

开敞式索膜结构的气动失稳临界风速^{*}

魏德敏¹, 朱美玲², 李 頔¹

(1. 华南理工大学 亚热带建筑科学国家重点实验室, 广州 510640;
2. 华南理工大学 土木工程系, 广州 510640)

摘要: 考虑几何非线性的影响, 利用无限薄的旋涡薄层模拟气流在结构表面形成的扰动, 由非稳态 Bernoulli 方程和环量定理将空气压力表示成旋涡密度的函数; 然后由涡格法结合耦合边界条件求出旋涡密度, 根据系统的稳定性判据得到结构发散失稳临界风速的解析表达式. 通过三维开敞式膜结构的计算分析, 发现空间膜结构的曲率是影响结构气动失稳临界风速的主要因素.

关键词: 开敞式索膜结构; 临界风速; 涡格法
中图分类号: TU351 **文献标志码:** A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.03.002

引 言

随着科学的发展和技术水平的提高, 人们对大跨空间结构的需求逐渐增多. 近 10 年形态各异的轻质高强索膜结构在许多重大工程中得到应用. 虽然大跨索膜结构的抗震性能好, 但它们对风荷载较为敏感, 风荷载是此类结构设计的控制荷载. Sygulski^[1] 对一维膜结构的试验研究发现, 风速达到一定值时, 膜结构会产生发散失稳. Miyake 等^[2] 的实验亦发现悬索屋盖模型会产生气动失稳. 目前, 国内外已开展了一系列关于风荷载作用下索膜结构气动稳定性的理论研究^[3-5], 但是, 相比索膜结构的工程应用来说, 索膜结构的抗风理论研究滞后, 存在许多亟待解决的问题. 譬如相关风洞试验结果较少, 风振响应研究还未能形成一套完整的理论体系, 风荷载作用下的破坏机理尚不明确等.

本文对薄膜结构在风荷载作用下的气弹动力稳定性进行了初步研究. 通过对失稳临界风速解析表达式的数值计算得到了三维开敞式索膜结构气动失稳的临界风速. 发现三维索膜结构的初始曲率是结构气动失稳临界风速的主要影响因素.

1 动力平衡方程

1.1 膜内应力

在荷载作用下, 索膜结构的横向位移响应 w 远大于另外两个水平方向的位移响应 u, v , 需

^{*} 收稿日期: 2010-12-24; 修订日期: 2011-01-14
基金项目: 广东省自然科学基金资助项目(020904)
作者简介: 魏德敏(1955—), 女, 四川资中人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. Tel: +86-20-87113683; E-mail: dmwei@scut.edu.cn).

要考虑其几何非线性的影响,当忽略 u, v 和剪应变的贡献,得到的物理方程和相应的几何方程分别为^[3]

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2}(\varepsilon_x + \nu_2\varepsilon_y) , \\ \sigma_y = \frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2}(\nu_1\varepsilon_x + \varepsilon_y) , \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -k_{x0}w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 , \\ \varepsilon_y = -k_{y0}w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 . \end{cases} \quad (2)$$

则膜内应力可表示为

$$\begin{cases} T_x = T_{x0} + \bar{T}_x = T_{x0} + \sigma_x h , \\ T_y = T_{y0} + \bar{T}_y = T_{y0} + \sigma_y h , \end{cases} \quad (3)$$

其中, E_1, E_2 为膜材经纬向的弹性模量, ν_1, ν_2 为经纬向的 Poisson 比, T_{x0}, T_{y0} 为膜结构 x, y 方向的初始预张力, \bar{T}_x, \bar{T}_y 为膜结构 x, y 方向的附加张力, h 为膜材厚度.

1.2 表面气动力

对于不可压缩无粘性理想流体中的索膜结构,由非稳态 Bernoulli 方程可以得到其表面气动力^[6],以及结构上下表面的气动压力差:

$$p_i = -\rho\left(\frac{\partial\Phi_i^*}{\partial t} + V\frac{\partial\Phi_i^*}{\partial x}\right), \quad (4)$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = -\rho\left[V\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Delta\Phi}{\partial t}\right], \quad (5)$$

其中, ρ 和 V 是空气的密度和速度, Φ_i^* 为扰动速度势, p_i 为结构表面气压, $i = 1, 2$ 分别表示上、下表面, $\Delta\Phi = \Phi_1^* - \Phi_2^*$ 为结构上下表面的速度势之差.

速度势的求解需引入 Laplace 方程,过程和结果复杂.本文引入环量定理,将气压转换成旋涡密度的函数.根据环量的定义^[7]有

$$\Gamma(K) = \Delta\Phi(K) = \int_0^l (u_1 - u_2) dx, \quad (6)$$

旋涡薄层位于分离面处,分离面上下的速度 u_1, u_2 与旋涡密度 γ 之间存在关系:

$$\Delta u = u_1 - u_2 = \gamma, \quad (7)$$

则式(5)代入式(7)可得

$$\Delta p = -\rho V \gamma - \rho \int_0^x \frac{\partial \gamma}{\partial t} dx. \quad (8)$$

1.3 动力平衡方程

不考虑剪力的作用,初始时刻和任意时刻膜结构的横向应力平衡方程分别为^[8]

$$T_{x0} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + T_{y0} \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} = 0, \quad (9)$$

$$T_x \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 z_s}{\partial y^2} = m_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \xi_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta p, \quad (10)$$

其中, $z_s = z_0 + w$ 为响应后结构的 z 向坐标, z_0 为初始状态下结构的 z 向坐标, m_s 为单位面积的膜材质量, ξ_0 为结构阻尼, 一般取 $\xi_0 = 0$ 。

将式(3)和式(9)代入式(10)并忽略高阶非线性项得到:

$$T_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \bar{T}_x \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \bar{T}_y \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} = m_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho V \gamma(x, y, t) - \rho \int_0^x \frac{\partial \gamma(x, y, t)}{\partial t} dx. \quad (11)$$

2 典型算例

考虑图1所示开敞式双曲抛物面索膜结构, 其中, $2l_a$, $2l_b$ 和 f_1 , f_2 分别为 x , y 方向的跨度和矢高, 实线表示初始张拉成型后索膜结构实际的柔性边界线, 虚线表示张拉前索膜结构的平面投影, 成型后结构的曲面方程为

$$z = -\frac{x^2}{l_a^2} f_1 + \frac{y^2}{l_b^2} f_2. \quad (12)$$

而两个方向的初始结构曲率分别为

$$k_{x0} = -\frac{2f_1}{l_a^2}, k_{y0} = \frac{2f_2}{l_b^2}. \quad (13)$$

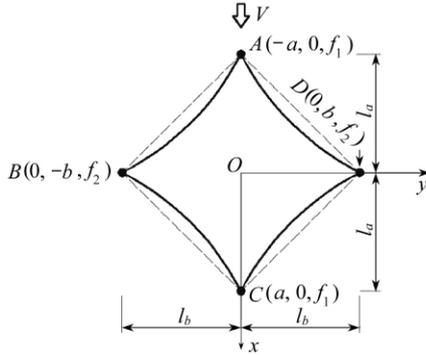


图1 开敞式索膜结构及其几何参数
Fig.1 An open cable-membrane structure and its geometric parameters

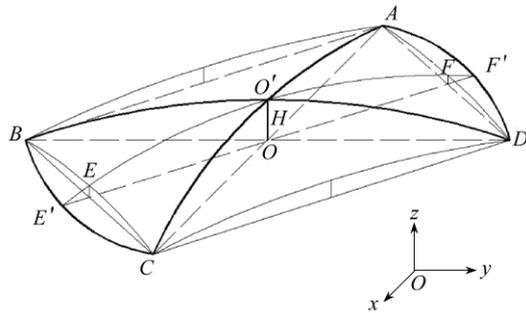


图2 开敞式索膜结构一阶位移模态
Fig.2 The 1st displacement mode of the open cable-membrane structure

图2给出4点简支、四边自由索膜结构的一阶失稳模态, 假设对角线 $AO'C$, $BO'D$ 的位移模态为三角函数, 任何情况下曲线 $E'O'F'$ 上的位移模态亦为三角函数 (E' , F' 是 $EO'F$ 的延伸线与水平面的交点), 从而形成一个椭圆形的旋转曲面^[9], 其横向位移可表示为

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x^2}{l_a^2} + \frac{y^2}{l_b^2}}\right) Az(t) = \tilde{w} Az(t). \quad (14)$$

流体速度与膜面运动之间的耦合作用关系为

$$v_z = V \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} = V \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} Az(t) + \tilde{w} A \dot{z}(t). \quad (15)$$

由于膜结构曲率较小, 故将 $\gamma(\xi, \eta, t)$ 的计算等效至膜结构的投影面上进行, 由 Biot-Savart 定理^[7], 每个涡格 3/4 控制点处的流体 z 方向诱导速度为

$$v_{zkl} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{ijkl} \Gamma_{ij} = - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{ijkl} V l_{aij} \gamma_{ij}, \quad (16)$$

其中, C_{ijkl} 为影响系数, γ_{ij} 为无量纲涡强, l_{aij} 为涡格 (i, j) 的 x 方向长度。

假设

$$\gamma_{ij} = a_{ij1} A z(t) + \frac{a_{ij2}}{V} A \dot{z}(t), \quad (17)$$

结合式(15)和式(16)可得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{ijkl} b_{ij} a_{ij1} &= - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = \\ \pi x s \sin\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x^2}{l_a^2} + \frac{y^2}{l_b^2}}\right) &/ \left(2a^2 \sqrt{\frac{x^2}{l_a^2} + \frac{y^2}{l_b^2}}\right), \\ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{ijkl} b_{ij} a_{ij2} &= - \tilde{w} = - \cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x^2}{l_a^2} + \frac{y^2}{l_b^2}}\right), \end{aligned}$$

通过求解这组线性方程即可得到 γ_{ij} 的表达式。

将位移模态 \tilde{w} 和 $\gamma_c = V \gamma_{ij}$ 代入动平衡方程(11), 两边同时乘以 \tilde{w} , 然后在膜的投影面内积分, 并令 $z(t) = e^{\lambda t}$, 得到其特征方程为

$$b_0 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_2 + b_3 e^{\lambda t} = 0, \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} b_0 &= A m_s \int_{-l_b}^{l_b} \int_{-x_v(y)}^{x_h(y)} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} \tilde{w} dx dy - \rho A \int_{-l_b}^{l_b} \int_{-x_v(y)}^{x_h(y)} \int_{-x_v(y)}^x a_{ij2} \tilde{w} dx dy, \\ b_1 &= -\rho V A \int_{-l_b}^{l_b} \int_{-x_v(y)}^{x_h(y)} a_{ij2} \tilde{w} dx dy - \rho V A \int_{-l_b}^{l_b} \int_{-x_v(y)}^{x_h(y)} \int_{-x_v(y)}^x a_{ij1} \tilde{w} dx dy, \\ b_2 &= -\rho V^2 A \int_{-l_b}^{l_b} \int_{-x_v(y)}^{x_h(y)} a_{ij1} \tilde{w} dx dy + s_w, \\ s_w &= -A \int_{-l_b}^{l_b} \int_{-x_v(y)}^{x_h(y)} \left(T_{x0} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + T_{y0} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} \right) \tilde{w} dx dy + \\ &\quad \frac{hA}{1 - \nu_1 \nu_2} \int_{-l_b}^{l_b} \int_{-x_v(y)}^{x_h(y)} (E_1 k_{x0}^2 + (E_1 \nu_2 + E_2 \nu_1) k_{x0} k_{y0} + E_2 k_{y0}^2) \tilde{w} dx dy, \\ b_3 &= -\frac{hA^2}{2(1 - \nu_1 \nu_2)} \int_{-l_b}^{l_b} \int_{-x_v(y)}^{x_h(y)} (E_1 k_{x0} + E_2 k_{y0} \nu_1) \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right)^2 \tilde{w} dx dy - \\ &\quad \frac{hA^2}{2(1 - \nu_1 \nu_2)} \int_{-l_b}^{l_b} \int_{-x_v(y)}^{x_h(y)} (E_1 k_{x0} \nu_2 + E_2 k_{y0}) \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right)^2 \tilde{w} dx dy. \end{aligned}$$

显然, 式中 b_3 相对于 s_w 而言为高阶小量。同样 $\lambda = 0$ 为结构发散失稳的临界状态, 由式(18)得到 $b_2 + b_3 = 0$, 从而得到临界风速为

$$V_{cr} = \left[(s_w + b_3) / \left(\rho A \int_{-l_b}^{l_b} \int_{-x_v(y)}^{x_h(y)} a_{ij1} \tilde{w} dx dy \right) \right]^{1/2}, \quad (19)$$

取

$$\begin{aligned} a &= b = 5 \text{ m}, T_{x0} = T_{y0} = 2 \text{ kN/m}, \\ k_{x0} &= -k_{y0} = -2f_1/l_a^2, \end{aligned}$$

假设发散失稳时结构的最大振幅为 $l_a/50 = 0.5 \text{ m}$, 由式(19) 分别得到考虑和忽略高阶小量 b_3

时的 V_{cr} 。

图3给出 V_{cr} 随初始曲率 k_{x0} 变化的关系曲线,其中虚线为考虑该高阶小量的情况。由图3可知:在初始曲率 $k_{x0} = 0$ 时,高阶小量 b_3 对临界风速不产生影响;随着初始曲率绝对值的增大,高阶小量 b_3 所产生的影响增大。当初始曲率 $k_{x0} < 0$ 时,考虑高阶小量 b_3 计算得到的失稳临界风速大于不考虑时的计算值;当初始曲率 $k_{x0} > 0$ 时,考虑高阶小量计算得到的失稳临界风速小于不考虑时的计算值,即考虑高阶小量部分时,两高点连线方向的失稳临界风速要低于两低点连线方向的失稳临界风速。但该高阶小量对临界风速计算值的影响是很小的,可以采用忽略高阶小量 b_3 影响的失稳临界风速计算公式:

$$V_{cr} = \left[s_w / \left(\rho A \int_{-l_b}^{l_b} \int_{-x_v(y)}^{x_h(y)} a_{ij1} \tilde{w} dx dy \right) \right]^{1/2} \quad (20)$$

由于临界风速除了与膜材性质有关外,还受初始曲率、初始预张力、横顺向跨度和横顺比等因素的影响,而工程中膜材参数一般变化不大,故下面重点分析 $T_{x0} = T_{y0}$, $k_{x0} = -k_{y0}$ 时几何参数和初始预张力对失稳临界风速的影响。

3 参数分析

选取膜结构的几何参数 $l_a = 5$ m, 矢跨比 $\kappa = f_1 / (2l_a)$, 横顺比 $\chi = l_b / l_a$, 膜结构的材料参数: $E_1 = 900$ MPa, $E_2 = 600$ MPa; Poisson 比: $\nu_{12} = 0.3$, $\nu_{21} = 0.6$ 。

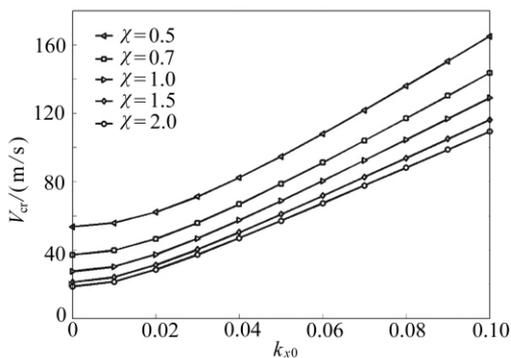


图4 不同横顺比时 V_{cr} 与 k_{x0} 的关系曲线 ($k_{x0} = -k_{y0}$)

Fig.4 $V_{cr} \sim k_{x0}$ relation curves for different aspect ratios ($k_{x0} = -k_{y0}$)

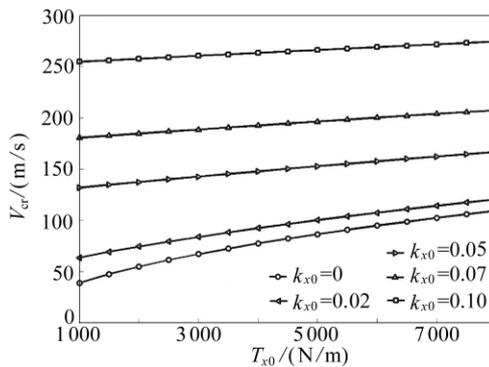


图5 不同初始曲率下 V_{cr} 与 T_{x0} 的关系曲线

Fig.5 $V_{cr} \sim T_{x0}$ relation curves for different initial curvatures

3.1 初始曲率

$T_{y0} = T_{x0} = 2$ kN/m 时,临界风速随初始曲率 k_{x0} 的变化规律如图4所示。由图4可看出:初始曲率在 $0 \sim 0.02$ 之间时,临界风速随着曲率的增大非线性增加,初始曲率大于 0.02 后,临

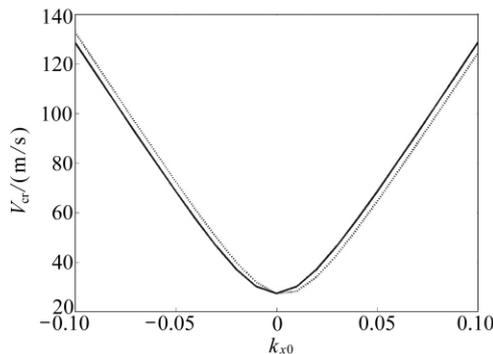


图3 V_{cr} 与 k_{x0} 的关系曲线

Fig.3 $V_{cr} \sim k_{x0}$ relation curves

界风速的增加接近线性,且增长幅度增大。此外,临界风速随着横顺比的增大而降低。横顺比在 0.5~1.0 之间,临界风速随横顺比增大而减小的趋势明显;横顺比在 1.0~2.0 之间,不同横顺比对应的临界风速接近。

由 $k_{x0} = -2f_1/l_a^2 = -4\kappa/l_a$ 可知,对于跨度一定的结构,其临界风速随矢跨比变化的规律与随初始曲率的变化规律相似,不同的只是曲线的切线斜率。

3.2 预张力

其他参数保持定值不变,考虑初始曲率 k_{x0} 分别为 0.0, 0.02, 0.05, 0.07, 0.10 时,初始预张力 T_{x0} 变化情况下的临界风速。

由图 5 看出:临界风速随着初始预张力的增加而增大,基本呈线性关系。初始曲率越大,关系曲线越平缓。

3.3 顺风向跨度

图 6 给出初始预张力 $T_{y0} = T_{x0} = 2 \text{ kN/m}$, 横顺比 $\chi = 1$, 初始曲率 k_{x0} 分别为 0, 0.005, 0.01, 0.02, 0.03 时临界风速随顺风向跨度变化的曲线。图 7 为矢跨比 $\kappa = 0.0, 0.05$ 和 0.1 时,失稳临界风速随顺风向跨度变化的曲线。

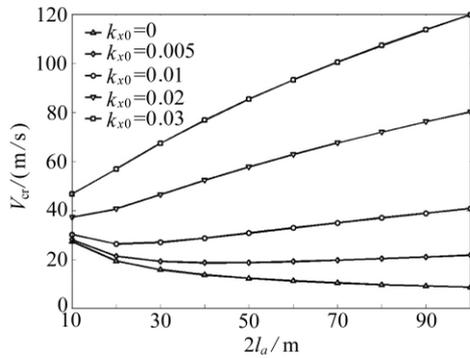


图 6 不同初始曲率下 V_{cr} 与 $2l_a$ 关系曲线

Fig. 6 $V_{cr} \sim 2l_a$ relation curves for different initial curvatures

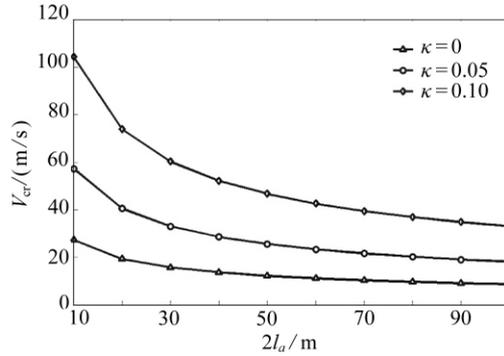


图 7 不同矢跨比下 V_{cr} 与 $2l_a$ 关系曲线

Fig. 7 $V_{cr} \sim 2l_a$ relation curves for different rise-span ratios

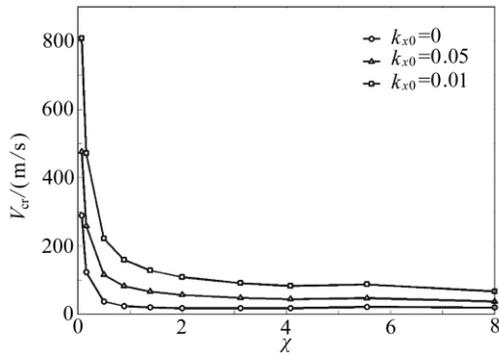


图 8 不同初始曲率时 V_{cr} 与 χ 关系曲线

Fig. 8 $V_{cr} \sim \chi$ relation curves for different initial curvatures

由图 6 看出:结构初始曲率 $k_{x0} < 0.005$ 时,临界风速随顺风向跨度的增加而减小,跨度在 10~30 m 之间时变化明显,且呈弱非线性。初始曲率 k_{x0} 不变且大于 0.005 时,临界风速随着跨度的增大而提高,跨度在 10~30 m 之间呈非线性变化趋势,跨度大于 30 m 呈线性变化。 $k_{x0} \approx 0.005$ 为临界曲率,大于该曲率时失稳临界风速不再随着顺风向跨度的增加而减小。

图 7 表明:若矢跨比 κ 不变,随着结构顺风向跨度的增加,临界风速明显减小,矢跨比越大,减小的趋势越明显;当顺风向跨度 $2l_a > 30 \text{ m}$ 时,临界风速随跨度的增加而减小的趋势降低。

对比图 6 和图 7 可知,相对于结构的矢跨比,初始曲率对结构稳定性的影响更大。

3.4 横顺比

其他参数不变,保持结构的投影覆盖面积为 100 m^2 ,得到曲率 k_{x0} 分别为 0、0.05 和 0.1 时的失稳临界风速变化曲线,见图 8。从图 8 中可以看出:横顺比越大,失稳临界风速越小。横顺比 $\chi \leq 1$ 时失稳临界风速 V_{cr} 随横顺比的增大而明显减小;横顺比 $\chi > 1$ 时,失稳临界风速 V_{cr} 随横顺比的增大而减小的趋势变得缓慢。

4 结 论

本文进行了三维开敞式膜结构的失稳临界风速计算,通过参数分析对比,得到以下主要结论:

- 1) 空间膜结构失稳临界风速的主要影响因素是结构的初始曲率,而初始预张力和顺风向跨度等的影响相对较小。
- 2) 当空间膜结构的跨度较大时,通过适当增大结构的曲率,可以增强膜结构的气动稳定性。
- 3) 一般风的来流沿结构长向时的失稳临界风速要比沿短向时大,因此,设计时应尽量将膜结构的长向沿着所在地区的主要风向布置。

参考文献:

- [1] Sygulski R. Stability of membrane in low subsonic flow [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, **42**(1): 196-202.
- [2] Miyake A, Yoshimura T, Makino M. Aerodynamic instability of suspended roof modals [J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1992, **42**(1/3): 1471-1482.
- [3] 杨庆山,刘瑞霞. 薄膜结构气弹动力稳定性研究 [J]. 工程力学, 2006, **23**(9): 18-24. (YANG Qing-shan, LIU Rui-xia. On aerodynamic stability of membrane structures [J]. *Engineering Mechanics*, 2006, **23**(9): 18-24. (in Chinese))
- [4] 李庆祥,孙炳楠. 均匀流场中小曲率薄膜的气动稳定性分析 [J]. 工程力学, 2006, **23**(4): 39-44. (LI Qing-xiang, SUN Bing-nan. Aerodynamic stability analysis of small curved membrane in uniform flow [J]. *Engineering Mechanics*, 2006, **23**(4): 39-44. (in Chinese))
- [5] 李庆祥,孙炳楠. 封闭薄膜屋盖的风致动力失稳分析 [J]. 振动工程学报, 2006, **19**(3): 346-353. (LI Qing-xiang, SUN Bing-nan. Wind-induced aerodynamic instability for closed membrane roofs [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2006, **19**(3): 346-353. (in Chinese))
- [6] Bisplinghoff R L, Ashley H. *Principles of Aeroelasticity* [M]. New York: John Wiley, 1962.
- [7] H W 伏欣. 气动弹性力学原理 [M]. 沈克扬译,管德校. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1974. (Försching H W. *Grundlagen der Aeroelastik* [M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1974.)
- [8] 沈世钊,徐崇宝,赵臣,武岳. 悬索结构设计 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2006. (SHEN Shi-zhao, XU Chong-bao, ZHAO Chen, WU Yue. *Design of Cable Structures* [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2006. (in Chinese))
- [9] SHI Xing, Burnett Eric. Mechanics and test study of flexible membranes ballooning in three dimensions [J]. *Building and Environment*, 2008, **43**(11): 1871-1881.

Aerodynamic Unstable Critical Wind Velocity for Three-Dimensional Open Cable-Membrane Structures

WEI De-min^{1,2}, ZHU Mei-ling², LI Di²

(1. State Key Laboratory of Subtropical Building Science,
South China University of Technology, Guangzhou 510640, P. R. China;

2. Department of Civil Engineering, South China University of Technology,
Guangzhou 510640, P. R. China)

Abstract: The aerodynamic unstable critical wind velocity for three-dimensional open cable-membrane structures was investigated. The geometric nonlinearity was introduced into the dynamic equilibrium equations of structures. The disturbances on the structural surface caused by the air flow were simulated by a vortex layer with infinite thickness in the structures. The unsteady Bernoulli equation and the circulation theorem were applied in order to express the aerodynamic pressure as the function of the vortex density. Then, the vortex density was obtained by the vortex lattice method considering the coupling boundary condition. Through the numerical computation for the analytical expressions of the unstable critical wind velocities, some computational results and useful conclusions are obtained. It is found that the initial curvature of open cable-membrane structures has the evident influence on the critical wind velocities of the structures.

Key words: open cable-membrane structure; critical wind velocity; vortex lattice method