文章编号:1000-0887(2011)02-0221-11

自反 Banach 空间内一类新的广义混合平衡问题组的辅助原理和逼近可解性*

丁协平

(四川师范大学 数学与软件科学学院,成都 610068)

(我刊编委丁协平来稿)

摘要: 在自反 Banach 空间内引入和研究了一类新的涉及广义混合似变分不等式问题的广义混合平衡问题组(SGMEP). 首先,为了求解 SGMEP,引入了一类辅助广义混合平衡问题组(SAGMEP). 在没有任何强制条件的相当温和假设下,对 SAGMEP 证明了解的存在性和唯一性. 其次,利用辅助原理技巧,对求解 SGMEP 建议和分析了一类新的迭代算法. 最后,在没有任何强制条件的相当温和假设下,证明了由算法生成的迭代序列的强收敛性. 这些结果改进、统一和推广了这一领域内某些最近结果.

关 键 词: 广义混合隐平衡问题组; 辅助原理; 迭代算法; 自反 Banach 空间
中图分类号: O177.91;O178;O241.7 **文献标志码:** A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.02.010

引 言

熟知混合平衡问题和混合似变分不等式问题是各种平衡问题和变分不等式问题的重要和有用的推广,并且有很多有意义的应用. 在平衡问题和变分不等式问题的理论中,发展有效和可实施的迭代算法是有趣和重要的. 我们观察到投影方法和它的变形已不能应用于构造求解混合平衡问题和混合似变分不等式问题的迭代算法. 这一事实促使很多作者分别在 Hilbert 空间和 Banach 空间内去发展辅助原理技巧,并用来研究各种混合平衡问题和混合似变分不等式问题解的存在性和算法. 详情可参见文献[1-12]和其中的参考文献.

在本文中,我们在自反 Banach 空间内引入和研究了一类新的涉及广义混合似变分不等式问题的广义混合平衡问题组(SGMEP). 首先,为求解 SGMEP 引入了一类涉及广义混合似变分不等式问题的广义辅助混合平衡问题组(SAGMEP),并且在自反 Banach 空间内和在没有任何强制条件的相当温和假设下,证明了 SAGMEP 的解的存在性和唯一性. 其次,利用辅助原理技巧,对求解 SGMEP 建议和分析了一类新的迭代算法. 最后,在没有任何强制条件的相当温和假设下,证明了由算法生成的迭代序列的强收敛性. 这些结果改进、统一和推广了这一领域内

* **收稿日期:** 2010-09-16; **修订日期:** 2010-01-05
基金项目: 四川省重点学科建设基金资助项目(SZD0406)
作者简介: 丁协平(1938—),男,四川自贡人,教授(联系人. Tel: +86-28-84780952; E-mail: xieping_ding@hotmail.com).

某些最近结果.

1 预备知识

设 B 是一具有对偶空间 B^* 的 Banach 空间, $\|\cdot\|$ 表 B 和 B^* 的范数, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表 B^* 和 B 之间的广义对偶对和 C 是 B 的非空闭凸子集. 令 $\mathrm{CB}(B^*)$ 表 B^* 的一切有界闭子集的族和 $R=(-\infty,+\infty)$. 设 $\mathcal{H}(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathrm{CB}(B^*)$ 上由下式定义的 Hausdorff 距离:

$$\mathcal{H}(A,D)=\max\{\sup_{a\in A}d(a,D);\sup_{d\in D}d(A,d)\},\qquad \forall A,D\in\mathrm{CB}(B^*),$$

其中 $$d(a,D)=\inf_{d\in D}\|a-d\|,\ d(A,d)=\inf_{a\in A}\|a-d\|.$$

定义 1.1 称实值二元函数 $F:C\times C\to R$ 是

(i) 单调的, 如果

$$F(x,y)+F(y,x)\leqslant 0,\qquad \forall x,y\in C;$$

(ii) α-强单调的, 如果存在 $\alpha>0$ 使得

$$F(x,y)+F(y,x)\leqslant-\alpha\|x-y\|,\qquad \forall x,y\in K;$$

(iii) δ-Lipschitz 连续的, 如果存在 $\delta>0$ 使得

$$|F(x,y)|\leqslant\delta\|x-y\|,\qquad \forall x,y\in C.$$

注 1.1 显然, F 的强单调性蕴含 F 的单调性.

定义 1.2 设 $\eta:B\times B\to B$ 和 $g:B\to B^*$ 是单值映射.

(i) 称 η 在第一自变量是仿射的, 如果

$$\eta(\beta x+(1-\beta)z,y)=\beta\eta(x,y)+(1-\beta)\eta(z,y),\qquad \forall\beta\in[0,1];\ x,y,z\in B;$$

(ii) 称 η 是 τ-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\tau>0$ 使得

$$\|\eta(x,y)\|\leqslant\tau\|x-y\|,\qquad \forall x,y\in B;$$

(iii) 称 g 是 λ-强单调的, 如果存在 $\lambda>0$ 使得

$$\langle g(x)-g(y),(x-y)\rangle\geqslant\lambda\|x-y\|^2,\qquad \forall x,y\in B;$$

(iv) 称有界线性算子 $g:B\to B^*$ 是 λ-强正的, 如果存在 $\lambda>0$ 使得

$$\langle g(x),x\rangle\geqslant\lambda\|x\|^2,\qquad \forall x\in B.$$

注 1.2 显然, 如果 $g:B\to B^*$ 是一 λ-强正有界线性算子, 则 g 是 λ-强单调的和 $\|g\|$-Lipschitz 连续的, 其中 $\|g\|$ 是 g 的算子范数.

定义 1.3 称二元函数 $\varphi:B\times B\to R$ 是旋转对称的, 如果

$$\varphi(x,x)-\varphi(x,y)-\varphi(y,x)+\varphi(y,y)\geqslant 0,\qquad \forall x,y\in B.$$

旋转对称二元函数具有与凸函数的二阶导数的非负性和梯度的单调性相类似的性质. 对旋转对称二元函数的性质和应用, 可参见文献[13].

定义 1.4 设 $I=\{1,2\}$ 是一指标集和对每一 $i\in I$, 令 B_i 是具有对偶空间 B_i^* 的 Banach 空间, $\|\cdot\|_i$ 表示 B_i 和 B_i^* 的范数, $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ 表 B_i^* 和 B_i 之间的广义对偶对和 C_i 是 B_i 的一闭凸子集. 对每一 $i\in I$, 令 $T_i:C_i\to\mathrm{CB}(B_i^*)$ 是一集值映射和 $N_i:B_1^*\times B_2^*\to B_i^*$ 是一单值映射.

(i) 称 T_i 是 k_i-Lipschitz 连续的, 如果存在 $k_i>0$ 使得

$$\mathcal{H}_i(T_i(x),T_i(y))\leqslant k_i\|x-y\|_i,\qquad \forall x,y\in C_i;$$

(ii) 称 N_i 是 (β_i,ξ_i)-混合 Lipschitz 连续的, 如果存在 $\beta_i,\xi_i>0$ 使得

$$\|N_i(u_1,v_1)-N(u_2,v_2)\|_i\leqslant$$

$$\beta_i \| u_1 - u_2 \|_1 + \xi_i \| v_1 - v_2 \|_2, \qquad \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in B_1^* \times B_2^*.$$

下面结果是 Ding 和 Tan 的文献[14]的定理 1 的特殊情形(也见 Ding 的文献[12]的引理 2.2)。

引理 1.1 设 C 是一拓扑矢量空间的非空凸子集和设 $f: C \times C \to [-\infty, +\infty]$ 使得

(i) 对每一 $x \in C$, $f(x, x) \geqslant 0$;

(ii) 对每一 $y \in C$, $x \mapsto f(x, y)$ 在 C 的每一非空紧子集上是上半连续的;

(iii) 对每一 $x \in C$, $y \mapsto f(x, y)$ 是凸的;

(iv) 存在 C 的非空紧子集 K 和 $y \in K$ 使得

$$f(x, y) < 0, \qquad \forall x \in C \backslash K,$$

则存在一点 $\hat{x} \in K$ 使得

$$f(\hat{x}, y) \geqslant 0, \qquad \forall y \in C.$$

引理 1.2[15] 设 E 是一完备距离空间, $T: E \to \mathrm{CB}(E)$ 是一集值映射. 则对任给 $\varepsilon > 0$ 和任给 $x, y \in E$ 和 $u \in Tx$, 存在 $v \in Ty$ 使得

$$d(u, v) \leqslant (1 + \varepsilon) \mathcal{H}(Tx, Ty).$$

除非另外陈述,在全文中,我们假设对每一 $i \in I$, 令 C_i 是 B_i 的一非空闭凸子集具有 $\mathrm{int} C_i \neq \emptyset$, 令 $T_i: C_1 \to \mathrm{CB}(B_1^*)$ 和 $A_i: C_2 \to \mathrm{CB}(B_2^*)$ 是集值映射, $N_i: B_1^* \times B_2^* \to \mathrm{CB}(B_i^*)$ 和 $\eta_i: B_i \times B_i \to B_i$ 是单值映射, $F_i: C_i \times C_i \to R$ 和 $\varphi_i: B_i \times B_i \to R$ 是两个二元函数,和令 $\omega_i \in B_i^*$. 我们将考虑下面的涉及广义混合似变分不等式问题的广义混合平衡问题组(SGMEP):寻求 $(x_1, x_2) \in C_1 \times C_2$, $(u_1, v_1) \in T_1(x_1) \times A_1(x_2)$ 和 $(u_2, v_2) \in T_2(x_1) \times A_2(x_2)$ 使得

$$\begin{cases} F_1(x_1, y_1) + \langle N_1(u_1, v_1) - \omega_1, \eta_1(y_1, x_1) \rangle_1 + \\ \qquad \varphi_1(x_1, y_1) - \varphi_1(x_1, x_1) \geqslant 0, \qquad \forall y_1 \in C_1, \\ F_2(x_2, y_2) + \langle N_2(u_2, v_2) - \omega_2, \eta_2(y_2, x_2) \rangle_2 + \\ \qquad \varphi_2(x_2, y_2) - \varphi_2(x_2, x_2) \geqslant 0, \qquad \forall y_2 \in C_2. \end{cases} \tag{1}$$

特殊情形

(I) 如果 $F_1 \equiv F_2 \equiv 0$, 则 SGMEP(1)退化为下面的广义混合似变分不等式问题组(SGMVLIP):寻求 $(x_1, x_2) \in C_1 \times C_2$, $(u_1, v_1) \in T_1(x_1) \times A_1(x_2)$ 和 $(u_2, v_2) \in T_2(x_1) \times A_2(x_2)$ 使得

$$\begin{cases} \langle N_1(u_1, v_1) - \omega_1, \eta_1(y_1, x_1) \rangle_1 + \varphi_1(x_1, y_1) - \varphi_1(x_1, x_1) \geqslant 0, \qquad \forall y_1 \in C_1, \\ \langle N_2(u_2, v_2) - \omega_2, \eta_2(y_2, x_2) \rangle_2 + \varphi_2(x_2, y_2) - \varphi_2(x_2, x_2) \geqslant 0, \qquad \forall y_2 \in C_2; \end{cases} \tag{2}$$

(II) 如果对每一 $i \in I$, 令 $C_i = B_i$ 和 $\varphi_i(x, y) = b_i(x, y)$ 对一切 $(x, y) \in B_1 \times B_2$, 则 SGMVLIP(2)退化为下面的广义混合似变分不等式问题组(SGMVLIP):寻求 $(x_1, x_2) \in B_1 \times B_2$, $(u_1, v_1) \in T_1(x_1) \times A_1(x_2)$ 和 $(u_2, v_2) \in T_2(x_1) \times A_2(x_2)$ 使得

$$\begin{cases} \langle N_1(u_1, v_1) - \omega_1, \eta_1(y_1, x_1) \rangle_1 + b_1(x_1, y_1) - b_1(x_1, x_1) \geqslant 0, \qquad \forall y_1 \in B_1, \\ \langle N_2(u_2, v_2) - \omega_2, \eta_2(y_2, x_2) \rangle_2 + b_2(x_2, y_2) - b_2(x_2, x_2) \geqslant 0, \qquad \forall y_2 \in B_2, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $b_i: B_i \times B_i \to R$ 满足下面条件:

(a) b_i 在第一自变量是线性的;

(b) b_i 是有界的,即存在常数 $\gamma_i > 0$ 使得

$$b_i(u_i, v_i) \leqslant \gamma_i \| u_i \|_i \| v_i \|_i, \qquad \forall u_i, v_i \in B_i;$$

(c) $b_i(u_i, v_i) - b_i(u_i, w_i) \leqslant b_i(u_i, v_i - w_i), \qquad \forall u_i, v_i, w_i \in B_i;$

(d) b_i 在第二自变量是凸的.

SGMVLIP(3)已由 Ding 和 Wang [11] 在自反 Banach 空间内引入和研究;

(Ⅲ) 如果对每一 $i \in I$,令 $B_i = B_i^* = H_i$ 是一 Hilbert 空间,对每一$(x,y) \in H_1 \times H_2$,$T_i(x) = x$,$A_i(y) = y$ 和 $\omega_i = 0$,则 SGMVLIP(3)退化为下面问题:寻求 $(x_1,x_2) \in H_1 \times H_2$ 使得

$$\begin{cases} \langle N_1(x_1,x_2),\eta_1(y_1,x_1)\rangle_1 + b_1(x_1,y_1) - b_1(x_1,x_1) \geqslant 0, & \forall y_1 \in H_1, \\ \langle N_2(x_1,x_2),\eta_2(y_2,x_2)\rangle_2 + b_2(x_2,y_2) - b_2(x_2,x_2) \geqslant 0, & \forall y_2 \in H_2. \end{cases} \tag{4}$$

问题(4)已由 Kazmi 和 Khan[8] 在 Hilbert 空间内引入和研究;

(Ⅳ) 如果对每一 $i \in I$,令 $B_i = B$,$C_i = C$,$F_i \equiv F$,$N_i \equiv N$,$T_i \equiv T$,$A_i \equiv A$,$\eta_i \equiv \eta$ 和 $\varphi_i \equiv \varphi$,则 SGMEP(1)退化为下面的涉及广义似变分不等式问题的广义混合平衡问题(GMEP):寻求 $x \in C$ 和$(u,v) \in T(x) \times A(x)$ 使得

$$F(x,y) + \langle N(u,v) - \omega,\eta(y,x)\rangle + \varphi(x,y) - \varphi(x,x) \geqslant 0, \quad \forall y \in C; \tag{5}$$

(Ⅴ) 如果 $F \equiv 0$,则 GMEP(5)退化为下面的广义混合似变分不等式问题(GMVLIP):寻求 $x \in C$ 和$(u,v) \in T(x) \times A(x)$ 使得

$$\langle N(u,v) - \omega,\eta(y,x)\rangle + \varphi(x,y) - \varphi(x,x) \geqslant 0, \quad \forall y \in C. \tag{6}$$

GMVLIP(6)和它的特殊情形已被 Ding [4-6] 及 Ding 和 Yao[7] 在自反 Banach 空间内引入和研究;

(Ⅵ) 如果 $N \equiv 0$ 和 $\omega = 0$,则 GMEP(5)退化为下面混合平衡问题(MEP):寻求 $x \in C$ 使得

$$F(x,y) + \varphi(x,y) - \varphi(x,x) \geqslant 0, \quad \forall y \in C. \tag{7}$$

MEP(7)和它的特殊情形已由很多作者引入和研究,参见文献[1-3,12]和其中的参考文献.

简言之,对 B_i,B_i^*,F_i,N_i,η_i,ω_i,T_i,A_i 和 $\varphi_i(i = 1,2)$ 的适当选取,容易看出 SGMEP(1)包含了很多作者分别在 Hilbert 空间和 Banach 空间内引入和研究的广义混合平衡问题组、广义混合似变分不等式问题组、广义混合平衡问题和广义混合似变分不等式问题作为特殊情形,见文献[1-12]和其中的参考文献.

2 辅助问题和算法

我们考虑下面涉及广义混合似变分不等式问题的辅助广义混合平衡问题组(SAGMEP):对给定的 $(x_1,x_2) \in C_1 \times C_2$,$(u_1,v_1) \in T_1(x_1) \times A_1(x_2)$ 和$(u_2,v_2) \in T_2(x_1) \times A_2(x_2)$,求$(z_1,z_2) \in C_1 \times C_2$使得对每一 $i \in I$,

$$\begin{aligned} &\rho_i(F_i(z_i,y_i) + \langle N_i(u_i,v_i) - \omega_i,\eta_i(y_i,z_i)\rangle_i + \varphi_i(z_i,y_i) - \varphi_i(z_i,z_i)) + \\ &\qquad \langle g_i(z_i - x_i),y_i - z_i\rangle_i \geqslant 0, \quad \forall y_i \in C_i, \end{aligned} \tag{8}$$

其中,对每一 $i \in I$,$g_i : B_i \to B_i^*$ 是一有界线性算子和 $\rho_i > 0$ 是一常数.

我们观察到如果 $(z_1,z_2) = (x_1,x_2)$ 是 SAGMEP(8)的一个解,则 $(x_1,x_2,u_1,v_1,u_2,v_2)$ 也是 SGMEP(1)的一个解.

现在,我们证明 SAGMEP(8)的解的存在性和唯一性.

定理 2.1 假设对每一 $i \in I$,下列条件被满足:

(i) F_i 是单调和 δ_i-Lipschitz 连续的使得对每一 $x_i \in C_i$,$F_i(x_i,x_i) \geqslant 0$ 和对每一 $y_i \in C_i$,$x_i \mapsto F_i(x_i,y_i)$ 是弱上半连续的和对每一 $x_i \in C_i$,$y_i \mapsto F_i(x_i,y_i)$ 是凸的;

(ii) g_i是 λ_i- 强正有界线性算子;

(iii) η_i是 τ_i-Lipschitz 连续的,在第一自变量是仿射的和在第二自变量从弱拓扑到弱拓扑是连续的使得

$$\eta_i(x_i,y_i)+\eta_i(y_i,x_i)=0,\qquad \forall x_i,y_i\in C_i;$$

(iv) $\varphi_i: B_i\times B_i\to R$ 是弱连续和旋转对称的使得对每一 $z_i\in B_i, y_i\mapsto\varphi_i(z_i,y_i)$ 是凸的.

则对每一给定的 $(x_1,x_2)\in C_1\times C_2,(u_1,v_1)\in T_1(x_1)\times A_1(x_2)$ 和 $(u_2,v_2)\in T_2(x_1)\times A_2(x_2)$, SAGMEP(8) 有唯一解.

证明 对每一 $i\in I$ 和给定的 $(x_1,x_2)\in C_1\times C_2,(u_1,v_1)\in T_1(x_1)\times A_1(x_2)$ 和 $(u_2,v_2)\in T_2(x_1)\times A_2(x_2)$, 定义一二元函数 $f_i: C_i\times C_i\to R$ 如下:

$$f_i(z_i,y_i)=\rho_i(F_i(z_i,y_i)+\langle N_i(u_i,v_i)-\omega_i,\eta_i(y_i,z_i)\rangle_i+\varphi_i(z_i,y_i)-\varphi_1(z_i,z_i))+\langle g_i(z_i-x_i),y_i-z_i\rangle_i. \tag{9}$$

我们证明对每一 $i\in I$, f_i 在弱拓扑下满足引理1.1的一切条件. 因为条件(iii)蕴含 $\eta_i(z_i,z_i)=0$, $\forall z_i\in C_i$, 由条件(i)~(iii), 我们有 $f_i(z_i,z_i)\geqslant 0$, $\forall z_i\in C_i$. 因为对每一 $y_i\in C_i, z_i\mapsto F_i(z_i,y_i)$ 是弱上半连续的, $N_i(u_i,v_i)-\omega_i\in E_i^*$, $z_i\mapsto\eta_i(y_i,z_i)$ 从弱拓扑到弱拓扑是连续的, φ_i 弱连续的和 g_i 是有界线性算子, 由此推得对每一 $y_i\in C_i$, 函数 $z_i\mapsto f_i(z_i,y_i)$ 也是弱上半连续的. 因为对每一固定的 $z_i\in C_i$, 函数 $y_i\mapsto F_i(z_i,y_i)$ 和 $y_i\mapsto\varphi(z_i,y_i)$ 是凸的, $y_i\mapsto\eta_i(y_i,z_i)$ 是仿射的和 g_i 是线性算子, 由此推得对每一 $z_i\in C_i$, 函数 $y_i\mapsto f_i(y_i,z_i)$ 是凸的. 因为对每一 $z_i\in C_i, y_i\to\varphi(z_i,y_i)$ 是凸的和弱连续的和 $\operatorname{int}\{y_i\in C_i:\varphi_i(y_i,y_i)<\infty\}=\operatorname{int}(C_i)\neq\emptyset$, 取 $y_i^*\in\operatorname{int}\{y_i\in C_i:\varphi_i(y_i,y_i)<\infty\}$, 由 Pascall 和 Sburlan 的文献[16]中27页的命题, $\varphi_i(y_i^*,\cdot)$ 在 y_i^* 是次可微的. 因此我们有

$$\varphi(y_i^*,z_i)-\varphi_i(y_i^*,y_i^*)\geqslant\langle r_i,z_i-y_i^*\rangle_i,\qquad\forall r_i\in\partial\varphi_i(y_i^*,\cdot);\ z_i\in C_i.$$

注意到 φ_i 是旋转对称的, 我们有

$$\varphi_i(z_i,y_i^*)-\varphi_i(z_i,z_i)\leqslant\varphi_i(y_i^*,y_i^*)-\varphi(y_i^*,z_i)\leqslant\langle r_i,y_i^*-z_i\rangle_i,\qquad\forall r_i\in\partial\varphi_i(y_i^*,\cdot);\ z_i\in C_i. \tag{10}$$

因为 F_i 是 δ_i-Lipschitz 连续的, η_i 是 τ_i-Lipschitz 连续的和 g_i 是 λ_i-强正有界线性算子, 由使用式(10), 我们有

$$\begin{aligned}f_i(y_i^*,z_i)&=\rho(F_i(y_i^*,z_i)+\langle N_i(u_i,v_i)-\omega_i,\eta_i(y_i^*,z_i)\rangle_i+\\&\quad\varphi_i(z_i,y_i^*)-\varphi_i(z_i,z_i))+\langle g_i(z_i-x_i),y_i^*-z_i\rangle_i\leqslant\\&\quad\rho(|F_i(y_i^*,z_i)|+\|N_i(u_i,v_i)-\omega_i\|_i\|\eta_i(y_i^*,z_i)\|_i+\langle r_i,y_i^*-z_i\rangle_i)-\\&\quad\langle g_i(y_i^*-z_i),y_i^*-z_i\rangle_i+\langle g_i(y_i^*-x_i),y_i^*-z_i\rangle_i\leqslant\\&\quad\rho(\delta_i\|y_i^*-z_i\|_i+\tau_i\|N_i(u_i,v_i)-\omega_i\|_i\|y^*-z_i\|_i+\|r_i\|_i\|y_i^*-z_i\|_i)-\\&\quad\lambda_i\|y_i^*-z_i\|_i^2+\|g_i\|_i\|y_i^*-x_i\|_i\|y_i^*-z_i\|_i=\\&\quad-\|y_i^*-z_i\|_i[\lambda_i\|y_i^*-z_i\|_i-\\&\quad\rho_i(\delta_i+\tau_i\|N_i(u_i,v_i)-\omega_i\|_i+\|r_i\|_i)-\|g_i\|_i\|y_i^*-x_i\|_i].\end{aligned} \tag{11}$$

对每一 $i\in I$, 令

$$\Omega_i=\frac{\rho_i(\delta_i+\tau_i\|N_i(u_i,v_i)-\omega_i\|_i+\|r_i\|)+\|g_i\|_i\|y_i^*-x_i\|_i}{\lambda},$$

$$K_i=\{z_i\in C_i:\|y_i^*-z_i\|_i\leqslant\Omega_i\},$$

则对每一 $i\in I, K_i$ 是 C_i 的弱紧凸子集并且 $y_i^*\in K_i$ 和对每一 $z_i\in C_i\backslash K_i$, 我们有 $f_i(y_i^*,z_i)<0$. 因此, 引理1.1的所有条件被满足. 由引理1.1, 对每一 $i\in I$, 存在 $z_i^*\in C_i$ 使得 $f_i(z_i^*,y_i)\geqslant 0$, $\forall y_i\in C_i$. 由 f_i 的定义, 我们得到

$$\rho(F_i(z_i^*,y_i)+\langle N_i(u_i,v_i)-\omega_i,\eta_i(y_i,z_i^*)\rangle_i+\varphi_i(z_i^*,y_i)-\varphi_i(z_i^*,z_i^*))+$$

$$\langle g_i(z_i^* - x_i), y_i - z_i^* \rangle_i \geqslant 0, \qquad \forall y_i \in C_i. \tag{12}$$

这就证明了 (z_1^*, z_2^*) 是 SAGMEP(8)的一个解.

现在,我们证明 SAGMEP(8)的解是唯一的.令

$$(z_1, z_2), (z_1^*, z_2^*) \in C_1 \times C_2$$

是 SAGMEP(8)的任意两个解,则对每一 $i \in I$, 我们有

$$\rho_i(F_i(z_i, y_i) + \langle N_i(u_i, v_i) - \omega_i, \eta_i(y_i, z_i) \rangle_i + \varphi_i(z_i, y_i) - \varphi_1(z_i, z_i)) +$$
$$\langle g_i(z_i - x_i), y_i - z_i \rangle_i \geqslant 0, \qquad \forall y_i \in C_i, \tag{13}$$
$$\rho_i(F_i(z_i^*, y_i) + \langle N_i(u_i, v_i) - \omega_i, \eta_i(y_i, z_i^*) \rangle_i + \varphi_i(z_i^*, y_i) - \varphi_i(z_i^*, z_i^*)) +$$
$$\langle g_i(z_i^* - x_i), y_i - z_i^* \rangle_i \geqslant 0, \qquad \forall y_i \in C_i. \tag{14}$$

在式(13)中令 $y_i = z_i^*$ 和在式(14) 中令 $y_i = z_i$ 并且加这两个不等式,注意到 g_i 是一线性算子,我们得到

$$\rho_i[\ F_i(z_i, z_i^*) + F_i(z_i^*, z_i) + \langle N_i(u_i, v_i) - \omega_i, \eta_i(z_i^*, z_i) + \eta_i(z_i, z_i^*) \rangle_i +$$
$$\varphi_i(z_i, z_i^*) - \varphi_1(z_i, z_i) + \varphi_i(z_i^*, z_i) - \varphi_i(z_i^*, z_i^*)] \geqslant$$
$$\langle g_i(z_i^* - z_i), z_i^* - z_i \rangle_i. \tag{15}$$

因为 F_i 是单调的,$\eta_i(z_i, z_i^*) + \eta_i(z_i^*, z_i) = 0$,$\varphi_i$是旋转对称的和 g_i 是 λ_i- 强正有界线性算子,由式(15)推得

$$0 \geqslant \langle g_i(z_i^* - z_i), z_i^* - z_i \rangle_i \geqslant \lambda_i \| z_i^* - z_i \|^2.$$

所以,我们必有

$$(z_1, z_2) = (z_1^*, z_2^*).$$

这就完成了证明.

由使用定理2.1,我们能构造计算下面 SGMEP(1)的近似解的迭代算法.

算法2.1 对给定的 $(x_1^0, x_2^0) \in C_1 \times C_2$, $(u_1^0, v_1^0) \in T_1(x_1^0) \times A_1(x_2^0)$ 和 $(u_2^0, v_2^0) \in T_2(x_1^0) \times A_2(x_2^0)$, 由定理2.1,SAGMEP(8)有唯一解

$$(x_1^1, x_2^1) \in C_1 \times C_2,$$

即对每一 $i \in I$, 有

$$\rho_i(F_i(x_i^1, y_i) + \langle N_i(u_i^0, v_i^0) - \omega_i, \eta_i(y_i, x_i^1) \rangle_i + \varphi_i(x_i^1, y_i) - \varphi_1(x_i^1, x_i^1)) +$$
$$\langle g_i(x_i^1 - x_i^0), y_i - x_i^1 \rangle_i \geqslant 0, \qquad \forall y_i \in C_i. \tag{16}$$

因为对每一 $i \in I$, $u_i^0 \in T_i(x_1^0) \in \mathrm{CB}(B_1^*)$ 和 $v_i^0 \in A_i(x_2^0) \in \mathrm{CB}(B_2^*)$, 由引理1.2,存在 $u_i^1 \in T_i(x_1^1)$ 和 $v_i^1 \in A_i(x_2^1)$ 使得

$$\| u_i^1 - u_i^0 \|_1 \leqslant (1 + 1)\mathscr{H}_1(T_i(x_1^1), T_i(x_1^0)),$$
$$\| v_i^1 - v_i^0 \|_2 \leqslant (1 + 1)\mathscr{H}_2(A_i(x_2^1), A_i(x_2^0)),$$

其中, $\mathscr{H}_1(\cdot, \cdot)$ 和 $\mathscr{H}_2(\cdot, \cdot)$ 分别是 $\mathrm{CB}(B_1^*)$ 和 $\mathrm{CB}(B_2^*)$ 上的 Hausdorff 距离.

再使用定理2.1 ,SAGMEP(8)有唯一解 $(x_1^2, x_2^2) \in C_1 \times C_2$ 使得对每一 $i \in I$,

$$\rho_i(F_i(x_i^2, y_i) + \langle N_i(u_i^1, v_i^1) - \omega_i, \eta_i(y_i, x_i^2) \rangle_i + \varphi_i(x_i^2, y_i) - \varphi_1(x_i^2, x_i^2)) +$$
$$\langle g_i(x_i^2 - x_i^1), y_i - x_i^2 \rangle_i \geqslant 0, \qquad \forall y_i \in C_i. \tag{17}$$

由归纳法,我们能构造计算 SGMEP(1)的近似解的迭代算法如下:对给定的 $(x_1^0, x_2^0) \in C_1 \times C_2$, $(u_1^0, v_1^0) \in T_1(x_1^0) \times A_1(x_2^0)$ 和 $(u_2^0, v_2^0) \in T_2(x_1^0) \times A_2(x_2^0)$,存在序列 $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, $\{u_1^n\}$, $\{u_2^n\}$, $\{v_1^n\}$ 和 $\{v_2^n\}$ 使得对每一 $i \in I$,

$$\begin{cases} u_i^n \in T_i(x_1^n),\ \|u_i^{n+1}-u_i^n\|_1 \le \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\mathcal{H}_1(T_i(x_1^{n+1}),T_i(x_1^n)), \\ v_i^n \in A_i(x_2^n),\ \|v_i^{n+1}-v_i^n\|_2 \le \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\mathcal{H}_2(A_i(x_2^{n+1}),A_i(x_2^n)), \\ \rho_i(F_i(x_i^{n+1},y_i)+\langle N_i(u_i^n,v_i^n)-\omega_i,\eta_i(y_i,x_i^{n+1})\rangle_i+\varphi_i(x_i^{n+1},y_i)- \\ \qquad \varphi_1(x_i^{n+1},x_i^{n+1}))+\langle g_i(x_i^{n+1}-x_i^n),y_i-x_i^{n+1}\rangle_i \ge 0, \\ \qquad\qquad \forall y_i \in C_i;\ n=0,1,2,\cdots. \end{cases} \tag{18}$$

3 解的存在性和收敛分析

在本节中,我们对 SGMEP(1)证明解的存在性和讨论由算法 2.1 生成的迭代序列的收敛性.

定理 3.1 在定理 2.1 的假设下,进一步假设对每一 $i \in I$,

(i) F_i 是 α_i- 强单调的;

(ii) N_i 是(β_i,ξ_i)- 混合 Lipschitz 连续的;

(iii) T_i 是 k_i-$\mathcal{H}_1$-Lipschitz 连续的和 A_i 是 μ_i-$\mathcal{H}_2$-Lipschitz 连续的.

如果下面条件对 $\rho_1,\rho_2>0$ 成立:

$$\begin{cases} \theta_1=\dfrac{\rho_1\tau_1\beta_1k_1+\|g_1\|}{\rho_1\alpha_1+\lambda_1},\ \theta_2=\dfrac{\rho_2\tau_2\beta_2k_2}{\rho_2\alpha_2+\lambda_2},\ \vartheta_1=\dfrac{\rho_1\tau_1\xi_1\mu_1}{\rho_1\alpha_1+\lambda_1}, \\ \vartheta_2=\dfrac{\rho_2\tau_2\xi_2\mu_2+\|g_2\|_2}{\rho_2\alpha_2+\lambda_2},\ \Lambda=\max\{\theta_1+\theta_2,\vartheta_1+\vartheta_2\}<1. \end{cases} \tag{19}$$

则由算法 2.1 生成的序列 $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, $\{u_1^n\}$, $\{v_1^n\}$, $\{u_2^n\}$ 和 $\{v_2^n\}$ 分别强收敛于 $\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{u}_1,\hat{v}_1,\hat{u}_2$ 和 $\hat{v}_2$,其中$(\hat{u}_1,\hat{v}_1)\in T_1(\hat{x}_1)\times A_1(\hat{x}_2)$,$(\hat{u}_2,\hat{v}_2)\in T_2(\hat{x}_1)\times A_2(\hat{x}_2)$,并且$(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{u}_1,\hat{v}_1,\hat{u}_2,\hat{v}_2)$ 是 SGMEP(1)的一个解.

证明 由算法 2.1,我们有对每一 $i \in I$,

$$\begin{aligned} &\rho_i(F_i(x_i^n,y_i)+\langle N_i(u_i^{n-1},v_i^{n-1})-\omega_i,\eta_i(y_i,x_i^n)\rangle_i+\varphi_i(x_i^n,y_i)-\varphi_1(x_i^n,x_i^n))+ \\ &\qquad \langle g_i(x_i^n-x_i^{n-1}),y_i-x_i^n\rangle_i \ge 0, \qquad \forall y_i \in C_i, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\rho_i(F_i(x_i^{n+1},y_i)+\langle N_i(u_i^n,v_i^n)-\omega_i,\eta_i(y_i,x_i^{n+1})\rangle_i+\varphi_i(x_i^{n+1},y_i)-\varphi_1(x_i^{n+1},x_i^{n+1}))+ \\ &\qquad \langle g_i(x_i^{n+1}-x_i^n),y_i-x_i^{n+1}\rangle_i \ge 0, \qquad \forall y_i \in C_i. \end{aligned} \tag{21}$$

在式(20)中令 $y_i=x_i^{n+1}$,在式(21) 中令 $y_i=x_i^n$, 得到

$$\begin{aligned} &\rho_i(F_i(x_i^n,x_i^{n+1})+\langle N_i(u_i^{n-1},v_i^{n-1})-\omega_i,\eta_i(x_i^{n+1},x_i^n)\rangle_i+\varphi_i(x_i^n,x_i^{n+1})- \\ &\qquad \varphi_1(x_i^n,x_i^n))+\langle g_i(x_i^n-x_i^{n-1}),x_i^{n+1}-x_i^n\rangle_i \ge 0, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &\rho_i(F_i(x_i^{n+1},x_i^n)+\langle N_i(u_i^n,v_i^n)-\omega_i,\eta_i(x_i^n,x_i^{n+1})\rangle_i+\varphi_i(x_i^{n+1},x_i^n)- \\ &\qquad \varphi_1(x_i^{n+1},x_i^{n+1}))+\langle g_i(x_i^{n+1}-x_i^n),x_i^n-x_i^{n+1}\rangle_i \ge 0. \end{aligned} \tag{23}$$

注意到 $\eta_i(x_i^{n+1},x_i^n)=-\eta_i(x_i^n,x_i^{n+1})$, 加不等式(22)和(23),我们得到

$$\begin{aligned} &\rho_i(F_i(x_i^n,x_i^{n+1})+F_i(x_i^{n+1},x_i^n)+ \\ &\qquad \langle N_i(u_i^{n-1},v_i^{n-1})-\omega_i,\eta_i(x_i^{n+1},x_i^n)\rangle_i+\langle N_i(u_i^n,v_i^n)-\omega_i,\eta_i(x_i^n,x_i^{n+1})\rangle_i+ \\ &\qquad \varphi_i(x_i^{n+1},x_i^n)-\varphi_1(x_i^{n+1},x_i^{n+1})+\varphi_i(x_i^n,x_i^{n+1})-\varphi_1(x_i^n,x_i^n))+ \\ &\qquad \langle g_i(x_i^n-x_i^{n-1}),x_i^{n+1}-x_i^n\rangle_i+\langle g_i(x_i^{n+1}-x_i^n),x_i^n-x_i^{n+1}\rangle_i= \\ &\qquad \rho_i(F_i(x_i^n,x_i^{n+1})+F_i(x_i^{n+1},x_i^n)+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\langle N_i(u_i^{n-1},v_i^{n-1})-N_i(u_i^n,v_i^n),\eta_i(x_i^{n+1},x_i^n)\rangle_i+\\&\varphi_i(x_i^{n+1},x_i^n)-\varphi_1(x_i^{n+1},x_i^{n+1})+\varphi_i(x_i^n,x_i^{n+1})-\varphi_1(x_i^n,x_i^n))+\\&\langle g_i(x_i^n-x_i^{n-1}),x_i^{n+1}-x_i^n\rangle_i+\langle g_i(x_i^{n+1}-x_i^n),x_i^n-x_i^{n+1}\rangle_i\geqslant 0.\end{aligned}\tag{24}$$

注意到 F_i 是 α_i- 强单调的,φ_i 是旋转对称的和 g_i 是 λ_i- 强正的,由式(24)推得

$$\begin{aligned}&\rho_i(-\alpha_i\|x_i^{n+1}-x_i^n\|_i^2+\|N_i(u_i^{n-1},v_i^{n-1})-N_i(u_i^n,v_i^n)\|_i\|\eta_i(x_i^{n+1},x_i^n)\|_i)+\\&\quad\|g_i\|_i\|x_i^n-x_i^{n-1}\|_i\|x_i^{n+1}-x_i^n\|_i\geqslant\\&\quad\rho_i(F_i(x_i^n,x_i^{n+1})+F_i(x_i^{n+1},x_i^n)+\\&\quad\langle N_i(u_i^{n-1},v_i^{n-1})-N_i(u_i^n,v_i^n),\eta_i(x_i^{n+1},x_i^n)\rangle_i)+\\&\quad\langle g_i(x_i^n-x_i^{n-1}),x_i^{n+1}-x_i^n\rangle_i\geqslant\langle g_i(x_i^{n+1}-x_i^n),x_i^{n+1}-x_i^n\rangle_i\geqslant\\&\quad\lambda_i\|x_i^{n+1}-x_i^n\|_i^2.\end{aligned}\tag{25}$$

因为 N_1 是(β_1,ξ_1)- 混合 Lipschitz 连续的,T_1 是 k_1-H_1-Lipschitz 连续的和 A_1 是 μ_1-H_2-Lipschitz 连续的,由算法 2.1,得到

$$\begin{aligned}&\|N_1(u_1^{n-1},v_1^{n-1})-N_1(u_1^n,v_1^n)\|_1\leqslant\\&\quad\beta_1\|u_1^{n-1}-u_1^n\|_1+\xi_1\|v_1^{n-1}-v_1^n\|_2\leqslant\\&\quad\beta_1\left(1+\frac{1}{n}\right)H_1(T_1(x_1^{n-1}),T_1(x_1^n))+\xi_1\left(1+\frac{1}{n}\right)H_2(A_1(x_2^{n-1}),A_1(x_2^n))\leqslant\\&\quad\beta_1k_1\left(1+\frac{1}{n}\right)\|x_1^{n-1}-x_1^n\|_1+\xi_1\mu_1\left(1+\frac{1}{n}\right)\|x_2^{n-1}-x_2^n\|_2.\end{aligned}\tag{26}$$

因为 η_1 是 τ_1-Lipschitz 连续的,从具有 $i=1$ 的式(25)和(26)推得

$$\begin{aligned}&(\rho_1\alpha_1+\lambda_1)\|x_1^n-x_1^{n+1}\|_1\leqslant\\&\quad\rho_1\tau_1\left(\beta_1k_1\left(1+\frac{1}{n}\right)\|x_1^{n-1}-x_1^n\|_1+\right.\\&\quad\left.\xi_1\mu_1\left(1+\frac{1}{n}\right)\|x_2^{n-1}-x_2^n\|_2\right)+\|g_1\|\ \|x_1^{n-1}-x_1^n\|_1=\\&\quad\left(\rho_1\tau_1\beta_1k_1\left(1+\frac{1}{n}\right)+\|g_1\|\right)\|x_1^{n-1}-x_1^n\|_1+\\&\quad\rho_1\tau_1\xi_1\mu_1\left(1+\frac{1}{n}\right)\|x_2^{n-1}-x_2^n\|_2,\end{aligned}\tag{27}$$

因此

$$\|x_1^n-x_1^{n+1}\|_1\leqslant\theta_{1n}\|x_1^{n-1}-x_1^n\|_1+\vartheta_{1n}\|x_2^{n-1}-x_2^n\|_2,\tag{28}$$

其中 $\theta_{1n}=\dfrac{\rho_1\tau_1\beta_1k_1(1+1/n)+\|g_1\|}{\rho_1\alpha_1+\lambda_1}$, $\vartheta_{1n}=\dfrac{\rho_1\tau_1\xi_1\mu_1(1+1/n)}{\rho_1\alpha_1+\lambda_1}$.

类似地,由对 F_2,N_2,η_2,T_2,A_2 和 g_2 的假设,由具有 $i=2$ 的式(25)推得

$$\|x_2^n-x_2^{n+1}\|_2\leqslant\theta_{2n}\|x_1^{n-1}-x_1^n\|_1+\vartheta_{2n}\|x_2^{n-1}-x_2^n\|_2,\tag{29}$$

其中 $\theta_{2n}=\dfrac{\rho_2\tau_2\beta_2k_2(1+1/n)}{\rho_2\alpha_2+\lambda_2}$, $\vartheta_{2n}=\dfrac{\rho_2\tau_2\xi_2\mu_2(1+1/n)+\|g_2\|_2}{\rho_2\alpha_2+\lambda_2}$,

将不等式(28)和(29)相加,我们得到

$$\begin{aligned}&\|x_1^n-x_1^{n+1}\|_1+\|x_2^n-x_2^{n+1}\|_2\leqslant\\&\quad(\theta_{1n}+\theta_{2n})\|x_1^{n-1}-x_1^n\|_1+(\vartheta_{1n}+\vartheta_{1n})\|x_2^{n-1}-x_2^n\|_2\leqslant\\&\quad\Lambda_n(\|x_1^{n-1}-x_1^n\|_1+\|x_2^{n-1}-x_2^n\|_2),\end{aligned}\tag{30}$$

其中 $\Lambda_n = \max\{\theta_{1n} + \theta_{2n},\ \vartheta_{1n} + \vartheta_{2n}\}$.

现在在 $B_1 \times B_2$ 上定义范数 $\|\cdot\|_*$ 如下:

$$\|(x,y)\|_* = \|x\|_1 + \|y\|_2, \qquad \forall (x,y) \in B_1 \times B_2,$$

则 $(B_1 \times B_2, \|\cdot\|_*)$ 变成了一 Banach 空间. 所以,式(30)蕴含

$$\|(x_1^n, x_2^n) - (x_1^{n+1}, x_2^{n+1})\|_* \leqslant \Lambda_n \|(x_1^{n-1}, x_2^{n-1}) - (x_1^n, x_2^n)\|_*. \tag{31}$$

令

$$\theta_1 = \frac{\rho_1\tau_1\beta_1k_1 + \|g_1\|}{\rho_1\alpha_1 + \lambda_1},\ \theta_2 = \frac{\rho_2\tau_2\beta_2k_2}{\rho_2\alpha_2 + \lambda_2},\ \vartheta_1 = \frac{\rho_1\tau_1\xi_1\mu_1}{\rho_1\alpha_1 + \lambda_1},$$

$$\vartheta_2 = \frac{\rho_2\tau_2\xi_2\mu_2 + \|g_2\|_2}{\rho_2\alpha_2 + \lambda_2},\ \Lambda = \max\{\theta_1 + \theta_2, \vartheta_1 + \vartheta_2\}.$$

容易看出当 $n \to \infty$ 时,$\Lambda_n \to \Lambda$. 由条件(19),我们有 $\Lambda < 1$. 因此存在 $\Lambda_0 < 1$ 和 $n_0 \geqslant 0$ 使得对一切 $n \geqslant n_0$,有 $\Lambda_n \leqslant \Lambda_0 < 1$. 从式(31) 推得 $\{(x_1^n, x_2^n)\}$ 是在 $C_1 \times C_2$ 内的一 Cauchy 系列. 我们可以假设 $\{(x_1^n, x_2^n)\}$ 强收敛于某$(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in C_1 \times C_2$. 因为对每一 $i \in I$, 集值映射 T_i 是 k_i-$\mathcal{H}_1$-Lipschitz 连续的和 A_i 是 μ_i-$\mathcal{H}_2$-Lipschitz 连续的,从算法 2.1 得到

$$\|u_i^n - u_i^{n+1}\|_1 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\mathcal{H}_1(T_i(x_1^n), T_i(x_1^{n+1})) \leqslant$$
$$k_i\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\|x_1^n - x_1^{n+1}\|_1,$$
$$\|v_i^n - v_i^{n+1}\|_2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\mathcal{H}_2(A_i(x_2^n), A_i(x_2^{n+1})) \leqslant$$
$$\mu_i\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\|x_2^n - x_2^{n+1}\|_2.$$

所以,对每一 $i \in I$, $\{u_i^n\}$ 是 B_1^* 内的一 Cauchy 序列和 $\{v_i^n\}$ 是 B_2^* 内的一 Cauchy 序列. 对每一 $i \in I$,令 $\{(u_i^n, v_i^n)\}$ 强收敛于某$(\hat{u}_i, \hat{v}_i) \in B_1^* \times B_2^*$. 注意到 $u_1^n \in T_1(x_1^n)$, 有

$$d(\hat{u}_1, T_1(\hat{x}_1)) \leqslant \|\hat{u}_1 - u_1^n\|_1 + d(u_1^n, T_1(x_1^n)) + \mathcal{H}_1(T_1(x_1^n), T_1(\hat{x}_1)) \leqslant$$
$$\|\hat{u}_1 - u_1^n\|_1 + k_1\|\hat{x}_1 - x_1^n\|_1 \to 0, \qquad n \to \infty.$$

因此,必有 $\hat{u}_1 \in T_1(\hat{x}_1)$. 使用相同的论证,我们能得到 $\hat{u}_2 \in T_2(\hat{x}_1)$, $\hat{v}_1 \in A_1(\hat{x}_2)$ 和 $\hat{v}_2 \in A_2(\hat{x}_2)$. 由算法 2.1,有对每一 $i \in I$,

$$\rho_i(F_i(x_i^{n+1}, y_i) + \langle N_i(u_i^n, v_i^n) - \omega_i, \eta_i(y_i, x_i^{n+1})\rangle_i + \varphi_i(x_i^{n+1}, y_i) - \varphi_1(x_i^{n+1}, x_i^{n+1})) +$$
$$\langle g_i(x_i^{n+1} - x_i^n), y_i - x_i^{n+1}\rangle_i \geqslant 0, \qquad \forall y_i \in C_i;\ n = 0,1,2,\cdots. \tag{32}$$

因为 N_i 是(β_i, ξ_i)-混合 Lipschitz 连续的和 η_i 在第二自变量从弱拓扑到弱拓扑是连续的,对每一 $y_i \in C_i$,

$$|\langle N_i(u_i^n, v_i^n) - \omega_i, \eta_i(y_i, x_i^{n+1})\rangle_i - \langle N_i(\hat{u}_i, \hat{v}_i) - \omega_i, \eta_i(y_i, \hat{x}_i)\rangle_i| \leqslant$$
$$|\langle N_i(u_i^n, v_i^n) - N_i(\hat{u}_i, \hat{v}_i), \eta_i(y_i, x_i^{n+1})\rangle_i| + |\langle N_i(\hat{u}_i, \hat{v}_i) -$$
$$\omega_i, \eta_i(y_i, x_i^{n+1}) - \eta_i(y_i, \hat{x}_i)\rangle_i| \leqslant$$
$$\|N_i(u_i^n, v_i^n) - N_i(\hat{u}_i, \hat{v}_i)\|\,\|\eta_i(y_i, x_i^{n+1})\| +$$
$$|\langle N_i(\hat{u}_i, \hat{v}_i) - \omega_i, \eta_i(y_i, x_i^{n+1}) - \eta_i(y_i, \hat{x}_i)\rangle_i| \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{33}$$

因为 F_i 是弱上半连续的,φ_i 是弱连续的和 g_i 是有界线性算子,从式(32) 和(33) 推得对每一 $i \in I$,

$$F_i(\hat{x}_i, y_i) + \langle N_i(\hat{u}_i, \hat{v}_i) - \omega_i, \eta_i(y_i, \hat{x}_i)\rangle_i + \varphi_i(\hat{x}_i, y_i) - \varphi_i(\hat{x}_i, \hat{x}_i) \geqslant 0,$$

$$\forall y_i \in C_1, \qquad (34)$$

所以，$(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{u}_1,\hat{u}_2,\hat{v}_1,\hat{v}_2)$ 是 SGMEP(1)的一个解. 这就完成了证明.

注 3.1 1）定理 3.1 改进和推广了 Ding 在文献[4-6]及 Ding 和 Yao 在文献[7]的相应结果,从广义混合拟似变分不等式问题到涉及广义混合似变分不等式问题的广义混合平衡问题组；2）定理 3.1 也改进和推广了 Ding 在文献[12]的相应结果,从混合平衡问题到涉及广义混合似变分不等式问题的广义混合平衡问题组；3）因为对每一 $i \in I, \varphi_i$ 是旋转对称二元函数,并且放置在 φ_i 上的假设与放置在二元函数 b_i 上的假设(a)~(d)是不同的,所以定理 3.1 是不同于在文献[8,10-11]中相关结果的新结果.

致谢 感谢四川师范大学重点科研基金(09ZDL04)对本文的资助.

参考文献：

[1] Blum E, Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems[J]. *Math Students*, 1994, **63**(1): 123-145.

[2] Moudafi A, Théra M. *Proximal and Dynamical Approaches to Equilibrium Problems*[M]. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Vol **477**. Berlin: Springer-Verlag, 1999: 187-201.

[3] Moudafi A. Mixed equilibrium problems: sensitivity analysis and algorithmic aspects[J]. *Comput Math Appl*, 2002, **44**(8/9): 1099-1108.

[4] DING Xie-ping. Existence and algorithm of solutions for nonlinear mixed quasi-variational inequalities in Banach spaces[J]. *J Comput Appl Math*, 2003, **157**(2): 419-434.

[5] DING Xie-ping. Iterative algorithm of solutions for generalized mixed implicit equilibrium-like problems[J]. *Appl Math Comput*, 2005, **162**(2): 799-809.

[6] Ding X P. Existence of solutions and an algorithm for mixed variational-like inequalities in Banach spaces[J]. *J Optim Theory Appl*, 2005, **127**(2): 285-302.

[7] DING Xie-ping, YAO Jen-chin. Existence and algorithm of solutions for mixed quasi-variational-like inclusions in Banach spaces[J]. *Comput Math Appl*, 2005, **49**(5/6): 857-869.

[8] Kazmi K R, Khan F A. Existence and iterative approximation of solutions of generalized mixed equilibrium problems[J]. *Comput Math Appl*, 2008, **56**(5): 1314-1321.

[9] 丁协平, 王中宝. Banach 空间内涉及 H-η-单调算子的集值混合拟似变分包含组[J]. 应用数学和力学, 2009, **30**(1):1-14. (DING Xie-ping, WANG Zhong-bao. System of set-valued mixed quasi-variational-like inclusions involving *H-eta*-monotone operators in Banach Spaces[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*(*English Edition*), 2009, **30**(1):1-12.)

[10] 丁协平. Banach 空间内一类广义混合隐平衡问题组解的存在性和迭代算法[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(9): 1001-1015. (DING Xie-ping. Existence and algorithm of solutions for a system of generalized mixed implicit equilibrium problems in Banach spaces[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*(*English Edition*), 2010, **31**(9): 1049-1062.)

[11] DING Xie-ping, WANG Zhong-bao. The auxiliary principle and an algorithm for a system of generalized set-valued mixed variational-like inequality problems in Banach spaces[J]. *J Comput Appl Math*, 2010, **223**(11): 2876-2883.

[12] Ding X P. Auxiliary principle and algorithm for mixed equilibrium problems and bilevel mixed equilibrium problems in Banach spaces[J]. *J Optim Theory Appl*, 2010, **146**(2): 347-357.

[13] Antipin A S. Iterative gradient prediction-type methods for computing fixed-point of extremal mappings[C]//Guddat J, Jonden H Th, Nizicka F, Still G, Twitt F. *Parametric Optimization and Related Topics* Ⅳ. Main, Frankfort: Peter Lang, 1997: 11-24.

[14] DING Xie-ping, Tan Kok-keong. A minimax inequality with applications to existence of equilibrium point and fixed point theorems[J]. *Colloq Math*, 1992, **63**: 233-247.
[15] Nadler S B. Multivalued contraction mapping[J]. *Pacific J Math*, 1969, **30**: 475-488.
[16] Pascall D, Sburlan S. *Nonlinear Mappings of Monotone Type*[M]. Alphen aan den Rijn, Netherlands: Sijthoff and Noordhoff International Publishers, 1978.

Auxiliary Principle and Approximation Solvability for a System of New Generalized Mixed Equilibrium Problems in Reflexive Banach Spaces

DING Xie-ping
(*College of Mathematics and Software Science*, *Sichuan Normal University*, *Chengdu* 610068, *P. R. China*)

Abstract: A system of new generalized mixed equilibrium problems involving generalized mixed variational-like inequality problems (SGMEP) was introduced and studied in reflexive Banach spaces. First, a system of auxiliary generalized mixed equilibrium problems (SAGMEP) for solving the SGMEP was introduced. The existence and uniqueness of the solutions of the SAGMEP was proved under quite mild assumptions without any coercive conditions in reflexive Banach spaces. Next, by using the auxiliary principle technique, a new iterative algorithm for solving the SGMEP was suggested and analyzed. Finally, the strong convergence of the iterative sequences generated by the algorithm was also proved under quite mild assumptions without any coercive conditions. These results improve, unify and generalize some recent results in this field.

Key words: system of generalized mixed equilibrium problems; auxiliary principle; iterative algorithm; reflexive Banach space