve an exact solution, the dynamic radial displacement was divided into two quasi-static and dynamic parts. For each part, an analytical solution was derived. Firstly, the quasi-static solution was obtained by means of Euler's equation, and then the dynamic solution was derived by utilizing the separation of variables method and the orthogonal expansion technique. Radial displacement and stress distributions were plotted for various FGM hollow cylinders under different dynamic loads and the advantages of the presented method were discussed. The presented analytical solution was suitable for analyzing various arrangements of FGM hollow cylinders with arbitrary thickness and arbitrary initial conditions, subjected to arbitrary form of dynamic pressures distributed uniformly at the boundary surfaces. Finally, radial displacement and stress distributions were plotted for various FGM hollow cylinders under different dynamic loads and the advantages of the presented method were considered.

**Key words:** functionally graded materials; elastodynamic solution; hollow cylinders; power law function