文章编号:1000-0887(2011)02-0241-12

Banach 空间中广义混合平衡问题,变分不等式问题和不动点问题的混杂投影方法*

王亚琴[1], 曾六川[2]

(1. 绍兴文理学院 数学系,浙江 绍兴 312000;
2. 上海师范大学 数学系,上海 200234)

(张石生推荐)

摘要: 在 Banach 空间中,一个新的混杂投影迭代程序被引入来逼近广义混合平衡问题解集,变分不等式问题解集和一个相对弱非扩张映射的不动点集的公共元. 所得结果改进和推广了最近一些文献的相应结果.

关 键 词: 相对弱非扩张映射; 强收敛; 变分不等式问题; 逆强单调映射; 广义混合平衡问题

中图分类号: O177.91 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.02.012

引 言

设 E 是一实 Banach 空间,E^* 是 E 的对偶空间且 C 是 E 的非空闭凸子集. 设 $\Theta:C\times C\to R$ 是一双泛函,$\varphi:C\to R$ 是一实值函数,且 $A:C\to E^*$ 是一非线性映射. 从 E 到 2^{E^*} 的正规对偶映射定义为

$$Jx=\{f\in E^*:\langle x,f\rangle=\|x\|^2=\|f\|^2\},\qquad x\in E,$$

其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$为广义对偶对. 众所周知,若 E 是光滑的,则 J 是单值的且如果 E 是一致光滑的,则 J 在有界集上是一致连续的. 并且,若 E 是自反、严格凸且具有严格凸偶的 Banach 空间,则 J^{-1} 是从 E^* 到 E 的单值的一一映射,且 $JJ^{-1}=I_{E^*}$ 以及 $J^{-1}J=I_E$(参见文献[1]).

映射 $A:D(A)\subset E\to E^*$ 称为单调的,如果对任意 $x,y\in D(A)$ 使得

$$\langle x-y,Ax-Ay\rangle\geqslant 0.$$

A 称为 γ-逆强单调的,如果存在一正数 $\gamma>0$ 使得

$$\langle x-y,Ax-Ay\rangle\geqslant\gamma\|Ax-Ay\|^2,\qquad\forall x,y\in D(A).$$

如果 A 是 γ-逆强单调,那么它是 Lipschitz 连续具常数 $1/\gamma$, 即

$$\|Ax-Ay\|\leqslant(1/\gamma)\|x-y\|,\qquad x,y\in D(A).$$

* **收稿日期:** 2010-10-25; **修订日期:** 2010-12-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071169)

作者简介: 王亚琴(1979—),女,浙江桐乡人,讲师,博士(联系人. E-mail: wangyaqin0579@126.com);

曾六川(E-mail: zenglc@hotmail.com).

A 称为强单调的,如果对任意 $x,y \in D(A)$ 存在 $k \in (0,1)$ 使得

$$\langle x-y, Ax-Ay\rangle \geqslant k\|x-y\|^2.$$

广义混合平衡问题是求 $x \in C$ 使得

$$\Theta(x,y)+\varphi(y)-\varphi(x)+\langle Ax, y-x\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in C. \tag{1}$$

问题(1)的解集记为 GMEP. 近来,张石生[2]考虑过该问题.

问题(1)的特例:

若 $A=0$,则问题(1) 退化为下面的混合平衡问题:求 $x \in C$ 使得

$$\Theta(x,y)+\varphi(y)-\varphi(x) \geqslant 0, \qquad \forall y \in C,$$

该问题被 Ceng 和 Yao[3]研究过. 该问题的解集记为 MEP.

若 $\varphi=0$,则问题(1) 退化为下面的广义平衡问题:求 $x \in C$ 使得

$$\Theta(x,y)+\langle Ax, y-x\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in C,$$

该问题被 S. Takahashi 和 W. Takahashi[4]研究过.

若 $\varphi=0$ 且 $A=0$,则问题(1) 退化为下面的平衡问题:求 $x \in C$ 使得

$$\Theta(x,y) \geqslant 0, \qquad \forall y \in C. \tag{2}$$

问题(2)的解集记为 EP.

若 $\Theta=0, \varphi=0$,则问题(1) 退化为经典的变分不等式问题:求 $x \in C$ 使得

$$\langle Ax, y-x\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in C. \tag{3}$$

问题(3)的解集记为 $VI(C,A)$.

问题 (1) 一般包含物理、优化、变分不等式中的数值问题,最小最大问题,Nash 限制平衡问题等为特例,如文献[2-8].

设 E 是一光滑 Banach 空间. 函数 $\phi: E \times E \to R$ 定义为

$$\phi(x,y)=\|x\|^2-2\langle x, Jy\rangle+\|y\|^2, \qquad \forall x,y \in E,$$

该函数曾被 Alber[9],Kamimura 和 Takahashi[10]及 Reich[11]研究过. 据 ϕ 的定义有

$$(\|x\|-\|y\|)^2 \leqslant \phi(x,y) \leqslant (\|x\|+\|y\|)^2, \qquad \forall x,y \in E. \tag{4}$$

注意到,在 Hilbert 空间 H 中,$\phi(x,y)=\|x-y\|^2$, $x,y \in H$.

引理 1[9] 设 E 是实自反、严格凸、光滑的 Banach 空间, C 是 E 的非空闭凸子集, 对任意 $x \in E$. 则存在唯一元 $x_0 \in C$ 使得 $\phi(x_0,x)=\min\{\phi(z,x): z \in C\}$.

设 E 是自反、严格凸、光滑的 Banach 空间,C 是 E 的非空闭凸子集. 由引理 1,定义广义投影算子 $\Pi_C: E \to C$ 为对任给 $x \in E$,$\Pi_C x$ 为 $\phi(z,x)$ 的最小值点,即 $\Pi_C x = x_0$,其中 x_0 是最小化问题

$$\phi(x_0,x)=\min\{\phi(z,x): z \in C\}$$

的唯一解,该广义投影算子是由 Alber[9]最先引入的.

设 T 是从 C 到自身的映射. 记 T 的不动点集为 $F(T)$. 点 $p \in C$ 称为 T 的渐近不动点如果存在 C 中的序列 $\{x_n\}$ 使得 $\{x_n\}$ 弱收敛到 p 且 $\lim_{n\to\infty}(Tx_n-x_n)=0$. 记 T 的渐近不动点集为 $\hat{F}(T)$. 称 T 为非扩张映射如果对任意 $x,y \in C$ 满足$\|Tx-Ty\| \leqslant \|x-y\|$ 和相对非扩张映射(见文献[12-13]) 如果 $\hat{F}(T) = F(T)$ 且对任意 $x \in C$ 和 $p \in F(T)$ 满足 $\phi(p,Tx) \leqslant \phi(p,x)$. 点 $p \in C$ 称为 T 的强渐近不动点如果存在 C 中的序列 $\{x_n\}$ 使得 $\{x_n\}$ 强收敛到 p 且 $\lim_{n\to\infty}(Tx_n-x_n)=0$. 记 T 的强渐近不动点集为 $\tilde{F}(T)$. 映射 T 称为相对弱非扩张如果 $\tilde{F}(T)=F(T)$ 且 $\phi(p,Tx) \leqslant \phi(p,x)$ 对任意 $x \in C$ 和 $p \in F(T)$ 成立. 显然相对非扩张映射是相对弱非扩张映射(见文献[5]). T 称为 拟-ϕ-非扩张映射如果 $F(T) \neq \emptyset$ 且 $\phi(p,Tx) \leqslant \phi(p,x)$ 对

任意 $x \in C$ 和 $p \in F(T)$ 成立. 拟-ϕ-非扩张映射类比相对弱非扩张映射类更广,因为后者要求 $\widetilde{F}(T)=F(T)$.

如果 E 是光滑、自反、严格凸的 Banach 空间且 $T:E \to E$ 是相对弱非扩张映射,则 $F(T)$ 是闭凸集(见文献[5]).

在 2005 年,Matsushita 和 Takahashi[6] 在 Banach 空间 E 中建议了如下与相对非扩张映射 T 和广义投影有关的混杂迭代方法:

$$\begin{cases} \text{任取 } x_0 \in C, \\ y_n = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JTx_n), \\ C_n = \{z \in C : \phi(z,y_n) \leqslant \phi(z,x_n)\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, Jx_0 - Jx_n \rangle \geqslant 0\}, \\ x_{n+1} = \Pi_{C_n \cap Q_n} x_0. \end{cases}$$

他们证明了 $\{x_n\}$ 强收敛到 $\Pi_{F(T)}x_0$,其中 $\Pi_{F(T)}$ 是 E 到 $F(T)$ 上的广义投影算子.

在 2008 年,Takahashi 和 Zembayashi[7] 建议了下列相对非扩张映射的修正的迭代程序:

$$\begin{cases} \text{任取 } x_0 = x \in C,\ C_0 = C, \\ y_n = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JTx_n), \\ u_n \in C \text{ 使得 } \Theta(u_n,y) + \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n, Ju_n - Jy_n \rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in C, \\ C_n = \{z \in C : \phi(z,u_n) \leqslant \phi(z,x_n)\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, Jx - Jx_n \rangle \geqslant 0\}, \\ x_{n+1} = \Pi_{C_n \cap Q_n} x. \end{cases}$$

他们证明了 $\{x_n\}$ 强收敛到 $\Pi_{F(T)\cap \mathrm{EP}}x$.

近来,Habtu 和 Naseer[5] 引入了下列迭代程序来寻找变分不等式问题解集和一个相对弱非扩张映射不动点集的公共元:

$$\begin{cases} \text{任取 } x_0 \in C, \\ y_n = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \alpha_n Ax_n), \\ z_n = Ty_n, \\ H_0 = \{v \in C : \phi(v,z_0) \leqslant \phi(v,y_0) \leqslant \phi(v,x_0)\}, \\ H_n = \{v \in H_{n-1} \cap W_{n-1} : \phi(v,z_n) \leqslant \phi(v,y_n) \leqslant \phi(v,x_n)\}, \\ W_0 = C, \\ W_n = \{v \in W_{n-1} \cap H_{n-1} : \langle x_n - v, Jx_0 - Jx_n \rangle \geqslant 0\}, \\ x_{n+1} = \Pi_{H_n \cap W_n} x_0, \qquad n \geqslant 0. \end{cases}$$

最近,Chang,Lee 和 Chan[8] 建议了如下混杂迭代程序:

任取 $x_0 \in C$,

$z_n = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JTx_n)$,

$y_n = J^{-1}(\beta_n Jx_n + (1-\beta_n)JSz_n)$,

$u_n \in C$ 使得

$$\Theta(u_n,y) + \langle Au_n, y - u_n \rangle + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, Ju_n - Jy_n \rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in C,$$

$$H_n=\{v\in C:\phi(v,u_n)\leqslant\beta_n\phi(v,x_n)+(1-\beta_n)\phi(v,z_n)\leqslant\phi(v,x_n)\},$$
$$W_n=\{v\in C:\langle x_n-v,Jx_0-Jx_n\rangle\geqslant 0\},$$
$$x_{n+1}=\Pi_{H_n\cap W_n}x_0,\qquad n\geqslant 0,$$

其中，$T,S:C\to C$ 是两个相对非扩张映射. 在合适的条件下他们证明了序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $\Pi_{F(S)\cap F(T)\cap \mathrm{GEP}}x_0$.

受以上工作的启发,本文在 Banach 空间中引入一个新的混杂投影迭代程序,并证明了该程序强收敛于广义混合平衡问题解集,变分不等式解集和一个相对弱非扩张映射的不动点集的公共元.

1 预 备 知 识

设 E 是一个赋范线性空间且 $\dim E\geqslant 2$. E 的光滑模 $\rho_E:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 定义为

$$\rho_E(\tau):=\sup\left\{\frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2}-1:\|x\|=1,\|y\|=\tau\right\}.$$

称 E 是光滑的如果 $\rho_E(\tau)>0,\forall\tau>0$. 称 E 是一致光滑的当且仅当

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\rho_E(t)}{t}=0.$$

E 的凸模 $\delta_E:(0,2]\to[0,1]$ 定义为

$$\delta_E(\varepsilon):=\inf\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|:\|x\|=\|y\|=1,\varepsilon=\|x-y\|\right\}.$$

E 称为一致凸的当且仅当 $\delta_E(\varepsilon)>0$ 对每一 $\varepsilon\in(0,2]$ 都成立. 设 $p>1$,则 E 称为 p- 一致凸的如果存在常数 $c>0$ 使得 $\delta_E(\varepsilon)\geqslant c\varepsilon^p$ 对每一 $\varepsilon\in(0,2]$ 都成立. 注意到 p- 一致凸是一致凸. 众所周知(例如,见文献[14])

$$L_p(l_p)\text{ 或 }W_m^p\text{ 是}\begin{cases}p\text{- 一致凸}, & \text{如果 } p\geqslant 2;\\ 2\text{- 一致凸}, & \text{如果 } 1<p\leqslant 2.\end{cases}$$

下面我们将用到以下引理.

引理 1.1[14] 设 E 是一 2-一致凸和光滑的 Banach 空间. 则对任意 $x,y\in E$, 我们有

$$\|x-y\|\leqslant\frac{2}{c^2}\|Jx-Jy\|,\tag{5}$$

其中 J 是 E 的正规对偶映象且 $1/c(0<c\leqslant 1)$ 是 E 的 2-一致凸常数.

引理 1.2[9-10] 设 E 是实自反、光滑、严格凸的 Banach 空间, C 是 E 的非空闭凸子集. 则下列结论成立:

1) $\phi(y,\Pi_Cx)+\phi(\Pi_Cx,x)\leqslant\phi(y,x),\qquad\forall x\in E,y\in C$;

2) 假设 $x\in E$ 及 $z\in C$, 则

$$z=\Pi_Cx\Leftrightarrow\langle z-y,Jx-Jz\rangle\geqslant 0,\qquad\forall y\in C.$$

引理 1.3[10] 设 E 是实光滑、严格凸的 Banach 空间, $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是 E 中的两个序列. 如果 $\{x_n\}$ 或 $\{y_n\}$ 是有界的且当 $n\to\infty$, $\phi(x_n,y_n)\to 0$,那么当 $n\to\infty$, $x_n-y_n\to 0$.

引理 1.4[15] 设 E 是实光滑的 Banach 空间, $A:E\to E^*$ 是极大单调映射,则 $A^{-1}(0)$ 是 E 闭凸子集.

用 $N_C(v)$ 表示 C 在点 $v\in C$ 处的正规锥,即 $N_C(v):=\{x^*\in E^*:\langle v-y,x^*\rangle\geqslant 0,\forall y\in C\}$.

接下来我们将用到下面引理.

引理 1.5[16] 设 C 是 Banach 空间 E 的非空闭凸子集,$A:C\to E^*$ 是一单调、半连续算子.定义算子 $T\subset E\times E^*$ 如下:

$$Tv=\begin{cases}Av+N_C(v), & v\in C,\\ \varnothing, & v\notin C.\end{cases}$$

则 T 是极大单调的且 $T^{-1}(0)=\mathrm{VI}(C,A)$.

在文献[9]中, Alber 引入和研究了函数 $V:E\times E^*\to R$ 如下:

$$V(x,x^*)=\|x\|^2-2\langle x,x^*\rangle+\|x^*\|^2,\qquad \forall x\in E,x^*\in E^*.$$

也就是说,$V(x,x^*)=\phi(x,J^{-1}x^*)$, $\forall x\in E$, $x^*\in E^*$.

引理 1.6[9] 设 E 是自反、严格凸、光滑的 Banach 空间且 E^* 是 E 的对偶空间.那么

$$V(x,x^*)+2\langle J^{-1}x^*-x,y^*\rangle\leqslant V(x,x^*+y^*),$$

对所有 $x\in E$ 和 x^*, $y^*\in E^*$ 成立.

为了求解平衡问题,假设 Θ 满足下列条件:

(A1) $\Theta(x,x)=0$, $\forall x\in C$;

(A2) Θ 是单调的,即,$\Theta(x,y)+\Theta(y,x)\leqslant 0$, $\forall x,y\in C$;

(A3) $\forall x,y,z\in C$,

$$\lim_{t\to 0}\Theta(tz+(1-t)x,y)\leqslant\Theta(x,y);$$

(A4) $\forall x\in C, y\mapsto\Theta(x,y)$ 是凸和下半连续的.

引理 1.7[2] 设 C 是光滑、严格凸、自反 Banach 空间 E 的非空闭凸子集.设 $B:C\to E^*$ 是连续单调映射,$\varphi:C\to R$ 是凸和下半连续函数,且 Θ: $C\times C\to R$ 满足(A1)~(A4).对 $r>0$ 和 $x\in E$,则存在 $u\in C$ 使得

$$\Theta(u,y)+\langle Bu,y-u\rangle+\varphi(y)-\varphi(u)+\frac{1}{r}\langle y-u,Ju-Jx\rangle\geqslant 0,\qquad \forall y\in C.$$

定义映射 $T_r:C\to C$ 如下:

$$T_r(x)=\Big\{u\in C:\ \Theta(u,y)+\langle Bu,y-u\rangle+\varphi(y)-\varphi(u)+\frac{1}{r}\langle y-u,Ju-Jx\rangle\geqslant 0,\ \forall y\in C\Big\},$$

对所有的 $x\in C$.那么,下面的结论成立:

1) T_r 单值;

2) T_r 是强非扩张映象,即对任意 $x,y\in E$,

$$\langle T_rx-T_ry,\ JT_rx-JT_ry\rangle\leqslant\langle T_rx-T_ry,\ Jx-Jy\rangle;$$

3) $F(T_r)=\mathrm{GMEP}$;

4) GMEP 是闭凸集;

5) $\phi(p,T_rz)+\phi(T_rz,z)\leqslant\phi(p,z)$, $\forall p\in F(T_r)$, $z\in E$.

2 强收敛定理

定理 2.1 设 E 是一实一致光滑、2-一致凸的 Banach 空间, C 是 E 的非空闭凸子集.设 A: $C\to E^*$ 是 γ-逆强单调映射, $B:C\to E^*$ 是单调连续映射.设 $T:C\to C$ 是相对弱非扩张映射且 $\Omega:=F(T)\cap\mathrm{VI}(C,A)\cap\mathrm{GMEP}\neq\varnothing$.假设 $\|Ax\|\leqslant\|Ax-Ap\|$ 对所有 $x\in C$ 和 $p\in\mathrm{VI}(C,A)$ 成立.假设 $0<a<\lambda_n<b=c^2\gamma/2$,其中 c 是式(5)中的常数.设 $\{r_n\}\subset[c^*,+\infty)$ 对某

个 $c^* > 0$ 成立. 定义序列 $\{x_n\}$ 如下:

$$
\begin{cases}
\text{任取 } x_0 \in C, \\
y_n = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda_n A x_n), \\
z_n = J^{-1}(\beta_n Jx_n + (1-\beta_n) JTy_n), \\
u_n = T_{r_n} z_n, \\
H_0 = \{ v \in C : \phi(v, u_0) \leqslant \\
\qquad \beta_0 \phi(v, x_0) + (1-\beta_0)\phi(v, y_0) \leqslant \phi(v, x_0) \}, \\
H_n = \{ v \in H_{n-1} \cap W_{n-1} : \phi(v, u_n) \leqslant \\
\qquad \beta_n \phi(v, x_n) + (1-\beta_n)\phi(v, y_n) \leqslant \phi(v, x_n) \}, \\
W_0 = C, \\
W_n = \{ v \in W_{n-1} \cap H_{n-1} : \langle x_n - v, Jx_0 - Jx_n \rangle \geqslant 0 \}, \\
x_{n+1} = \Pi_{H_n \cap W_n} x_0, \qquad n \geqslant 0,
\end{cases}
\tag{$*$}
$$

其中, J 是正规对偶映射, $\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的序列满足 $\liminf_{n\to\infty}(1-\beta_n) > 0$. 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $\Pi_\Omega x_0$, 其中 Π_Ω 是 E 到 Ω 上的广义投影.

证明 第 1 步 首先我们证明对所有的 $n \geqslant 0$, H_n 和 W_n 都是 C 的闭凸子集且 $\Omega \subset H_n \cap W_n$, $\forall n \geqslant 0$.

事实上, 显然对所有的 $n \geqslant 0$, W_n 是闭凸集且 H_n 是闭集. 因为

$$
\begin{aligned}
&\phi(v, u_n) \leqslant \beta_n \phi(v, x_n) + (1-\beta_n)\phi(v, y_n) \Leftrightarrow \\
&\quad 2\langle v, \beta_n Jx_n + (1-\beta_n) Jy_n - Ju_n \rangle \leqslant \\
&\quad (1-\beta_n)\|y_n\|^2 - \|u_n\|^2 + \beta_n \|x_n\|^2
\end{aligned}
$$

且

$$
\beta_n \phi(v, x_n) + (1-\beta_n)\phi(v, y_n) \leqslant \phi(v, x_n) \Leftrightarrow \phi(v, y_n) \leqslant \phi(v, x_n),
$$

故对每个 $n \geqslant 0$, H_n 是凸集. 因而对所有的 $n \geqslant 0$, $H_n \cap W_n$ 是闭凸集.

对任给的 $p \in \Omega$, 由引理 1.7 的 5) 和 T 是相对弱非扩张映射, 有

$$
\begin{aligned}
&\phi(p, u_0) = \phi(p, T_{r_0} z_0) \leqslant \\
&\quad \phi(p, z_0) = \phi(p, J^{-1}(\beta_0 Jx_0 + (1-\beta_0) JTy_0)) = \\
&\quad \|p\|^2 - 2\langle p, \beta_0 Jx_0 + (1-\beta_0) JTy_0 \rangle + \|\beta_0 Jx_0 + (1-\beta_0) JTy_0\|^2 \leqslant \\
&\quad \|p\|^2 - 2\beta_0 \langle p, Jx_0 \rangle - 2(1-\beta_0)\langle p, JTy_0 \rangle + \\
&\quad \beta_0 \|x_0\|^2 + (1-\beta_0)\|Ty_0\|^2 = \\
&\quad \beta_0 \phi(p, x_0) + (1-\beta_0)\phi(p, Ty_0) \leqslant \\
&\quad \beta_0 \phi(p, x_0) + (1-\beta_0)\phi(p, y_0),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

并且据引理 1.2, 引理 1.6 以及对 A 的假设, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\phi(p, y_0) = \phi(p, \Pi_C J^{-1}(Jx_0 - \lambda_0 A x_0)) \leqslant \\
&\quad \phi(p, J^{-1}(Jx_0 - \lambda_0 A x_0)) \leqslant \\
&\quad V(p, Jx_0 - \lambda_0 A x_0) \leqslant \\
&\quad V(p, Jx_0 - \lambda_0 A x_0 + \lambda_0 A x_0) - 2\langle J^{-1}(Jx_0 - \lambda_0 A x_0) - p, \lambda_0 A x_0 \rangle = \\
&\quad V(p, Jx_0) - 2\lambda_0 \langle J^{-1}(Jx_0 - \lambda_0 A x_0) - J^{-1}(Jx_0), Ax_0 \rangle - 2\lambda_0 \langle x_0 - p, Ax_0 \rangle \leqslant
\end{aligned}
$$

$$V(p,Jx_0) - 2\lambda_0\langle J^{-1}(Jx_0 - \lambda_0 Ax_0) - J^{-1}(Jx_0),Ax_0\rangle -$$
$$2\lambda_0\langle x_0 - p,Ax_0 - Ap\rangle - 2\lambda_0\langle x_0 - p,Ap\rangle \leqslant$$
$$\phi(p,x_0) + \frac{4}{c^2}\lambda_0^2\|Ax_0\|^2 - 2\lambda_0\gamma\|Ax_0 - Ap\|^2 \leqslant$$
$$\phi(p,x_0) + 2\lambda_0\left(\frac{2\lambda_0}{c^2} - \gamma\right)\|Ax_0 - Ap\|^2 \leqslant \phi(p,x_0). \tag{7}$$

所以 $p \in H_0$. 因此 $p \in H_0 \cap W_0$. 假设 $\Omega \subset H_{n-1} \cap W_{n-1}$. 则由式(6)和(7)的证明方法可得
$$\phi(p,u_n) \leqslant \beta_n\phi(p,x_n) + (1-\beta_n)\phi(p,y_n) \leqslant \phi(p,x_n), \tag{8}$$
故 $p \in H_n$. 因为 $x_n = \Pi_{H_{n-1}\cap W_{n-1}}x_0$, 由引理 1.2 有
$$\langle x_n - z,Jx_0 - Jx_n\rangle \geqslant 0, \qquad \forall z \in H_{n-1} \cap W_{n-1}.$$
这就得到 $\langle x_n - p,Jx_0 - Jx_n\rangle \geqslant 0$. 因此 $p \in W_n$. 从而 $\Omega \subset H_n \cap W_n$. 根据归纳法有对每个 $n \geqslant 0$, $\Omega \subset H_n \cap W_n$. 由引理 1.4 和 1.5 知 $VI(C,A)$ 是闭凸集. 故 Ω 是闭凸集. 因此由(*)生成的序列 $\{x_n\}$ 定义是合理的.

第 2 步 下证 $\{x_n\}$ 是一 Cauchy 列.

设 $p \in \Omega$. 由 W_n 的定义,引理 1 和 1.4 有 $x_n = \Pi_{W_n}x_0$,
$$\phi(p,x_n) + \phi(x_n,x_0) \leqslant \phi(p,x_0).$$
故 $\{x_n\}$ 是有界集. 又因为 $x_n = \Pi_{W_n}x_0, x_{n+1} = \Pi_{H_n\cap W_n}x_0 \in W_n$, 由引理 1.2,我们有
$$\phi(x_{n+1},x_n) + \phi(x_n,x_0) \leqslant \phi(x_{n+1},x_0),$$
因此 $\{\phi(x_n,x_0)\}$ 是不减的. 故 $\lim_{n\to\infty}\{\phi(x_n,x_0)\}$ 存在. 又由引理 1.2,对于任意正整数 m 有
$$\phi(x_{n+m},x_n) = \phi(x_{n+m},\Pi_{W_n}x_0) \leqslant$$
$$\phi(x_{n+m},x_0) - \phi(\Pi_{W_n}x_0,x_0) =$$
$$\phi(x_{n+m},x_0) - \phi(x_n,x_0) \to 0 \qquad (n,m \to \infty). \tag{9}$$
因而由引理 1.3 得 $\|x_{n+m} - x_n\| \to 0(n,m \to \infty)$,从而 $\{x_n\}$ 是一 Cauchy 序列. 所以存在 $q \in C$ 使得 $x_n \to q(n \to \infty)$.

第 3 步 证明 $\|y_n - Ty_n\| \to 0(n \to \infty)$ 且 $q \in F(T)$.

因为 $x_{n+1} \in H_n$, 我们有
$$\phi(x_{n+1},u_n) \leqslant \phi(x_{n+1},x_n)$$
和
$$\phi(x_{n+1},y_n) \leqslant \phi(x_{n+1},x_n).$$
据式(9)和引理 1.3,我们有
$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - u_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - y_n\| = 0,$$
因而
$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - u_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = \lim_{n\to\infty}\|u_n - y_n\| = 0. \tag{10}$$
由式(6)和(8)中的证明方法,有
$$\phi(p,u_n) \leqslant \phi(p,z_n) \leqslant \phi(p,x_n). \tag{11}$$
由式(8)、(10)、(11),引理 1.7 以及 J 在有界集上的一致连续性可得对任给的 $p \in \Omega$ 有
$$\phi(u_n,z_n) = \phi(T_{r_n}z_n,z_n) \leqslant \phi(p,z_n) - \phi(p,T_{r_n}z_n) \leqslant \phi(p,x_n) - \phi(p,u_n) =$$
$$\|x_n\|^2 - \|u_n\|^2 - 2\langle p,Jx_n - Ju_n\rangle \leqslant$$
$$(\|x_n\| - \|u_n\|)(\|x_n\| + \|u_n\|) - 2\|p\|\|Jx_n - Ju_n\| \to 0.$$

由引理 1.2,我们有

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - z_n\| = 0. \tag{12}$$

故 $\|z_n - x_n\| \to 0$. 由 J 在有界集上的一致连续性我们有

$$\|Jz_n - Jx_n\| = \|\beta_n Jx_n + (1-\beta_n)JTy_n - Jx_n\| = (1-\beta_n)\|Jx_n - JTy_n\| \to 0.$$

因为 $\liminf_{n\to\infty}(1-\beta_n) > 0$ 且 J^{-1} 在有界集上是一致连续的,我们有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - Ty_n\| = 0. \tag{13}$$

由式(10)和(13)有

$$\|y_n - Ty_n\| \leqslant \|y_n - x_n\| + \|x_n - Ty_n\| \to 0. \tag{14}$$

因为 $x_n \to q \in C$,由式(10) 得 $y_n \to q$. 所以 $q \in F(T)$.

第 4 步 下证 $q \in \mathrm{VI}(C,A) \cap \mathrm{GMEP}$.

定义算子 $S \subset E \times E^*$ 如下:

$$Sv = \begin{cases} Av + N_C(v), & v \in C, \\ \varnothing, & v \notin C, \end{cases}$$

由引理 1.5, S 是极大单调的且 $S^{-1}(0) = \mathrm{VI}(C,A)$. 设 $(v,w) \in G(S)$. 因为 $w \in Sv = Av + N_C(v)$,我们有 $w - Av \in N_C(v)$. 而且由 $y_n \in C$ 可得

$$\langle v - y_n, w - Av\rangle \geqslant 0. \tag{15}$$

另一方面,由 $y_n = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n)$ 和引理 1.2 得

$$\langle v - y_n, Jy_n - (Jx_n - \lambda_n Ax_n)\rangle \geqslant 0,$$

因此

$$\left\langle v - y_n, \frac{Jx_n - Jy_n}{\lambda_n} - Ax_n\right\rangle \leqslant 0. \tag{16}$$

所以由式(15)和(16)有

$$\begin{aligned}
&\langle v - y_n, w\rangle \geqslant \langle v - y_n, Av\rangle \geqslant \\
&\quad \langle v - y_n, Av\rangle + \left\langle v - y_n, \frac{Jx_n - Jy_n}{\lambda_n} - Ax_n\right\rangle = \\
&\quad \left\langle v - y_n, Av - Ax_n - \frac{Jx_n - Jy_n}{\lambda_n}\right\rangle \geqslant \\
&\quad \langle v - y_n, Av - Ay_n\rangle + \langle v - y_n, Ay_n - Ax_n\rangle - \left\langle v - y_n, \frac{Jx_n - Jy_n}{\lambda_n}\right\rangle \geqslant \\
&\quad -\|v - y_n\|\,\|Ay_n - Ax_n\| - \|v - y_n\|\left\|\frac{Jx_n - Jy_n}{c^*}\right\|.
\end{aligned} \tag{17}$$

因为 J 在有界集上是一致连续的,由式(10) 可得 $\langle v - q, w\rangle \geqslant 0\,(n \to \infty)$. 所以 $q \in S^{-1}(0)$,即 $q \in \mathrm{VI}(C,A)$.

下证 $q \in \mathrm{GMEP} = F(T_r)$. 设

$$H(u_n, y) = \Theta(u_n, y) + \langle Bu_n, y - u_n\rangle + \varphi(y) - \varphi(u_n), \qquad \forall y \in C.$$

由式(10)和(12) 有 $u_n \to q, z_n \to q\,(n \to \infty)$. 由 J 在有界集上的一致连续性和式(12),我们有 $\lim_{n\to\infty}\|Ju_n - Jz_n\| = 0$. 所以由 $r_n \geqslant c^*$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|Ju_n - Jz_n\|}{r_n} = 0.$$

根据 $u_n = T_{r_n} z_n$ 有

$$H(u_n,y)+\frac{1}{r_n}\langle y-u_n,Ju_n-Jz_n\rangle\geq 0,\qquad \forall y\in C.$$

结合上式及(A2)有

$$\|y-u_n\|\frac{\|Ju_n-Jz_n\|}{r_n}\geq\frac{1}{r_n}\langle y-u_n,Ju_n-Jz_n\rangle\geq$$

$$-H(u_n,y)\geq H(y,u_n),\qquad \forall y\in C.$$

上式取极限,令 $n\to\infty$,由(A4)有 $H(y,q)\leq 0,\forall y\in C$. 对任意 $t\in(0,1)$ 和 $y\in C$,令 $y_t=ty+(1-t)q\in C$. 因此 $H(y_t,q)\leq 0$. 由(A1)和(A4),我们有

$$0=H(y_t,y_t)\leq tH(y_t,y)+(1-t)H(y_t,q)\leq tH(y_t,y),$$

即,$H(y_t,y)\geq 0$. 因此由(A3),令 $t\to 0$,有 $H(q,y)\geq 0,\forall y\in C$,故 $q\in$ GMEP. 所以 $q\in\Omega$.

第 5 步 最后证明 $q=\Pi_\Omega x_0$.

因为 $x_{n+1}=\Pi_{H_n\cap W_n}x_0$,所以有

$$\langle x_{n+1}-z,Jx_0-Jx_{n+1}\rangle\geq 0,\qquad \forall z\in H_n\cap W_n. \tag{18}$$

对式(18)取极限,且由对所有 $n\geq 0,\Omega\subset H_n\cap W_n$ 可得

$$\langle q-z,Jx_0-Jq\rangle\geq 0,\qquad \forall z\in\Omega.$$

因此由引理 1.2,有 $q=\Pi_\Omega x_0$.

在定理 2.1 中对所有 $n\geq 0$,令 $\beta_n=0$,可得下列推论.

推论 2.1 设 E 是一实一致光滑、2- 一致凸的 Banach 空间. 设 C 是 E 的非空闭凸子集. 设 $A:C\to E^*$ 是 γ-逆强单调映射,$B:C\to E^*$ 是单调连续映射. 设 $T:C\to C$ 是相对弱非扩张映射且 $\Omega:=F(T)\cap \mathrm{VI}(C,A)\cap \mathrm{GMEP}\neq\emptyset$. 假设 $\|Ax\|\leq\|Ax-Ap\|$ 对所有的 $x\in C$ 和 $p\in \mathrm{VI}(C,A)$ 都成立. 假设 $0<a<\lambda_n<b=c^2\gamma/2$,其中 c 是式(5)中的常数. 设 $\{r_n\}\subset[c^*,+\infty)$ 对某个 $c^*>0$ 成立. 定义序列 $\{x_n\}$ 为

$$\begin{cases}\text{任取 } x_0\in C,\\ y_n=\Pi_C J^{-1}(Jx_n-\lambda_n Ax_n),\\ z_n=Ty_n,\\ u_n=T_{r_n}z_n,\\ H_0=\{v\in C:\phi(v,u_0)\leq\phi(v,y_0)\leq\phi(v,x_0)\},\\ H_n=\{v\in H_{n-1}\cap W_{n-1}:\phi(v,u_n)\leq\phi(v,y_n)\leq\phi(v,x_n)\},\\ W_0=C,\\ W_n=\{v\in W_{n-1}\cap H_{n-1}:\langle x_n-v,Jx_0-Jx_n\rangle\geq 0\},\\ x_{n+1}=\Pi_{H_n\cap W_n}x_0,\qquad n\geq 0,\end{cases}$$

其中 J 是正规对偶映象. 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $\Pi_\Omega x_0$,其中 Π_Ω是从 E 到 Ω 上的广义投影.

注 1 若 A 是 Lipschitz 强单调映射,则定理 2.1 和推论 2.1 仍成立. 事实上,设 A 是强单调和 Lipschitz 连续的,分别具常数 $k,L>0$,则 A 是逆强单调的,具常数 k/L^2,见文献[5]的推论 3.6. 且在定理 2.1 和推论 2.1 中取 $b=(c^2k)/(2L^2)$.

定理 2.2 设 E 是一致光滑和一致凸的 Banach 空间且 C 是 E 的非空闭凸子集. 设 $A:C\to E^*$ 是一致连续单调映射,$B:C\to E^*$ 是单调连续映射. 设 $T:C\to C$ 是一个相对弱非扩张映射且 $\Omega:=F(T)\cap \mathrm{VI}(C,A)\cap \mathrm{GMEP}\neq\emptyset$. 设 $J^{-1}S$ 是拟 -ϕ- 非扩张映射,其中 $Sx:=Jx-Ax$. 假设 0

$< a < \lambda_n \leqslant 1$. 设 $\{r_n\} \subset [c^*, +\infty)$ 对某个常数 $c^* > 0$ 都成立. 定义序列 $\{x_n\}$ 如下:

$$\begin{cases} \text{任取 } x_0 \in C, \\ y_n = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n), \\ z_n = Ty_n, \\ u_n = T_{r_n} z_n, \\ H_0 = \{v \in C: \phi(v,u_0) \leqslant \phi(v,y_0) \leqslant \phi(v,x_0)\}, \\ H_n = \{v \in H_{n-1} \cap W_{n-1}: \phi(v,u_n) \leqslant \phi(v,y_n) \leqslant \phi(v,x_n)\}, \\ W_0 = C, \\ W_n = \{v \in W_{n-1} \cap H_{n-1}: \langle x_n - v, Jx_0 - Jx_n \rangle \geqslant 0\}, \\ x_{n+1} = \Pi_{H_n \cap W_n} x_0, \qquad n \geqslant 0, \end{cases}$$

其中 J 是正规对偶映射. 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $\Pi_\Omega x_0$,其中 Π_Ω 是 E 到 Ω 上的广义投影.

证明　类似定理2.1 的证明,可得对每一 $n \geqslant 0$, H_n 和 W_n 都是闭凸子集. 任取 $p \in \Omega$,由引理1.2 和1.7,以及 T 的相对弱非扩张性和 $J^{-1}S$ 的拟 -ϕ- 非扩张性,我们有

$$\begin{aligned} &\phi(p,u_n) = \phi(p,T_{r_n}z_n) \leqslant \phi(p,z_n) = \phi(p,Ty_n) \leqslant \\ &\quad \phi(p,y_n) = \phi(p,\Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n)) \leqslant \\ &\quad \phi(p,J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n)) = \\ &\quad \phi(p,J^{-1}((1-\lambda_n)Jx_n + \lambda_n Sx_n)) \leqslant \\ &\quad \|p\|^2 - 2(1-\lambda_n)\langle p,Jx_n\rangle - 2\lambda_n\langle p,Sx_n\rangle + \\ &\quad (1-\lambda_n)\|x_n\|^2 + \lambda_n\|Sx_n\|^2 = \\ &\quad (1-\lambda_n)\phi(p,x_n) + \lambda_n\phi(p,J^{-1}Sx_n) \leqslant \\ &\quad (1-\lambda_n)\phi(p,x_n) + \lambda_n\phi(p,x_n) = \phi(p,x_n), \end{aligned}$$

所以 $p \in H_n$. 从而 $\Omega \subset H_n$. 下面类似定理2.1 中证明方法,定理得证.

如果 $E = H$ 是 Hilbert 空间, 那么 $J = J^{-1} = I$ 是 H 上的恒等映射, 则由定理2.1 可得下面推论.

推论2.2　设 H 是一实 Hilbert 空间且 C 是 H 的非空闭凸子集. 设 $A: C \to H$ 是一 γ-逆强单调映射, $B: C \to H$ 是一单调连续映射. 设 $T: C \to C$ 是一相对弱非扩张映射且满足 $\Omega := F(T) \cap \mathrm{VI}(C, A) \cap \mathrm{GMEP} \neq \varnothing$. 假设 $\|Ax\| \leqslant \|Ax - Ap\|$ 对所有的 $x \in C$ 和 $p \in \mathrm{VI}(C,A)$ 都成立. 又假设 $0 < a < \lambda_n < b = (c^2\gamma)/2$,其中 c 是式(5) 中的常数. 设 $\{r_n\} \subset [c^*, +\infty)$ 对某个 $c^* > 0$ 成立. 定义序列 $\{x_n\}$ 如下:

$$\begin{aligned} &\text{任取 } x_0 \in C, \\ &y_n = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n), \\ &z_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)Ty_n, \\ &u_n = T_{r_n} z_n, \\ &H_0 = \{v \in C: \|v - u_0\|^2 \leqslant \\ &\qquad \beta_0\|v - x_0\|^2 + (1-\beta_0)\|v - y_0\|^2 \leqslant \|v - x_0\|^2\}, \\ &H_n = \{v \in H_{n-1} \cap W_{n-1}: \|v - u_n\|^2 \leqslant \\ &\qquad \beta_n\|v - x_n\|^2 + (1-\beta_n)\|v - y_n\|^2 \leqslant \|v - x_n\|^2\}, \\ &W_0 = C, \end{aligned}$$

$$W_n = \{ v \in W_{n-1} \cap H_{n-1} : \langle x_n - v, x_0 - x_n \rangle \geqslant 0 \},$$
$$x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n} x_0, \qquad n \geqslant 0,$$

其中 $\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的序列且满足 $\liminf_{n\to\infty}(1-\beta_n) > 0$. 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $P_\Omega x_0$,其中 P_Ω 是 H 到 Ω 上的度量投影.

致谢 作者衷心感谢绍兴文理学院科研项目(09LG1002)的资助和审稿人所提出的宝贵意见.

参考文献:

[1] Takahashi W. *Nonlinear Functional Analysis*[M]. Tokyo: Kindikagaku, 1988. (in Japanese).

[2] 张石生. Banach 空间中广义混合平衡问题[J]. 应用数学和力学, 2009, **30**(9):1033-1041. (ZHANG Shi-sheng. Generalized mixed equilibrium problem in Banach spaces[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*(*English Edition*), 2009, **30**(9):1105-1112.)

[3] CENG Lu-chuan, YAO Jen-chih. A hybrid iterative scheme for mixed equilibrium problems and fixed point problems[J]. *J Comput Appl Math*, 2008, **214**(1): 186-201.

[4] Takahashi S, Takahashi W. Strong convergence theorem for a generalized equilibrium problem and a nonexpansive mapping in a Hilbert space[J]. *Nonlinear Anal*, 2008, **69**(3): 1025-1033.

[5] Habtu Zegeye, Naseer Shahzad. Strong convergence theorems for monotone mappings and relatively weak nonexpansive mappings[J]. *Nonlinear Anal*, 2009, **70**(7):2707-2716.

[6] Matsushita S Y, Takahashi W. A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space[J]. *J Approxim Theory*, 2005, **134**(2): 257-266.

[7] Takahashi W, Zembayashi K. Strong and weak convergence theorems for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings in Banach spaces[J]. *Nonlinear Anal*, 2009, **70**(1): 45-57.

[8] CHANG Shi-sheng, Lee Joseph H W, CHAN Chi-kin. A new hybrid method for solving a generalized equilibrium problem, solving a variational inequality problem and obtaining common fixed points in Banach spaces, with applications[J]. *Nonlinear Anal*, 2010, **73**(7): 2260-2270.

[9] Alber Y I. Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications[C]//Kartsatos A G. *Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type*. New York: Dekker, 1996: 15-50.

[10] Kamimura S, Takahashi W. Strong convergence of proximal-type algorithm in a Banach space [J]. *SIAM J Optim*, 2002, **13**(3): 938-945.

[11] Reich S. A weak convergence theorem for the alternating method with Bergman distance [C]//Kartsatos A G. *Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type*. New York: Dekker, 1996: 313-318.

[12] Butanriu D, Reich S, Zaslavski A J. Asymtotic behavior of relatively nonexpansive operators in Banach spaces[J]. *J Appl Anal*, 2001, **7**(2): 151-174.

[13] Butanriu D, Reich S, Zaslavski A J. Weakly convergence of orbits of nonlinear operators in reflexive Banach spaces[J]. *Numer Funct Anal Optim*, 2003, **24**(5): 489-508.

[14] XU Hong-kun. Inequalities in Banach spaces with applications[J]. *Nonlinear Anal*, 1991, **16**(12):1127-1138.

[15] Pascali D, Sburlan S. *Nonlinear Mappings of Monotone Type*[M]. Bucaresti, Romania: Edi-

tura Academiae, 1978.

[16] Rockfellar R T. Monotone operators and the proximal point algorith[J]. *SIAM J Control Optim*, 1976, **14**(5): 877-898.

Hybrid Projection Method for Generalized Mixed Equilibrium Problems, Variational Inequality Problems and Fixed Point Problems in Banach Spaces

WANG Ya-qin[1], ZENG Lu-chuan[2]

(1. *Department of Mathematics*, *Shaoxing University*, *Shaoxing*, *Zhejiang* 312000, *P. R. China*;
2. *Department of Mathematics*, *Shanghai Normal University*, *Shanghai* 200234, *P. R. China*)

Abstract: A new hybrid projection iterative scheme was introduced for approximating a common element of the solution set of a generalized mixed equilibrium problem, the solution set of a variational inequality problem and the set of fixed points of a relatively weak nonexpansive mapping in Banach spaces. The results obtained generalize and improve the recent ones announced by many others.

Key words: relatively weak nonexpansive mappings; strong convergence; variational inequality problems; inverse strongly monotone mappings; generalized mixed equilibrium problems