

# 带裂纹三点弯曲试样的动态 应力强度因子分析\*

陈爱军, 曹俊俊

(南京理工大学 理学院,南京 210094)

(王银邦推荐)

**摘要:** 提出了计算带单边裂纹三点弯曲试样动态应力强度因子的新方法. 首先由权函数的普遍形式和两种参考载荷下的应力强度因子,得到了带单边裂纹三点弯曲试样的权函数,然后考虑试样的转动惯性和剪切变形,根据振动理论推导出无裂纹梁内的动应力响应和分布,最后由权函数的思想推导出了带裂纹三点弯曲试样动态应力强度因子公式. 通过有限元数值计算,验证了该方法的正确性,结果比较表明公式具有较高的精度. 另外,还研究了冲击载荷下三点弯曲试样的动态应力强度因子随裂纹长度和加载速率的变化规律.

**关键词:** 裂纹; 动态应力强度因子; 权函数法; 三点弯曲试样; 加载速率

**中图分类号:** O346.1; O347.1      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.02.007

## 引 言

在动态断裂力学的理论分析和实验研究中,普遍采用三点弯曲试样. 在动态断裂问题的研究中,由于要考虑惯性效应和应力波传播效应,使问题变得更加复杂. 所以,即使像三点弯曲梁这样简单的试样,其裂纹尖端的动态应力强度因子解析解至今也还未得到. 当然,可以利用有限元法或边界元法对试样进行完全的动态分析,以得到动态应力强度因子的响应规律,但这种方法要花费大量的机时进行计算,不便于实验结果的实时处理. 另外,也可以采用动光弹或焦散线等光学的方法来确定动态应力强度因子的变化历史,但这种方法对非光学材料的测试存在许多困难,且需要昂贵的光学仪器<sup>[1-3]</sup>.

针对上面的情况,人们发展了一些动态应力强度因子的近似解法,以满足三点弯曲试样的理论和实验工作需要. 例如,Nash<sup>[4]</sup>给出的凹槽梁试样动态应力强度因子的经典模型,由于没有考虑冲击速度对试样中点位移的影响,仅适用于低速冲击. Williams<sup>[5]</sup>和李玉龙等<sup>[6]</sup>给出了单自由度的弹簧质量模型公式,该方法使计算大为简化,但是没有考虑试样的转动惯性和剪切变形的影响. 刘瑞堂、姜春风等研究者<sup>[1,7]</sup>考虑了冲击速度、梁的转动惯性和剪切变形影响,给出了一个带裂纹凹槽梁试样的动态应力强度因子公式,但公式仍然是建立在单自由度模型的基础上.

\* 收稿日期: 2010-07-29; 修订日期: 2010-12-28

基金项目: 中国一航航空推进技术验证计划(APTD-1104-02)

作者简介: 陈爱军(1972—),男,江西人,副教授,博士(联系人. E-mail:chen721010@sina.com).

不同于上述的研究,本文采用权函数理论给出了计算跨中带裂纹三点弯曲试样的动态应力强度因子的新方法,并且研究了不同加载速率下动态应力强度因子的变化规律性。

## 1 冲击载荷下带裂纹三点弯曲试样动态应力强度因子的权函数法

对于二维问题,如果带裂纹深度为  $a$  的线弹性结构,在某一对称的载荷系统下 I 型裂纹的应力强度因子  $K_r$  和裂纹面上的张开位移  $U_r$  均是已知量.那么该弹性结构体在其它对称的载荷系统下,裂纹尖端处的应力强度因子  $K_{\text{new}}$  可由下式得到<sup>[8-9]</sup>

$$K_{\text{new}} = \int_0^a \sigma_{\text{new}} h(a, x) dx, \quad (1)$$

其中,  $\sigma_{\text{new}}$  为该弹性体无裂纹时在  $K_{\text{new}}$  相关的载荷下裂纹面部位处的应力;  $h(a, x)$  称为权函数,其计算式

$$h(a, x) = H \frac{\partial U_r}{\partial a} \frac{1}{K_r}, \quad (2)$$

式中,系数  $H$ ,在平面应力时  $H = E$ ,平面应变时  $H = E/(1 - \mu^2)$ ;  $E$  和  $\mu$  分别为材料的弹性模量和 Poisson 比。

Glinka 和 Shen 提出,对于各种一维的 I 型裂纹问题,权函数可采用下述的近似表达式<sup>[10]</sup>:

$$h(a, x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sqrt{a-x}} \left[ 1 + M_1 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1/2} + M_2 \left(1 - \frac{x}{a}\right) + M_3 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{3/2} \right], \quad (3)$$

式中,  $M_i (i = 1, 2, 3)$  为参数,只取决于裂纹体自身的几何结构。

由式(3)可知,求解带裂纹某一几何结构的权函数,就转化为确定参数  $M_i (i = 1, 2, 3)$  的问题. Fett 等<sup>[11]</sup>指出单边裂纹问题,由于在裂纹开口位置表面处无应力,相应裂纹口处裂纹面的曲率为 0. 故在  $x = 0$  处,权函数的二阶导数为 0:

$$\left. \frac{\partial^2 h(a, x)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \quad (4)$$

可以导出  $M_2 = 3$ <sup>[11-12]</sup>. 由式(4),三点弯曲试样的权函数可以表示为

$$h(a, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ (a-x)^{-1/2} + \frac{M_1}{\sqrt{a}} + \frac{3}{a} (a-x)^{1/2} + \frac{M_3}{a^{3/2}} (a-x) \right]. \quad (5)$$

本文选取均布载荷(如图 1)和线性减少载荷(如图 2)作为两种参考载荷,来确定未知参数  $M_1$  和  $M_3$ .

$$\sigma_{r1}(x) = \sigma_0, \quad \sigma_{r2}(x) = \sigma_0 \left(1 - \frac{2}{W} x\right), \quad (6)$$

式中,  $\sigma_0$  为某一给定值。

如图 1,在均布载荷  $\sigma_{r1}$  下,裂纹尖端处的应力强度因子为<sup>[13]</sup>

$$K_{r1} = \alpha \sigma_0 \sqrt{\pi a}, \quad (7)$$

式中,系数  $\alpha$  为

$$\alpha = 1.12 + \left[ -0.231 \left(\frac{a}{W}\right) + 10.55 \left(\frac{a}{W}\right)^2 - 21.72 \left(\frac{a}{W}\right)^3 + 30.39 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right].$$

如图 2,在线性变化载荷  $\sigma_{r2}$  下,裂纹尖端处的应力强度因子为<sup>[13]</sup>

$$K_{r2} = F \sigma_0 \sqrt{\pi a}, \quad (8)$$

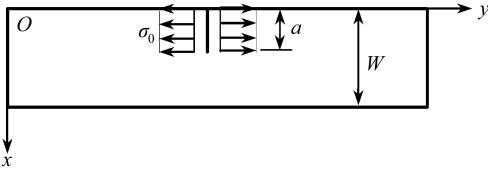


图1 均布载荷下带裂纹梁示意图

Fig.1 Constant crack face pressure stress field

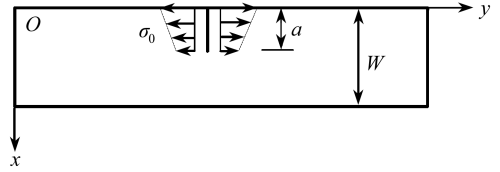


图2 线性变化载荷下带裂纹梁示意图

Fig.2 Linearly decreasing crack face pressure stress field

式中,系数  $F$  为

$$F = 1.122 - 1.40\left(\frac{a}{W}\right) + 7.33\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 13.08\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 14.0\left(\frac{a}{W}\right)^4.$$

把式(5)和(6)代入式(1),有

$$K_{r1} = \int_0^a \sigma_{r1} h(a, x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_0 \left[ 4\sqrt{a} + M_1\sqrt{a} + \frac{M_3}{2}\sqrt{a} \right], \tag{9}$$

$$K_{r2} = \int_0^a \sigma_{r2} h(a, x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_0 \left[ \left(1 - \frac{2a}{W}\right) 4\sqrt{a} + \frac{56}{15W} a^{3/2} \right] + M_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_0 \left[ \left(1 - \frac{2a}{W}\right) \sqrt{a} + \frac{a^{3/2}}{W} \right] + M_3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_0 \left[ \left(1 - \frac{2a}{W}\right) \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{2}{3W} a^{3/2} \right]. \tag{10}$$

引入下列符号:

$$\begin{cases} A_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 4\sqrt{a}, B_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{a}, C_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{a}}{2}, \\ D_1 = \sqrt{\pi} \left( 1.12a^{1/2} - \frac{0.231}{W} a^{3/2} + \frac{10.55}{W^2} a^{5/2} - \frac{21.72}{W^3} a^{7/2} + \frac{30.39}{W^4} a^{9/2} \right), \\ A_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \left(1 - \frac{2a}{W}\right) 4\sqrt{a} + \frac{56}{15W} a^{3/2} \right], B_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \left(1 - \frac{2a}{W}\right) \sqrt{a} + \frac{a^{3/2}}{W} \right], \\ C_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \left(1 - \frac{2a}{W}\right) \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{2}{3W} a^{3/2} \right], \\ D_2 = \sqrt{\pi} \left( 1.122a^{1/2} - \frac{1.4}{W} a^{3/2} + \frac{7.33}{W^2} a^{5/2} - \frac{13.08}{W^3} a^{7/2} + \frac{14.0}{W^4} a^{9/2} \right). \end{cases} \tag{11}$$

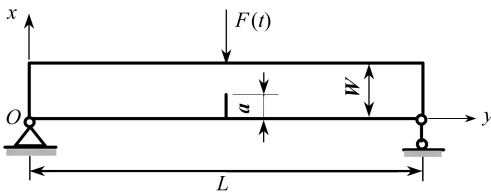


图3 跨中带裂纹三点弯曲试样的示意图

Fig.3 Three-point bending beam containing crack in the middle section

把式(7)和(8)代入式(9)和(10),可得

$$\begin{cases} M_1 = \frac{(D_1 - A_1)C_2 - (D_2 - A_2)C_1}{B_1C_2 - B_2C_1}, \\ M_2 = 3, \\ M_3 = \frac{(D_1 - A_1)B_2 - (D_2 - A_2)B_1}{B_2C_1 - B_1C_2}. \end{cases} \tag{12}$$

将式(12)代入式(5),可以得到跨中带裂纹三点弯曲试样的权函数  $h(a, x)$ 。

根据权函数的理论,图3所示带裂纹三点弯曲试样的动态应力强度因子可以表示成如下的形式<sup>[8,14]</sup>:

$$K_{Ia}(a,t) = \int_0^a \sigma_d(x,t)h(a,x)dx, \quad (13)$$

其中,  $\sigma_d(x,t)$  表示冲击载荷下无裂纹梁在对应裂纹位置处动应力的响应和分布。

## 2 冲击载荷下无裂纹三点弯曲试样的动态响应

冲击载荷下,无裂纹三点弯曲试样如图4。根据振动理论,考虑试样的转动惯性和剪切变形,简支梁的固有频率  $\omega_r$  的方程和梁的振型函数  $\phi_r$  可以表示为<sup>[15]</sup>

$$\begin{cases} EI \left( \frac{i\pi}{L} \right)^4 - \rho A \omega_r^2 - \rho I \left( 1 + \frac{E}{kG} \right) \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 \omega_r^2 + \frac{\rho^2 I \omega_r^4}{kG} = 0, \\ \phi_r(y) = \sin \frac{r\pi y}{L} \quad (r = 1, 2, \dots), \end{cases} \quad (14)$$

式中,  $E, G$  和  $\rho$  分别为材料的弹性模量、剪切弹性模量和密度;  $L, A$  和  $I$  分别为梁的跨度、截面积和横截面对中心主轴的惯性矩;  $k$  为截面形状的常数,对于矩形截面,  $k = 2/3$ 。

由振型函数  $\phi_r(y)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 的正则化,可得

$$\alpha_r^2 \int_0^L \rho A \phi_r^2(y) dy = 1 \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (15)$$

将式(14)代入式(15),则有

$$\alpha_r^2 = 1 / \left( \rho A \int_0^L \sin^2 \frac{r\pi y}{L} dy \right) = \frac{2}{\rho A L}.$$

正则化的振型函数为

$$Y_r(y) = \sqrt{\frac{2}{\rho A L}} \sin \frac{r\pi y}{L} \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (16)$$

作用于跨中截面处的动载荷  $F(t)$  可表示为

$$f(y,t) = F(t) \delta(y - y_1), \quad (17)$$

式中,  $\delta(y - y_1)$  为 Dirac delta 函数,  $y_1 = L/2$ 。

广义坐标  $q_r(t)$  下的运动微分方程,可表示为

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 \dot{q}_r(t) = Q_r(t), \quad (18)$$

其中,  $Q_r(t)$  为广义力:

$$\begin{aligned} Q_r(t) &= \int_0^L f(y,t) Y_r(y) dy = \sqrt{\frac{2}{\rho A L}} \int_0^L F(t) \delta(y - y_1) \sin \frac{r\pi y}{L} dy = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\rho A L}} F(t) \sin \frac{r\pi y_1}{L}. \end{aligned} \quad (19)$$

方程(18)的解可以写成如下的形式:

$$q_r(t) = \frac{1}{\omega_r} \int_0^t Q_r(\tau) \sin \omega_r(t - \tau) d\tau + q_{r,0} \cos \omega_r t + \frac{\dot{q}_{r,0}}{\omega_r} \sin \omega_r t, \quad (20)$$

式中,  $q_{r,0}$  和  $\dot{q}_{r,0}$  分别表示广义坐标和广义速度的初始值。

$q_{r,0}$  和  $\dot{q}_{r,0}$  取值为 0 时,可以得到

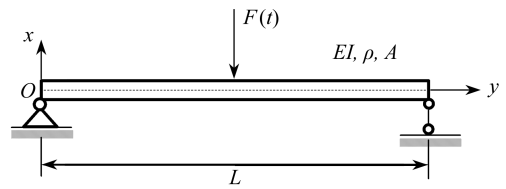


图4 冲击载荷下三点弯曲试样示意图

Fig. 4 Three-point bend specimen under impact load

$$q_r(t) = \frac{1}{\omega_r} \int_0^t Q_r(\tau) \sin \omega_r(t - \tau) d\tau =$$

$$\frac{1}{\omega_r} \sqrt{\frac{2}{\rho AL}} \int_0^t F(\tau) \sin \frac{r\pi y_1}{L} \sin \omega_r(t - \tau) d\tau. \quad (21)$$

根据振型叠加法,系统位移的响应为

$$w(y,t) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r(y) q_r(t) =$$

$$\frac{2}{\rho AL} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_r} \sin \frac{r\pi y}{L} \int_0^t F(\tau) \sin \frac{r\pi y_1}{L} \sin \omega_r(t - \tau) d\tau. \quad (22)$$

梁截面的弯矩可表示为

$$M(y,t) = EI W''(y,t). \quad (23)$$

最后,梁的跨中截面处的动应力响应可以表示为

$$\sigma_d(x,t) = \frac{M(y,t)(x - W/2)}{I} \Big|_{y=L/2}. \quad (24)$$

### 3 数值算例

如图5所示,跨中带裂纹三点弯曲试样受斜坡载荷作用.在计算中,取定梁的跨度  $L=1.5$  m,高度  $W=0.1$  m,材料的密度  $\rho=7800$  kg/m<sup>3</sup>,弹性模量  $E=200$  GPa,载荷  $F_0=5$  kN.

$$F(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{t_1} t & (0 \leq t \leq t_1), \\ F_0 & (t > t_1). \end{cases} \quad (25)$$

将式(25)代入式(12),可得斜坡加载下三点弯曲试样的动态应力强度因子为

$$K_{1d}(a,t) = \int_0^a \sigma_d(t) h(a,x) dx =$$

$$\left\{ \begin{aligned} & - \frac{2\sqrt{2}F_0E\pi^{3/2}}{\rho AL^3 t_1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^2 \pi^2}{\omega_r^2} \sin^2 \frac{\pi r}{2} \left( t - \frac{\sin \omega_r t}{\omega_r} \right) \times \\ & \left[ a^{3/2} \left( \frac{4}{3} + \frac{1}{2} M_1 + \frac{4}{15} M_2 + \frac{1}{6} M_3 \right) - \right. \\ & \left. W\sqrt{a} \left( 1 + \frac{1}{2} M_1 + \frac{1}{3} M_2 + \frac{1}{4} M_3 \right) \right] \quad (0 \leq t \leq t_1), \\ & - \frac{2\sqrt{2}F_0E\pi^{3/2}}{\rho AL^3} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^2 \pi^2}{\omega_r^2} \sin^2 \frac{\pi r}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\omega_r t_1} [\sin \omega_r(t - t_1) - \sin \omega_r t] \right\} \times \\ & \left[ a^{3/2} \left( \frac{4}{3} + \frac{1}{2} M_1 + \frac{4}{15} M_2 + \frac{1}{6} M_3 \right) - \right. \\ & \left. W\sqrt{a} \left( 1 + \frac{1}{2} M_1 + \frac{1}{3} M_2 + \frac{1}{4} M_3 \right) \right] \quad (t > t_1). \end{aligned} \right. \quad (26)$$

首先根据式(14),本文取了梁的前面8阶振动频率  $\omega_i(i=1,2,\dots,8)$  进行计算,梁的第一振型周期  $T_1=2\pi/\omega_1=0.0098$  s.为了便于分析,跨中带裂纹三点弯曲试样在静载  $F_0=5$  kN

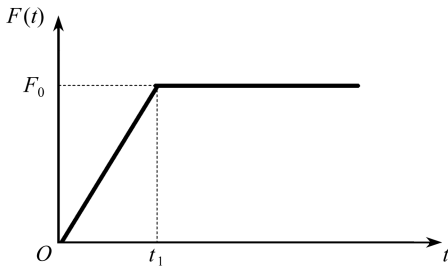


图5 斜坡加载示意图

Fig. 5 The ramp load changing with time

下的应力强度因子  $K_{1st}$ , 列于表 1.

表 1 不同裂纹深度下的  $K_{1st}$   
Table1  $K_{1st}$  versus the depth of crack

$a/W$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$K_{1st}/(\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2})$	5.20	7.42	9.69	12.52	15.80

从图 5 可知, 当  $t_1 = 0$  时, 加载即为阶跃载荷情况. 本文分别计算了阶跃载荷下裂纹深度  $a/W = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  和  $0.5$  情况下动态应力强度因子的响应历程, 分别如图 6 ~ 图 8 所示.

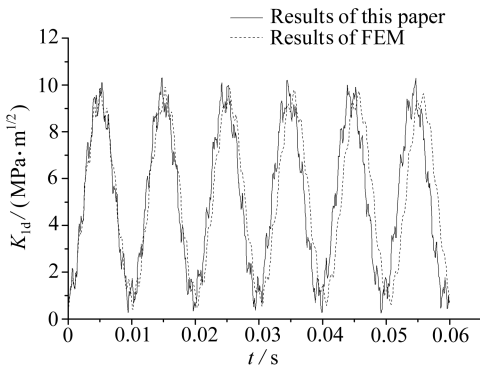


图 6 阶跃载荷下  $a/W = 0.1$  的  $K_{1d}$

Fig. 6 Response of dynamic stress intensity factor for  $a/W = 0.1$

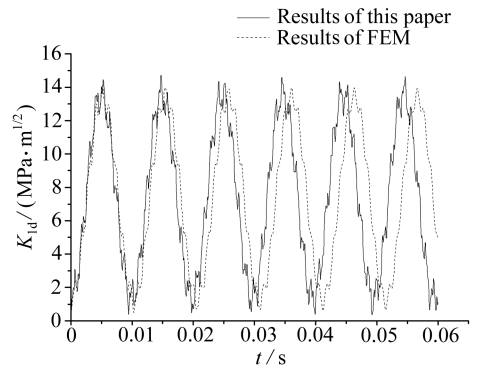


图 7 阶跃载荷下  $a/W = 0.2$  的  $K_{1d}$

Fig. 7 Response of dynamic stress intensity factor for  $a/W = 0.2$

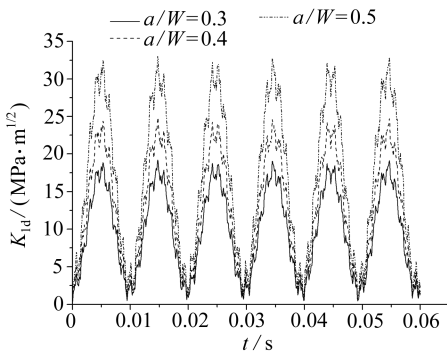


图 8 阶跃载荷下  $a/W$  的  $K_{1d}$

Fig. 8 Response of dynamic stress intensity factor with different depth of cracks

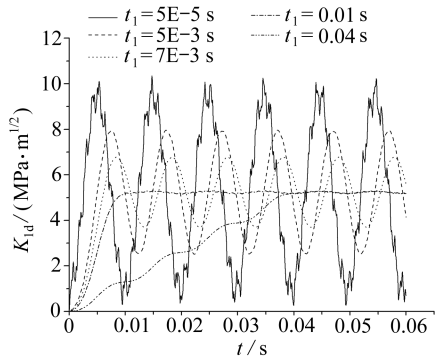


图 9 斜坡载荷下不同加载速率下的  $K_{1d}$

Fig. 9 Response of dynamic stress intensity factor with loading rates

由图 6 和图 7 可见, 本文由权函数方法得到三点弯曲试样的动态应力强度因子的响应与 ANSYS11.0 有限元程序计算结果符合较好, 本文采用的动态应力强度因子计算公式具有较好的精度.

由以上可以看出, 阶跃载荷作用下三点弯曲试样内动态应力强度因子  $K_{1d}$ , 围绕着相应的静载值  $K_{1st}$  随时间  $t$  周期性变化. 计算表明, 动态应力强度因子  $K_{1d}$  的峰值大约出现在  $T_1/2, 3T_1/2, \dots, (2n+1)T_1/2 (n=0, 1, 2, \dots)$  的时刻, 变化周期与梁的第一振型周期  $T_1$  接近, 裂纹深度对动态应力强度因子  $K_{1d}$  的峰值出现时间影响不大. 在不同裂纹深度下, 动态应力强度因子的极小值近似为 0. 随着裂纹深度  $a/W$  的增加,  $K_{1d}$  的峰值显著增加; 动态应力强度因子  $K_{1d}$

的极大值明显高于静载下结果,约为静载下应力强度因子  $K_{Ist}$  的 2 倍。

最后,本文研究了斜坡载荷情况下加载速率对动态应力强度因子的影响。计算中裂纹深度取为  $a/W=0.1$ , 载荷  $F_0=5\text{ kN}$ 。由图 5 可知,加载速率随着时间  $t_1$  的增加而减小。由图 9 可见,当斜坡加载的速率非常大时,动态应力强度因子与阶跃载荷下的结果接近。随着加载速率的减小或  $t_1$  的增加,动态应力强度因子峰值出现的时间逐渐向后延迟,振幅随加载速率的降低而急剧减小。研究表明,加载速率对三点弯曲试样早期阶段的动态应力强度因子具有很大的影响。

## 4 结 论

本文根据权函数法,提出了冲击载荷下三点弯曲试样动态应力强度因子新的计算公式。跨中带单边裂纹三点弯曲试样的权函数是建立在普遍形式的基础上。通过与动态有限元的结果比较表明,本文所给出的公式具有良好的计算精度。权函数方法是一种计算冲击载荷下三点弯曲试样动态应力强度因子的有效手段。

在此基础上,本文研究了动态应力强度因子早期阶段的变化规律。算例分析表明,冲击载荷下的动态应力强度因子  $K_{I,d}$  随时间作周期性变化,裂纹深度和加载速率对三点弯曲试样的动态应力强度因子有很大的影响。

**致谢** 感谢南京理工大学自主科研专项计划(2010GJPY026)对本文的资助。

### 参考文献:

- [1] 刘瑞堂,姜风春,刘殿魁. 三点弯曲试样应力强度因子的动态响应[J]. 应用力学学报, 2001, **18**(3): 116-120. (LIU Rui-tang, JIANG Feng-chun, LIU Dian-kui. History of dynamic stress intensity factor for three-point bending specimen[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2001, **18**(3): 116-120. (in Chinese))
- [2] 钟卫洲,罗景润,徐伟芳,郭历伦. 三点弯曲试样动态应力强度因子计算研究[J]. 实验力学, 2005, **20**(4): 601-604. (ZHONG Wei-zhou, LUO Jing-run, XU Wei-fang, GUO Li-lun. A computational study on dynamic stress intensity factor of three-point bending specimen[J]. *Journal of Experimental Mechanics*, 2005, **20**(4): 601-604. (in Chinese))
- [3] Loya J A, Fernandez-Saez J. Three-dimensional effects on the dynamic fracture determination of Al 7075-T651 using TPB specimens[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, **45**(8): 2203-2219.
- [4] Nash G E. An analysis of the forces and bending moments during the notched beam impact test[J]. *International Journal of Fracture Mechanics*, 1969, **5**(4): 259-268.
- [5] Williams J G. The analysis of dynamic fracture using lumped mass-spring mode[J]. *International Journal of Fracture*, 1987, **33**(1): 47-59.
- [6] 李玉龙,刘元镛. 用弹簧质量模型求解三点弯曲试样的动态应力强度因子[J]. 固体力学学报, 1994, **15**(1): 75-79. (LI Yu-long, LIU Yuan-yong. Determination of dynamic stress intensity of specimen of three points bending by spring-mass model[J]. *Acta Mechanica Solid Sinica*, 1994, **15**(1): 75-79. (in Chinese))
- [7] 姜风春,刘瑞堂,张晓欣. 三点弯曲试样动应力强度因子求解的振动分析方法[J]. 工程力学, 2002, **19**(4): 81-84. (JIANG Feng-chun, LIU Rui-tang, ZHANG Xiao-xin. Vibration analysis method used for determining the dynamic stress intensity factor of three-point bending specimen[J]. *Engineering Mechanics*, 2002, **19**(4): 81-84. (in Chinese))

- [8] Rice J R. Some remarks on elastic crack-tip stress fields[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1972, **8**(6): 751-758.
- [9] 陈爱军, 曾文骥. 权函数法研究高速旋转厚壁筒的应力强度因子[J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(1): 28-34. (CHEN Ai-jun, ZENG Wen-ji. Weight function for stress intensity factors in rotating thick-walled cylinder[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2006, **27**(1): 29-35.)
- [10] Shen G, Glinka G. Weight function for a surface semi-elliptical crack in a finite thickness plate[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1991, **15**(3): 247-255.
- [11] Fett T, Mattheck C, Munz D. On the evaluation of crack opening displacement from the stress intensity factor [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1987, **27**(3): 697-715.
- [12] Guo K, Bell R, Wang X. The stress intensity factor solutions for edge cracks in a padded plate geometry under general loading conditions[J]. *International Journal of Fatigue*, 2007, **29**(3): 481-488.
- [13] 丁遂栋. 断裂力学[M]. 北京:机械工业出版社, 1997. (DING Sui-dong. *Fracture Mechanics* [M]. Beijing: China Machine Press, 1997. (in Chinese))
- [14] Chen A J, Liao L F, Zhang D G. Analysis of dynamic stress intensity factors of thick-walled cylinder under internal impulsive pressure[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2009, **25**(6): 803-810.
- [15] 吴淇泰. 振动分析[M]. 杭州:浙江大学出版社, 1989. (WU Qi-tai. *Vibration Analysis* [M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 1989. (in Chinese))

## Analysis of Dynamic Stress Intensity Factors of Three-Point Bend Specimen Containing Crack

CHEN Ai-jun, CAO Jun-jun

(School of Sciences, Nanjing University of Science and Technology,  
Nanjing 210094, P. R. China)

**Abstract:** A new formula was produced to calculate dynamic stress intensity factors of three-point bend specimen containing a single edge crack. Firstly, the weight function for three-point bend specimen containing a single edge crack was derived from a general weight function form and two reference stress intensity factors. The coefficients of the weight function were given. Secondly, the history and distribution of dynamic stresses in unflawed three-point bend specimen which takes account of the effects of rotator inertia and shear deformation were inferred according to vibration theory. Finally, the dynamic stress intensity factor equations for three-point bend specimen with a single edge crack subjected to impact loadings were obtained by weight function method. The new formula was verified by the comparison with the numerical results of FEM (finite element method). Good agreement was achieved. And the law of dynamic stress intensity factors of three-point bend specimen under impact loadings changing with crack depths and loading rates was studied.

**Key words:** cracks; dynamic stress intensity factors; weight function method; three-point bend specimen; loading rate