

# 非线性阻尼力引起破裂路径的分岔\*

A·A·伊纳尔, 林传清, S·Y·费萨尔

(马来西亚工业大学 科学学院 数学系, 81310, 马来西亚)

摘要: 将 Rayleigh 波的线性阻尼机理拓展到非线性, 对选定的模型寻求解析解. 这些解析解描绘出破裂路径的不寻常分岔, 还与反孤立子和孤立子的交点有关.

关键词: 破裂路径的分岔; 反孤立子; 孤立子

中图分类号: P315 文献标志码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.03.003

## 引言

Rayleigh 波可造成如裂缝、表面破裂的山脊、山谷和山坳<sup>[1]</sup>等这样的表面位移而出名. 在一次地震活动中, 破裂速度从 0 开始, 迅速增大到最大值, 然后又迅速衰减为 0.

文献[2]得到了有激发和衰减时的有限长裂缝的解析解. 按文献[2]的解释, 线性负阻尼力将激起加速运动, 并达到最大值, 然后在 Rayleigh 阻尼的作用下, 阻尼力将使运动衰减. 文献[3-4]就激发过程和按 Rayleigh 阻尼公式衰减时, 对各向同性粘弹性 II 型破裂进行了研究. 但是, 没有涉及到非线性阻尼加速运动时破裂路径的分叉.

一次震级  $M_s \geq 7.5$  的特征地震, 如 1959 年 8 月 18 日, 历史上著名的发生在 Range 和 Rocky 山脉的地震<sup>[1]</sup>, 破裂路径的分岔, 造成了两个主断层. 破裂路径的分岔, 使非线性波即 sine-Gordon 方程解分成两部分. sine-Gordon 方程是在 19 世纪后期, 学者在研究与常负曲率面理论有关的微分几何<sup>[5]</sup>时得到的, 并断言 sine-Gordon 方程的解, 对小参数摄动不敏感, 因此解是稳定的, 并且伴有孤立子的特性.

下节将给出该控制方程, 并用解析法进行求解.

## 1 问题公式化

按照波动学的术语, 由方程(1)所给出的波方程结构, 既适用于线性的波方程, 又适用于非线性的波方程. 显然, 线性的波方程没有函数  $F(x, t)$ .

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = F(x, t). \quad (1)$$

\* 收稿日期: 2010-08-28; 修订日期: 2010-12-30

基金项目: 马来西亚高等教育部基础研究资助计划(78485; 78675)

作者简介: Zainal Abdul Aziz (E-mail: zainalaz@utm.my)

本文原文为英文, 黄雅意译, 张禄坤校.

最初 Rayleigh 波假设为

$$U_R(x, t) = A \exp(ik_R [x - c_R t]) . \quad (2)$$

事实上谈到非线性, 就是指方程(1)的右边. 例如, 函数  $F(x, t)$  等于  $\sin(U(x, t))$ , 就可以得到 sine-Gordon 方程.

范和徐<sup>[2]</sup>引入 Rayleigh 因子, 记为

$$\lambda = -A_R + B \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 . \quad (3)$$

线性激发系数  $-A_R$ , 即强加的线性负阻尼力, 连同二次衰减项  $B(\partial \phi / \partial t)^2$  一起. 建议  $A_R$  取值  $0.01 \sim 0.1$ <sup>[2]</sup>.

Rayleigh 阻尼作用下<sup>[2]</sup> 不考虑剪切波和衰减项时的动量方程为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -A_R \frac{\partial \phi}{\partial t} . \quad (4)$$

显然, 由 Rayleigh 因子(3)可知, 方程(4)的右边就是线性的负阻尼力. 在  $x = 0, t = 0$  的初始条件下:

$$\phi(x, t) = 0 , \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 . \quad (6)$$

将线性力变换为方程(1)右边的非线性力. 方程(3)右边中位移  $\phi$  与时间  $t$  的关系可表示为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \sin \phi . \quad (7)$$

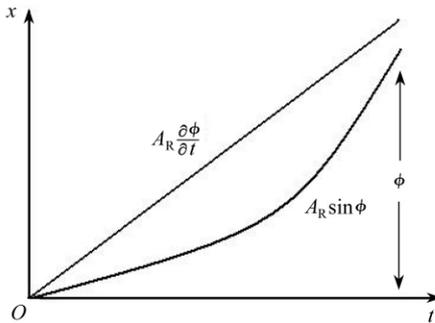


图1 Rayleigh 波的线性和非线性阻尼  
Fig. 1 The linear and nonlinear damping of Rayleigh waves

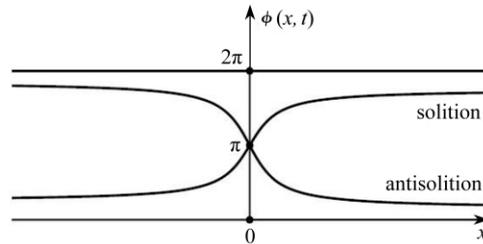


图2 孤立子和反孤立子的交点  
Fig. 2 The intersection of soliton and antisoliton

图1和图2给出了本方法的几何图示. 令方程(4)的右边等于如  $\partial^3 \phi / \partial t^3$  的3次项, 就有可能给出形成对流的冲击, 将在我们以后的文章中给出. 将方程(7)代入方程(4), 控制方程为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -A_R \sin \phi . \quad (8)$$

一旦方程(8)满足初始条件(5)和(6), 对方程(8)使用变量分离法, 得到方程(8)呈如下形式的解:

$$\phi = 2 \arctan(U_R) , U_R = \frac{Au(x)}{v(t)} . \quad (9)$$

将方程(9)代入方程(8), 得到

$$(v^2 + A^2 u^2) \left( \frac{u''}{u} + \frac{v''}{v} \right) - 2(A^2 (u')^2 + (v')^2) = -A_R (v^2 + A^2 u^2). \quad (10)$$

将方程(10)分别对  $x$  和  $t$  求导,得到方程组

$$\frac{2A^2}{(v^2 + A^2 u^2)} \left( \frac{u''}{u} + \frac{v''}{v} \right) + \frac{1}{uu'} \left( \frac{u''}{u} \right)' - \frac{4A^2 u''}{u(v^2 + A^2 u^2)} = \frac{-2A_R A^2}{(v^2 + A^2 u^2)}, \quad (11)$$

$$\frac{2A^2}{(v^2 + A^2 u^2)} \left( \frac{u''}{u} + \frac{v''}{v} \right) + \frac{A^2}{vv'} \left( \frac{v''}{v} \right)' - \frac{4A^2 v''}{v(v^2 + A^2 u^2)} = \frac{-2A_R A^2}{(v^2 + A^2 u^2)}. \quad (12)$$

将方程(11)减去方程(12),可得

$$\frac{1}{uu'} \left( \frac{u''}{u} \right)' - \frac{A^2}{vv'} \left( \frac{v''}{v} \right)' = 0. \quad (13)$$

由方程(13)作一些数学运算后,使线性激发系数  $A_R$  不出现.从而完全可以说,非线性抵消了线性.

尽管没有线性激发系数,由于在数学运算后, $u$  和  $v$  依然存在,故求解方程(8)时,还须考虑 Rayleigh 波(9).方程(13)可表示为

$$\frac{1}{uu'} \left( \frac{u''}{u} \right)' - \frac{A^2}{vv'} \left( \frac{v''}{v} \right)' = k - k, \quad (14)$$

其中

$$\frac{1}{uu'} \left( \frac{u''}{u} \right)' = k, \quad (15)$$

$$\frac{A^2}{vv'} \left( \frac{v''}{v} \right)' = k. \quad (16)$$

对方程(15)和(16)积分,得到

$$(u')^2 = k \frac{u^4}{4} + fu^2 + 2g, \quad (17)$$

$$(v')^2 = \frac{k}{A^2} \frac{v^4}{4} + jv^2 + 2L. \quad (18)$$

在以下的各小节中,对积分常数  $A, k, g, L, f, j$ , 选取若干特例进行解析研究.

1.1 特例 1: 短波长的行波,  $k = 0, g = 0, L = 0$

令  $k = 0, g = 0, L = 0$ , 方程(17)和(18)成为

$$u = C_1 \exp(\pm \sqrt{f}x), \quad (19)$$

$$v = C_2 \exp(\pm \sqrt{j}t), \quad (20)$$

其中,  $C_1$  和  $C_2$  为积分常数.将方程(19)和(20)代入方程(9),得到解

$$\phi = 2 \arctan A(\exp(\pm ik_R(\sqrt{f}x - c_R \sqrt{j}t))), \quad (21)$$

这里 Rayleigh 波可表示为

$$U_R = A \exp(\pm ik_R(\sqrt{f}x - c_R \sqrt{j}t)). \quad (22)$$

图 3 给出了解(21)的图形.

即使方程(8)为非线性的,对于每一个  $f(|f| > 1)$  和  $j(|j| > 1)$ ,给出了线性 Rayleigh 波的解(22).显然,当不计积分常数  $k, g, L$  时,图 3 和方程(22)仍无法看到非线性波.短波长行波的观察可以和特例 2 作出的图 4 比较进行.

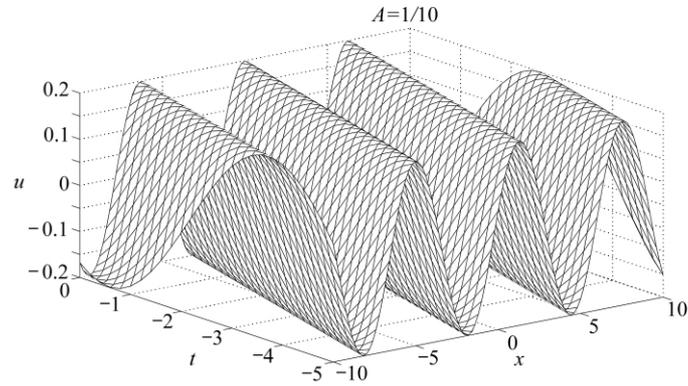


图3 类似于短波长行波的表面位移(其中  $k = 0, g = 0, L = 0, f$  和  $j$  为常数)

Fig.3 The surface displacement which is similar to traveling wave with short wavelength,  $k = 0, g = 0, L = 0$  and constant  $f$  and  $j$

1.2 特例2: 长波长的行波,  $k = 0, f = 0, j = 0$

令  $k = 0, f = 0, j = 0$ , 方程(17)和(18)的解为

$$\phi = 2 \arctan(A \exp(\pm i k_R((\sqrt{2gx} + S) - c_R(\sqrt{2Lt} + W)))) , \tag{23}$$

其中 Rayleigh 波可表示为

$$U_R = A \exp(\pm i k_R((\sqrt{2gx} + S) - c_R(\sqrt{2Lt} + W))) . \tag{24}$$

图4是根据解(23)所画出的. 对于每一个  $g(|g| > 1)$  和  $L(|L| > 1)$ , 所求解(23)给出了线性 Rayleigh 波(24). 与特例1类似, 仍无法看到非线性波.

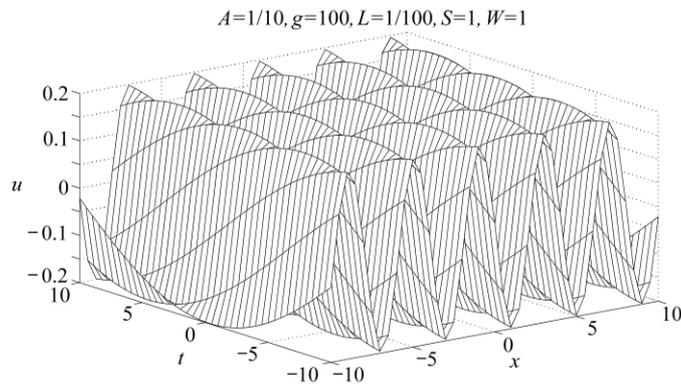


图4 长波长的 Rayleigh 波(其中  $k = 0, f = 0, j = 0$ )

Fig.4 The long wavelength Rayleigh waves,  $k = 0, f = 0, j = 0$

1.3 特例3: 非线性位移,  $k = 0$

令方程(17)和(18)中的  $k = 0$ , 有

$$u = \pm \sqrt{\frac{2g}{f}} \sinh(\sqrt{f}x + g_2) , \tag{25}$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{2L}{j}} \sinh(\sqrt{j}t + L_2) , \tag{26}$$

且解为

$$\phi = 2 \arctan \left( \exp \left( \pm i k_R \left( \sqrt{\frac{2g}{f}} \sinh(\sqrt{f}x + g_2) - c_R \left( \sqrt{\frac{2L}{j}} \sinh(\sqrt{j}t + L_2) \right) \right) \right) \right) \quad (27)$$

非线性 Rayleigh 波可为

$$U_R = \exp \left( \pm i k_R \left( \sqrt{\frac{2g}{f}} \sinh(\sqrt{f}x + g_2) - c_R \left( \sqrt{\frac{2L}{j}} \sinh(\sqrt{j}t + L_2) \right) \right) \right) \quad (28)$$

$A=1/10, f=1, g=1, j=1, L=1$

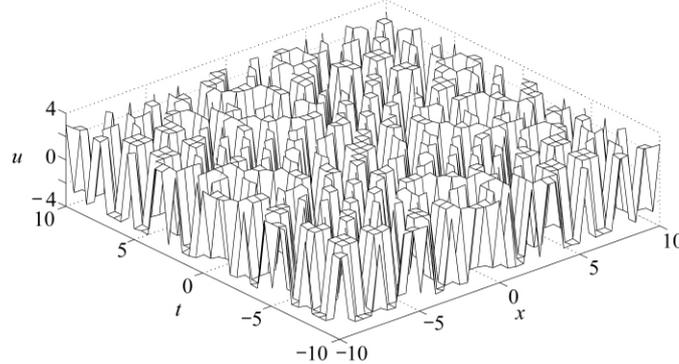


图5 非线性 Rayleigh 波生成很大的非线性位移(其中  $A = 1/10, f = 1, j = 1, g = 1, L = 1$ )

Fig.5 The severe nonlinear displacement by nonlinear Rayleigh waves ,

$A = 1/10, f = 1, j = 1, g = 1, L = 1$

$A=1/10, f=1/10, g=1/10, j=1/10, L=1/10$

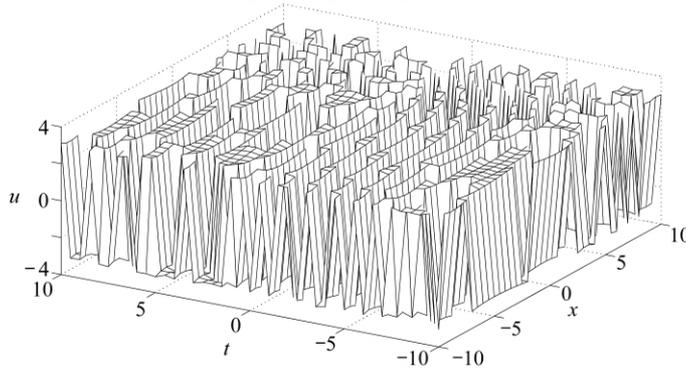


图6 非线性 Rayleigh 波生成适度的非线性位移(其中  $A = 1/10, f, j, g, L = 1/10$ )

Fig.6 The moderate nonlinear displacement by nonlinear Rayleigh waves ,  $A = 1/10, f, j, g, L = 1/10$

当  $f, g, j, L = 1$  时,图5画出了由非线性 Rayleigh 波(28)所生成的不平整表面.通过将  $f, g, j, L$  缩小到 0.1,图6描绘出的波峰是相当明显的.尽管破裂路径的分岔,造成许多破碎,依然无法看到孤立子和反孤立子的交点.

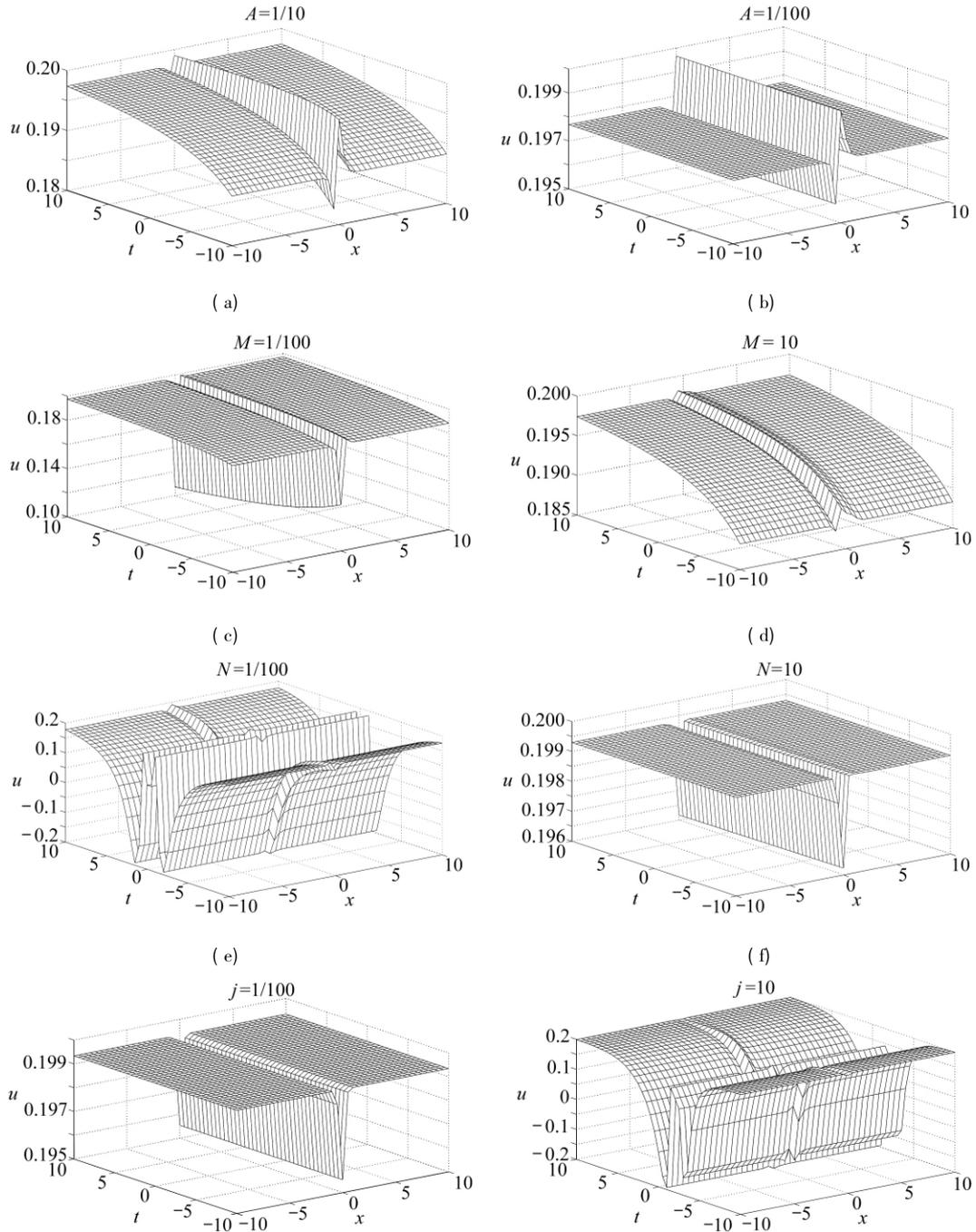
#### 1.4 特例4: 孤立子和反孤立子的交点及其破裂路径的分岔, $k \neq 0, g = 0, L = 0$

方程(20)和(21)中,令  $k \neq 0, g = 0, L = 0$ ,解为

$$\phi = 2 \arctan \left( A \exp \left( \pm i k_R \left( \left( \frac{2Af\sqrt{k}}{k \sinh(4fx/k)} + M \right) - \right) \right) \right)$$

$$c_R \left( \frac{2Aj\sqrt{k}}{k \sinh(4A^2jt/k)} + N \right) \right) \right) \right). \quad (29)$$

图7研究  $k = 1$  时, 系数  $A, M, N, f, j$  的作用. 图7 描绘出破裂路径可能产生的分岔. 可以清楚地看到, 具有单一分岔路径的孤立子和反孤立子交点, 然而, 当  $j = 10$  和  $N = 1/100$  时, 出现了超过一个的分叉路径. 在下一小节中, 提出了多分岔路径的存在.



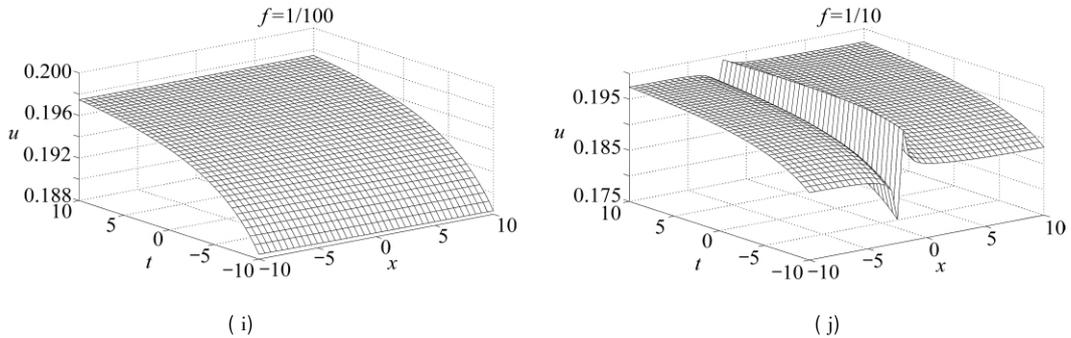


图7 孤立子和反孤立子的交点(当积分常数  $A, M, N, j, f$  取  $1/100, 1/10, 10$  时,可能出现的断层)

Fig. 7 Intersection of soliton and antisoliton. Integration constants  $A, M, N, j, f$  are exploited with respect to the parameters  $1/100, 1/10$  and  $10$  for possible dislocations

1.5 特例5: 破裂路径分岔为二,  $k \neq 0, f = 0,$

$$j = 0, g = 0, L = 0$$

令  $k \neq 0, f = 0, j = 0, g = 0, L = 0$  解为

$$\phi = 2 \arctan \left( A \exp \left( \pm ik_R \left( \left( \frac{-1}{\sqrt{kx/2 + Q}} \right) - c \left( \frac{-1}{\sqrt{kt/(2A) + R}} \right) \right) \right) \right). \quad (30)$$

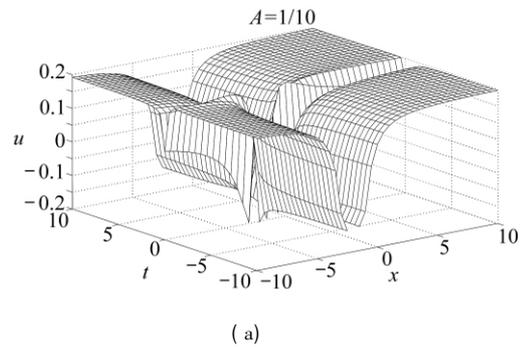


图8 描绘出破裂路径分岔为二的情况. 同样观察到单一分岔路径. 图7和图8表明, 当完全不计积

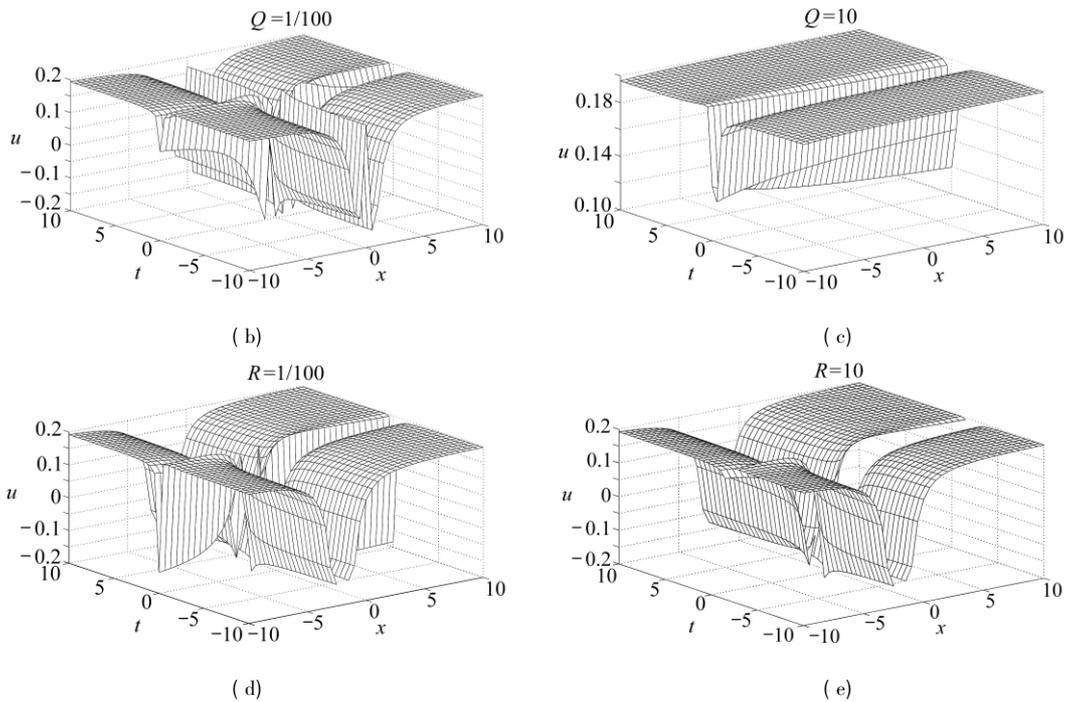


图8 孤立子和反孤立子的交点(积分常数  $A, Q, R$  取  $1/100$  和  $10$  时,可能出现的断层)

Fig. 8 Intersection of soliton and antisoliton. Integration constants  $A, Q, R$  are exploited with respect to the parameters  $1/100$  and  $10$  for possible dislocations

分常数  $f, g, j, L$  时, 才可以看到孤立子和反孤立子的交点. 相反, 若积分常数  $f, g, j, L$  完全如特例 3 一样, 就可以看到分岔路径.

## 2 结 论

地震期间存在线性阻尼力的破裂<sup>[2]</sup>. 非线性阻尼力的引入, 使线性激发系数不出现. 将最初引入的 Rayleigh 波变换为非线性波. 通过对特例的研究发现, 积分常数在不平整表面位移的生成和破裂路径中, 扮演着重要的角色. 然而, 在分叉路径破裂的研究中, 尚未涉及 3 次阻尼力的非线性, 有待进一步的研究.

致谢 本文第 2 作者感谢马来西亚科技创新部 (MOSTI) 的资助.

### 参考文献:

- [1] Ronald L B, Pamela R G, William T P. Rupture characteristics of normal faults: an example from the Wasatch fault zone, Utah [J]. *Geological Society, London, Special Publications*, 1987, **28**: 337-353.
- [2] 范家参 徐平. 有激发和衰减的有限长 II 型破裂过程研究 [J]. *应用数学和力学*, 1982, **3**(5): 689-706. (FAN Jia-shen, XU Ping. Analytic solutions for a finite crack rupturing with type II at one tip with exciting and decaying processes [J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 1982, **3**(5): 749-764.)
- [3] 范家参. 包括激发和衰减的粘弹性 II 型破裂过程的研究 [J]. *应用数学和力学*, 1986, **7**(8): 759-767. (FAN Jia-shen. Research of visco-elastic type II rupture with exciting and attenuation process [J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 1986, **7**(8): 815-823.)
- [4] Fan J S, Fan L. Asymptotic solutions for mode II dynamic rupture with nonlinear damping [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2000, **24**(5/6): 407-418.
- [5] Debnath L. *Nonlinear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists* [M]. New York: Springer Science, 2005: 572-598.

## Bifurcation of Rupturing Path by the Nonlinear Damping Force

Zainal Abdul Aziz, Dennis Ling Chuan Ching, Faisal Salah Yousif  
(Department of Mathematics, Faculty of Science,  
University of Technology Malaysia, 81310 Malaysia)

**Abstract:** The linear damping mechanism of Rayleigh waves was extended for the nonlinearity. Conferring to the model, analytical method was chosen for the solutions. These solutions depict the unusual bifurcation of the rupturing path related to the intersection point of antisoliton and soliton.

**Key words:** bifurcation of rupturing path; antisoliton; soliton