

# 弹性介质中正交各向异性微管的屈曲分析\*

穆罕默德·塔杰<sup>1</sup>, 张俊乾<sup>1,2</sup>,

- (1. 上海大学 力学系, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;  
2. 上海大学 上海市力学在能源工程中的应用重点实验室, 上海 200072)

**摘要:** 已有实验表明,处于细胞质中的微管可以比自由微管承受更大的压力而不发生屈曲.基于嵌入式碳纳米管屈曲的 Winkler 模型,利用正交各向异性情形的 Winkler 模型研究了细胞质中充当细胞骨架的微管的屈曲行为.计算表明,本模型可以较好地预测嵌入弹性介质中的微管较自由微管承受更大屈曲压力这一现象,而且所得到的临界屈曲压力与微管受压屈曲的实验值吻合 [Needleman D J, Ojeda-Lopez M A, Kai Ewert U R, Miller H P, Wilson L, Safiny C R. *Biophys J*, 2005, **89** (5): 3410-3423; Needleman D J, Ojeda-Lopez M A, Raviv U, Ewert K, Jones J B, Miller H P L, Wilso L, Safinya C R. *Phys Rev Lett*, 2004, **93**(19): 1981041-1981044.].同时,所得的结果也表明周围介质与微管的相互作用可以极大地提高微管抵抗屈曲的能力,该结果很好地阐释了介质与微管相互作用从而提高微管抗屈曲压力的相互作用机制 [Brangwynne C P, MacKintosh F C, Kumar S, Geisse N A, Talbot J, Mahadevan L, Parker K K, Ingber D E, Weitz D A. *The Journal of Cell Biology*, 2006, **173**(5): 733-741].模拟结果表明,所给出的模型可以对嵌入弹性介质中的微管的屈曲行为进行很好地模拟.

**关键词:** 微管; 屈曲; 正交各向异性 Winkler 模型; 弹性介质

**中图分类号:** O343; Q66      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.03.004

## 引 言

微管(microtubules, MTs)与肌动蛋白微丝(actin filament)、中间蛋白细丝(intermediate filament)共同组成真核细胞的细胞骨架(cytoskeleton),微管是3种蛋白中刚度最大的一种<sup>[1]</sup>,它与细胞的变形以及力学性能密切相关<sup>[2]</sup>.除此之外,微管还在诸如:细胞分裂、细胞运动、胞内运输、作为蛋白移动轨道<sup>[3]</sup>、以及鞭毛和纤毛运动核心的形成<sup>[4]</sup>等生理过程中发挥重要作用.在形态学上看,微管是由 $\alpha, \beta$ 两种类型的微管蛋白亚基形成的二聚体,它是由13条原纤维(protofilament)构成的中空管状结构,其内外直径分别为20 nm和30 nm左右<sup>[5]</sup>.微管的抗弯刚度约为肌动蛋白微丝的100倍.因此,通常认为在细胞骨架内,微管承受了绝大部分的压缩力<sup>[6-7]</sup>.与肌动蛋白和中间丝相比,细胞质中(cytoplasmic)的微管对于细胞伸展后的形态稳定起到更为关键的作用<sup>[8]</sup>.由于接受外部信号刺激或是由于细胞自发收缩亦或是限制微管蛋白

\* 收稿日期: 2010-09-21; 修订日期: 2011-01-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772105);上海市重点学科建设资助项目(S30106)

作者简介: Muhammad Taj(穆罕默德·塔杰),博士生(E-mail: muhammad\_taj75@yahoo.com);

张俊乾,教授(联系人. Tel: +86-21-66134972; E-mail: jqzhang2@shu.edu.cn).

在细胞边缘聚合 (polymerization), 所引起的沿微管轴向压缩力, 都可导致微管屈曲. 微管屈曲现象已通过很多的实验和理论模型中观察到<sup>[9]</sup>. 由压力引起自由微管的屈曲, 也已被实验证实<sup>[10-11]</sup>. 但是, 考虑到在活细胞环境中与在实验环境 (缺少介质) 中所观察到的微管屈曲行为是显著不同的. 在活细胞中, 微管嵌入到了可视为弹性介质的细胞质中, 实验发现, 嵌入式微管的屈曲波长较短, 这说明它可承受较大的压缩力<sup>[12-13]</sup>; 而自由微管屈曲的波形为单个长弧线, 这表明自由微管屈曲压力是相当小的<sup>[13]</sup>. 这些实验现象可以用嵌入在弹性介质中的 Euler 柱屈曲理论解释<sup>[13]</sup>. 文献[14]假设活细胞中微管的周围介质为粘性流体, 提出了微管短波长屈曲的 Euler 柱屈曲模型. 考虑到在微管结构中, 与  $\alpha\beta$  微管蛋白二聚体沿原纤维形成的纵向键要比相邻的原纤维间形成的横向键强很多<sup>[11]</sup>, 特别是, 考虑到微管的剪切模量要比沿纵向的弹性模量小几个数量级<sup>[11, 15-17]</sup>, 微管应该更准确地建模为正交异性弹性壳模型, 而不应采用 Euler 柱模型. 综合上述观点, 文献[15, 18]采用正交异性弹性壳模型分别考察自由微管屈曲行为和波传播行为. 考虑到正交各向异性壳模型的有效性, 本文将该模型应用到处于弹性介质的微管的屈曲模拟. 本文将微管周围的介质用 Winkler 模型进行处理, 这是因为 Winkler 模型简洁且已被用于处理处于弹性介质中的碳纳米管的屈曲行为<sup>[19-20]</sup>.

## 1 正交各向异性 Winkler 模型

正交各向异性 Winkler 壳模型有 5 个独立的材料常数 (轴向模量  $E_x$ , 环向模量  $E_\theta$ , 剪切模量  $G_{x\theta}$ , 轴向 Poisson 比  $\nu_x$  以及周围介质 Winkler 模型的弹性常数  $K$ )<sup>[21]</sup>, 这些材料值可在文献中查到, 见表 1. 已有文献一般将微管的横截面等效为等截面圆环, 圆环厚度约为  $h \approx 2.7 \text{ nm}$ <sup>[22-23]</sup>, 进而微管的弹性模量、面内刚度以及质量密度  $\rho$  都可基于该厚度计算给出. 对于微管的弯曲刚度, 该值一般由所谓的微管的“bridge”厚度定义 (1.1 nm, 见文献[22]的图 2), 该值比前面的等效厚度  $h = 2.7 \text{ nm}$  要小很多. 事实上, 与单壁碳纳米管的处理类似<sup>[24]</sup>, 微管作为一个弹性壳, 其等效弯曲刚度应当作为一个独立材料常数. 该值可由自由壳微管的屈曲实验数据以及文献[22]给出的等效厚度 1.6 nm 估计给出.

表 1 各向异性微管的材料常数

Table 1 The values of orthotropic material constants for microtubules

parameters		values	references
longitudinal modulus	$E_x$	0.5 ~ 2 GPa	[18, 22-23]
circumferential modulus	$E_\theta$	1 ~ 4 MPa	[18]
shear modulus in $x$ - $\theta$ plane	$G_{x\theta}$	1 MPa	[16, 18, 22]
Poisson's ratio in axial direction	$\nu_x$	0.3	[18, 23]
mass density per unit volume	$\rho$	1.47 g/cm <sup>3</sup>	[23]
equivalent thickness	$h$	2.7 nm	[22-23]
effective thickness for bending	$h_0$	1.6 nm	[22]
elastic modulus of surrounding	$K$	10 ~ 5 000 Pa	[25-27]

### 1.1 微管屈曲控制微分方程

我们用正交各向异性 Winkler 壳模型研究轴向和环向预压力分别为  $N_x, N_\theta$  的嵌入弹性介质中的微管的屈曲问题. 之前的实验和柱屈曲研究表明, 弹性介质的存在会提高嵌入其中的微管的临界屈曲载荷. 嵌入弹性介质的微管屈曲的控制微分方程可表示如下:

$$\left\{ (K_x + N_x) R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{K_{x\theta} R^2 + D_{x\theta}}{R^2} + N_\theta \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} u +$$

$$\begin{cases} \left\{ R(\nu_x K_\theta + K_{x\theta}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \right\} v + \\ \left\{ -R(\nu_\theta K_x - N_\theta) \frac{\partial}{\partial x} + RD_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{D_{x\theta}}{R} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2} \right\} w = 0, \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} \left\{ R(\nu_\theta K_x + K_{x\theta}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \right\} u + \\ \left\{ (K_\theta + N_\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \left( \frac{K_{x\theta} R^2 + 3D_{x\theta}}{R^2} + N_x \right) R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} v + \\ \left\{ -(K_\theta + N_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\nu_\theta D_x + 3D_{x\theta}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} \right\} w = 0, \end{cases} \quad (1b)$$

$$\begin{cases} \left\{ R(\nu_\theta K_x - N_\theta) \frac{\partial}{\partial x} - RD_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{D_{x\theta}}{R} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2} \right\} u + \\ \left\{ (K_\theta + N_\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\nu_\theta D_x + 3D_{x\theta}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} \right\} v + \\ \left\{ -R^2 D_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} - (2\nu_\theta D_x + 4D_{x\theta}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} - \frac{D_\theta}{R^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 \right)^2 + \right. \\ \left. N_\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + N_x R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - K_\theta \right\} w + 2\pi RP = 0, \end{cases} \quad (1c)$$

其中,  $x$  和  $\theta$  分别为轴向及环向坐标;  $u, v$  及  $w$  为轴向、环向及径向位移;  $\rho$  为质量密度;  $h$  为微管厚度;  $R$  为微管平均半径, 且有  $\gamma = h_0^3 / (12hR^2)$ ;  $\nu_x$  和  $\nu_\theta$  分别为轴向及环向 Poisson 比, 满足  $\nu_\theta / \nu_x = E_\theta / E_x$ ; 面内轴向刚度  $K_x$ 、环向刚度  $K_\theta$  及剪切刚度  $K_{x\theta}$  可表示为

$$\begin{aligned} K_x &= E_x h / (1 - \nu_x \nu_\theta), \\ K_\theta &= E_{\theta x} / (1 - \nu_\theta \nu_x), \\ K_{x\theta} &= G_{x\theta} h; \end{aligned}$$

轴向等效弯曲刚度  $D_x$ 、环向等效弯曲刚度  $D_\theta$  及剪切刚度  $D_{x\theta}$  分别为<sup>[22-23]</sup>

$$\begin{aligned} D_x &= E_x h_0^3 / (12(1 - \nu_x \nu_\theta)), \\ D_\theta &= E_\theta h_0^3 / (12(1 - \nu_x \nu_\theta)), \\ D_{x\theta} &= G_{x\theta} h_0^3 / 12; \end{aligned}$$

$P$  为周围介质对微管的反向压力. 对于给定的  $h$  和  $h_0$ , 正交各向异性 Winkler 壳的 5 个弹性常数可由表 1 确定. 上述各参数并非完全独立, 可定义

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\nu_\theta}{\nu_x} = \frac{E_\theta}{E_x} = \frac{K_\theta}{K_x} = \frac{D_x}{D_\theta}, \\ \beta &= \frac{G_{x\theta}}{E_x} = \frac{G_{x\theta}}{E_x} (1 - \alpha \nu_x^2) = \frac{D_{x\theta}}{D_x} = \frac{K_{x\theta}}{K_x}, \end{aligned}$$

其中,  $\alpha \nu_x \rightarrow 0$  (见表 1). 从而, 正交各向异性 Winkler 壳模型的 5 个独立参数可重新由  $E_x, \nu_x, \alpha, \beta$  和  $K$  定义.

设微管两端简支, 则其屈曲模态可表示为

$$\begin{cases} u(x, \theta) = U \cos \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta, \\ v(x, \theta) = V \sin \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta, \\ w(x, \theta) = W \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta, \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $U, V, W$  为待定常数,  $n$  为环向波数,  $m$  为轴向半波数,  $L$  为微管长度. 轴向屈曲波长可用微管直径  $2R$  进行无量纲化, 表示为  $L/(Rm)$ .

## 1.2 弹性介质对微管屈曲的影响

在有弹性介质存在时, 当微管受轴向力作用时微管发生微变形, 微管周围的弹性介质会沿微管变形的反方向产生反向作用力. 利用 Winkler 模型处理嵌入弹性介质的碳纳米管屈曲的分析方法, 弹性介质对微管的反作用力可表示为

$$P = -Kw, \quad (3)$$

其中,  $K$  为弹性介质的弹性常数, 负号表明  $P$  的作用方向与微管的变形方向相反.

## 1.3 弹性介质中微管的屈曲分析

将方程(2)和(3)代入式(1)可得如下代数方程:

$$\left\{ (K_x + N_x)R^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + n^2 \left( \frac{K_{x\theta}R^2 + D_{x\theta}}{R^2} + N_\theta \right) \right\} U - \left\{ n \left( \frac{m\pi}{L} \right) R (\nu_x K_\theta + K_{x\theta}) \right\} V + \left\{ R \frac{m\pi}{L} (\nu_\theta K_x - N_\theta) + RD_x \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 - \frac{D_{x\theta}}{R} n^2 \frac{m\pi}{L} \right\} W = 0, \quad (4a)$$

$$\left\{ nR \frac{m\pi}{L} (\nu_\theta K_x + K_{x\theta}) \right\} U - \left\{ n^2 (K_\theta + N_\theta) + \left( \frac{K_{x\theta}R^2 + 3D_{x\theta}}{R^2} + N_x \right) R^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right\} V + \left\{ n (K_\theta + N_\theta) + (\nu_\theta D_x + 3D_{x\theta}) n \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right\} W = 0, \quad (4b)$$

$$\left\{ R \frac{m\pi}{L} (\nu_\theta K_x - N_\theta) + RD_x \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 - \frac{D_{x\theta}}{R} n^2 \frac{m\pi}{L} \right\} U - \left\{ (K_\theta + N_\theta)n + n (\nu_\theta D_x + 3D_{x\theta}) \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right\} V + \left\{ R^2 D_x \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + n^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 (2\nu_\theta D_x + 4D_{x\theta}) + \frac{D_\theta}{R^2} (n^2 + 1)^2 + n^2 N_\theta + N_x R^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + K_\theta + 2\pi RK \right\} W = 0. \quad (4c)$$

对于实际的物理问题,  $(U, V, W)$  存在非零解, 微管的屈曲荷载和对应的屈曲模式可由上述代数方程的特征方程确定.

考虑微管受轴向压力屈曲的情况, 此时  $N_\theta = 0$ . 由于细胞质的弹性模量  $K$  一般是非均匀的, 测量结果往往不一样<sup>[25-27]</sup>, 文献中取值差别也较大, 本文在计算中选用了瞬时弹性模量  $3.32 \text{ kPa}$ <sup>[26]</sup>. 图1给出了在  $R = 13 \text{ nm}$ ,  $E_x = 1 \text{ GPa}$ ,  $\nu_x = 0.3$ ,  $\alpha = 0.001$ ,  $\beta = 0.001$  时, 微管在细胞质中的临界屈曲荷载  $N_{cr}$  与自由微管的临界屈曲荷载随  $L/(Rm)$  和  $n$  的变化对比情况. 由图可见, 当有细胞质存在时微管的临界屈曲荷载会显著增大, 对于不同的  $n$ , 有的甚至增大数个量级, 这与文献[13]的结论是一致的.

考虑微管受径向压力  $p$  作用下的屈曲问题, 此时有  $N_x = 0$ , 对应的环向拉应力则可由  $N_\theta = -pR$  确定. 为辨别环向波数  $n \geq 2$  时的轴向均匀屈曲模式<sup>[28]</sup> ( $n = 1$  对应于截面刚体平移, 因此不用讨论), 本文仅讨论无限长微管. 图2给出了在  $R = 13 \text{ nm}$ ,  $E_x = 1 \text{ GPa}$ ,  $\nu_x = 0.3$ ,  $\alpha = 0.001$ ,

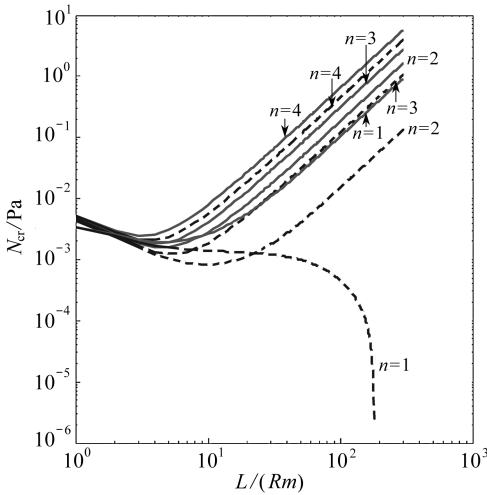


图1 处于细胞质的微管(实线)与自由微管(虚线)的轴向屈曲荷载  $N_{cr}$  的变化

Fig.1 The behavior of force  $N_{cr}$  for axial buckling of embedded (solid lines) and free (dotted lines) MTs

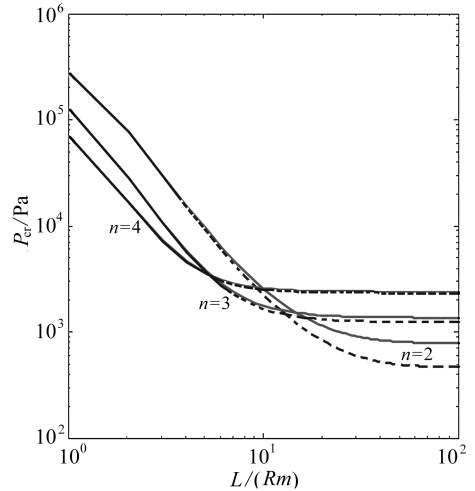


图2 处于细胞质的微管(实线)与自由微管(虚线)的的径向屈曲荷载  $P_{cr}$  的变化

Fig.2 The behavior of pressure  $P_{cr}$  for radial buckling of embedded (solid lines) and free (dotted lines) MTs

$\beta = 0.001$ ,  $K = 150$  时, 微管在细胞质中的临界径向屈曲压力  $P_{cr}$  (通过引入细胞质的弹性模量  $K$ ) 与自由微管的径向屈曲压力随  $L/(Rm)$  和  $n$  的变化对比情况。

计算表明, 微管的径向临界屈曲压力为 780 Pa, 这与实验报道的 510 ~ 690 Pa<sup>[10-11]</sup> 非常接近。该值比实验值的上限略大, 这是由于细胞质与微管相互作用增强了微管抵抗屈曲的能力, 这与文献[13]所报道的结果一致。文献[14]曾利用正交各向异性壳模型对径向压缩屈曲进行了预测, 所给出的预测值 470 Pa 低于实验值的下限, 事实上这是由于未考虑细胞质的影响所造成的。可见, 本文所给的模型可以更好地解释和模拟处于细胞质中的微管的临界屈曲荷载。

## 2 结 论

综上所述, 本文用正交各向异性 Winkler 模型分析了处于细胞质中的微管受轴向压缩和径向压缩时的屈曲行为。模型很好地预测了细胞质对微管抗屈曲能力的影响, 所给出的临界屈曲压力与实验结果比较吻合<sup>[10-11]</sup>, 也很好解释了文献[13, 18]的结果。

致谢 本文翻译由贺耀龙先生完成, 在此表示特别感谢。

## 参考文献:

- [1] Nogales E. Structural insights into microtubule function[J]. *Annu Rev Biochem*, 2000, **69** (1): 277-302.
- [2] Alberts B, Johnson A, Lewis J, Raff M, Roberts K, Roberts P. *Molecular Biology of the Cell* [M]. 4th ed. New York: Garland Science Publishing, 2005, 1463.
- [3] Carter N J, Cross R A. Mechanics of the kinesin step[J]. *Nature*, 2005, **435** (3): 308-312.
- [4] Schoutens J E J. A model describing bending in flagella[J]. *J Biol Phys*, 2004, **30** (2): 97-122.
- [5] Boal D. *Mechanics of the Cell* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

- [6] Kolodney M S, Wysolmerski R B. Isometric contraction by fibroblasts and Endothelial cells in tissue culture: a quantitative study[J]. *J Cell Biol*, 1992, **117**(1):73-82.
- [7] Stamenovic D, Liang Z L, Chen J X, Wang N. Effect of the cytoskeletal prestress on the mechanical impedance of cultured airway smooth muscle cells[J]. *J Appl Physiol*, 2002, **92**(4): 1443-1450.
- [8] Zheng J, Buxbaum R E, Heidemann S R. Investigation of microtubule assembly and organization accompanying tension-induced neurite initiation[J]. *J Cell Sci*, 1993, **104**(4): 1239-1250.
- [9] Odde D J, Ma L, Briggs A H, Demarco A, Kirschner M W. Microtubule bending and breaking in living cells[J]. *J Cell Sci*, 1999, **112**(19): 3283-3288.
- [10] Needleman D J, Ojeda-Lopez M A, Raviv U, Ewert K, Miller H P, Wilson L, Safinya C R. Radial compression of microtubules and the mechanism of action of taxol and associated proteins[J]. *Biophys J*, 2005, **89**(5): 3410-3423.
- [11] Needleman D J, Ojeda-Lopez M A, Raviv U, Ewert K, Jones J B, Miller H P L, Wilso L, Safinya C R. Synchrotron X-ray diffraction study of microtubules buckling and bundling under osmotic stress: a probe of interprotofilament interactions[J]. *Phys Rev Lett*, 2004, **93**(19): 1981041-1981044.
- [12] Felgner H, Frank R, Biernat J, Mandelkow E M, Madelkow E, Ludin B, Matus A, Schliwa M. Domains of neuronal microtubule-associated proteins and flexural rigidity of microtubules [J]. *J Cell Biol*, 1997, **138**(5):1067-1075.
- [13] Brangwynne C P, MacKintosh F C, Kumar S, Geisse N A, Talbot J, Mahadevan L, Parker K K, Ingber D E, Weitz D A. Microtubules can bear enhanced compressive loads in living cells because of lateral reinforcement[J]. *The Journal of Cell Biology*, 2006, **173**(5): 733-741.
- [14] Li T. A mechanics model of microtubule buckling in living cells[J]. *J Biomech*, 2008, **41**(8): 1722-1729.
- [15] Wang C Y, Ru C Q, Mioduchowski A. Orthotropic elastic shell model for buckling of microtubules[J]. *Physical Review E*, 2006, **74**(5): 052901.
- [16] Kis A, Kasas S, Babić B, Kulik A J, Benoît W, Briggs G A D, Schönenberger C, Catsicas S, Forró L. Nanomechanics of microtubules [J]. *Physical Review Letters*, 2002, **89**(24): 248101.
- [17] Nogales E, Whittaker M, Milligan R A, Downing K H. High-resolution model of the microtubule[J]. *Cell*, 1999, **96**(1): 79-88.
- [18] Qian X S, Zhang J Q, Ru C Q. Wave propagation in orthotropic microtubules[J]. *J Appl Phys*, 2007, **101**(8): 084702.
- [19] Lourie O, Cox D M, Wagner H D. Buckling and collapse of embedded carbon nanotubes[J]. *Phys Rev Lett*, 1998, **81**(8): 1638-1641.
- [20] Yoon J, Ru C Q, Mioduchowski A. Sound wave propagation in multiwall carbon nanotubes [J]. *J Appl Phys*, 2003, **93**(8): 4801-4806.
- [21] Ventsel E, Krauthammer T. *Thin Plates and Shells*[M]. New York: Marcel Dekker, 2004.
- [22] Pablo de P J, Schaap I A T, Mackintosh F C, Schmidt C F. Deformation and collapse of microtubules on the nanometer scale [J]. *Physical Review Letters*, 2003, **91**(9): 098101-098114.
- [23] Sirenko M, Stroschio M, Kim K W. Elastic vibrations of microtubules in a fluid[J]. *Phys Rev E*, 1996, **53**(1): 1003-1010.
- [24] Flugge W. *Stresses in Shells*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1960.

- [25] Ofek G, Natoli R M, Athanasiou K A. In situ mechanical properties of the chondrocyte cytoplasm and nucleus[J]. *J Biomech*, 2009, **42**(7): 873-877.
- [26] Leipzing N D, Athanasiou K A. Unconfined creep compression of chondrocytes[J]. *J Biomech*, 2005, **38**(1): 77-85.
- [27] Peng Z H, Yang J M, Si S H, Fang D C, Chen W S, Luo Y H. Effects of metastasis-suppressor gene KAI1 on viscoelastic properties of hepatocellular carcinoma MHCC97-H cells with high metastatic potential[J]. *World Chin J Digestol*, 2004, **12**(5): 1040.
- [28] Chajes A. *Principles of Structural Stability Theory*[M]. Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall, 1974.

## Buckling of Embedded Microtubules in Elastic Medium

Muhammad Taj<sup>1</sup>, ZHANG Jun-qian<sup>1, 2</sup>

- (1. *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics; Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;*  
2. *Shanghai Key Laboratory of Mechanics in Energy and Environment Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China*)

**Abstract:** Motivated by the application of Winkler-like model for buckling analysis of embedded carbon nanotubes, an orthotropic Winkler-like model was developed to study buckling behavior of embedded cytoskeletal microtubules within cytoplasm. Experimental observations of buckling of embedded cytoskeletal microtubules reveal that embedded microtubules bear a large compressive force as compared to free microtubules. Our theoretical model predicts that embedded microtubules in elastic medium bear large compressive forces than free microtubules. The estimated critical pressure is found not only in good agreement with the experimental values of pressure-induced buckling of microtubules [Needleman D J, Ojeda-Lopez M A, Kai Ewert U R, Miller H P, Wilson L, Safiny C R. *Biophys J*, 2005, **89**(5): 3410-3423; Needleman D J, Ojeda-Lopez M A, Raviv U, Ewert K, Jones J B, Miller H P L, Wilso L, Safinya C R. *Phys Rev Lett*, 2004, **93**(19): 1981041-1981044.]. But also, due to mechanical coupling of microtubules with surrounding elastic medium, critical buckling force has increased considerably, which well explains the theory that mechanical coupling of microtubules with the elastic medium increases compressive forces that microtubules can sustain [Brangwynne C P, MacKintosh F C, Kumar S, Geisse N A, Talbot J, Mahadevan L, Parker K K, Ingber D E, Weitz D A. *The Journal of Cell Biology*, 2006, **173**(5): 733-741] suggesting that the present model is a good approximation for buckling analysis of embedded microtubules.

**Key words:** microtubules; buckling; orthotropic Winkler-like model; elastic medium