

# 不可压缩层合橡胶圆管径向 膨胀的稳定性分析\*

袁学刚<sup>1,2</sup>, 张文正<sup>2</sup>, 张洪武<sup>2</sup>, 朱正佑<sup>3</sup>

(1. 大连民族学院 理学院, 辽宁 大连 116600;

2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室; 工程力学系, 辽宁 大连 116024;

3. 上海大学 力学系; 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(张洪武推荐)

**摘要:** 研究由两类不可压缩的橡胶材料组成的层合圆柱形管道, 在内表面受到突加的径向压力作用时的膨胀机理. 建立了问题的数学模型; 利用材料的不可压缩条件、边界条件以及圆管的径向位移和径向应力的连续性条件将相应的控制方程约化为一个二阶非线性常微分方程, 并得到了该方程的首次积分. 给出了管道拟静态膨胀和动态膨胀的定性分析, 特别地, 结合数值算例讨论了材料参数、结构参数以及径向压力对管道径向膨胀和非线性周期振动的影响.

**关键词:** 层合橡胶管道; 径向膨胀; 稳定性; 非线性周期振动

**中图分类号:** O343      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.03.005

## 引 言

橡胶和类橡胶材料的力学性能非常复杂, 如天然橡胶、合成橡胶和合成纤维等, 它们都具有非线性、高弹性和大变形等典型特点. 在现实生活中, 橡胶制品多达几万种, 如橡胶密封圈、橡胶管以及橡胶支座等橡胶制品在航空航天、精密仪器、国防军事、机械制造、医疗卫生等诸多领域都有非常重要的应用. 由于橡胶材料和结构的不稳定性被认为是材料损伤和断裂破坏的关键机理, 因此相关问题的研究引起了广泛的关注. 橡胶和类橡胶材料又称为 Green 弹性材料, 它们的本构关系可完全由其应变能函数表示. 在橡胶材料及其结构的静态有限变形方面, 目前的研究成果已相当丰富, 如圆筒受内压、柱体的扭转和弯曲、球壳的膨胀、材料中的空穴现象等等<sup>[1-5]</sup>. 特别地, 关于不可压缩的橡胶圆管径向膨胀的动力学稳定性问题的研究也有一些文献进行了报导<sup>[6-8]</sup>, 其中: 文献[6]研究了不可压缩的 Mooney-Rivlin 材料组成圆管有限振动问题, 并且给出了圆管产生周期振动的条件以及振动的周期和振幅的公式; 文献[7]研究了周期载荷作用下不可压缩 neo-Hookean 材料组成的圆管的动力响应问题; 文献[8]研究了周期阶梯加载对横观各向同性不可压缩的 Ogden 材料组成的圆管的径向振动问题, 并讨论了材料参

\* 收稿日期: 2010-12-24; 修订日期: 2011-01-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872045;10721062); 教育部优秀人才支持计划基金资助项目(NCET-09-096); 中央高校基本科研业务费专项基金资助项目(DC10030104)

作者简介: 袁学刚(1971—), 男, 吉林桦甸人, 教授, 博士(联系人. E-mail: yuanxg@dlmu.edu.cn).

数、结构参数以及加载模式对圆管产生非线性周期振动的影响。

本文基于超弹性材料的有限变形理论,首先建立了不可压缩的橡胶材料组成的层合圆柱形管道径向变形问题的数学模型,并求得了描述管道径向膨胀的方程;然后定性分析了管道静态膨胀和动态膨胀的机理,并通过数值算例讨论了结构参数和材料参数对管道有限变形的影响。

## 1 数学模型及其解

对于由不可压缩的橡胶材料组成的层合圆柱形管道,考察其内表面在给定的均布径向压力  $p_0$  作用下的径向膨胀问题.假设管道的层合部在变形前后永远粘合在一起,并满足径向位移和径向应力的连续性条件.令  $(R, \Theta, Z)$  和  $(r, \theta, z)$  分别为层合圆柱形管道的物质坐标系和空间坐标系.在平面轴对称应变状态的假设下,管道变形后的内、外层构形分别为

$$r^{[1]} = r^{[1]}(R, t) > 0, \quad R_1 \leq R \leq R_2; \theta^{[1]} = \Theta^{[1]}; z^{[1]} = Z^{[1]}, \quad (1)$$

$$r^{[2]} = r^{[2]}(R, t) > 0, \quad R_2 \leq R \leq R_3; \theta^{[2]} = \Theta^{[2]}; z^{[2]} = Z^{[2]}, \quad (2)$$

其中,  $R_1, R_2$  和  $R_3$  分别为管道变形前的内、中和外界面的半径,  $r^{[i]} = r^{[i]}(R, t)$  ( $i = 1, 2$ ) 是待定的且与时间相关的径向变形函数。

对应于径向对称变形式(1)和(2)的变形梯度张量  $\mathbf{F}^{[i]}$  ( $i = 1, 2$ ) 表示为

$$\mathbf{F}^{[i]} = \text{diag}(\lambda_1^{[i]}, \lambda_2^{[i]}, \lambda_3^{[i]}) = \text{diag}\left(\frac{\partial r^{[i]}(R, t)}{\partial R}, \frac{r^{[i]}(R, t)}{R}, 1\right), \quad (3)$$

其中,  $\lambda_1^{[i]}, \lambda_2^{[i]}$  和  $\lambda_3^{[i]}$  称为变形梯度张量的主伸长。

材料的不可压缩条件要求变形梯度张量的行列式等于1,即  $\lambda_1^{[i]} \lambda_2^{[i]} \lambda_3^{[i]} = 1$ , 由式(3)可得

$$r^{[i]} = r^{[i]}(R, t) = [R^2 + c^2(t) - R_1^2]^{1/2}, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

其中,  $c(t) \geq 0$  是待求函数;且当  $i = 1$  时,  $R_1 \leq R \leq R_2$ , 当  $i = 2$  时,  $R_2 \leq R \leq R_3$ 。

### 1.1 层合橡胶材料的本构模型

由于管道的内、外层分别由不同的材料组成,且变形场在交界面处是连续的,因此相应的应变能函数可表示为

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{cases} W^{[1]}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), & R_1 < R < R_2, \\ W^{[2]}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), & R_2 < R < R_3. \end{cases} \quad (5)$$

层合圆柱形管道的 Cauchy 应力张量的主值为

$$\begin{cases} \tau_{rr}^{[i]}(r^{[i]}, t) = \lambda_1^{[i]} \frac{\partial W^{[i]}}{\partial \lambda_1^{[i]}} - p^{[i]}(r^{[i]}, t), \\ \tau_{\theta\theta}^{[i]}(r^{[i]}, t) = \lambda_2^{[i]} \frac{\partial W^{[i]}}{\partial \lambda_2^{[i]}} - p^{[i]}(r^{[i]}, t) \end{cases} \quad (i = 1, 2), \quad (6)$$

其中,  $p^{[i]}(r^{[i]}, t)$  是对应于不可压缩材料的静水压力.此外,由材料界面的径向应力连续条件可得

$$\tau_{rr}^{[1]}(r^{[1]}(R_2, t), t) = \tau_{rr}^{[2]}(r^{[2]}(R_2, t), t). \quad (7)$$

### 1.2 控制方程和初边界条件

忽略体积力时,控制层合圆柱形管道径向对称运动的平衡微分方程为

$$\frac{\partial \tau_{rr}^{[i]}(r^{[i]}, t)}{\partial r^{[i]}} + \frac{1}{r^{[i]}} [\tau_{rr}^{[i]}(r^{[i]}, t) - \tau_{\theta\theta}^{[i]}(r^{[i]}, t)] = \rho^{[i]} \frac{\partial^2 r^{[i]}}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2), \quad (8)$$

其中,  $\rho^{[i]}$  为材料密度.

假设层合圆柱形管道在时刻  $t = 0$  处于未变形和静止状态, 即

$$r^{[i]}(R, 0) = R, \quad \dot{r}^{[i]}(R, 0) = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (9)$$

由式(4)可得

$$c(0) = R_1, \quad \dot{c}(0) = 0. \quad (10)$$

由于管道的内表面受到突加的径向压力  $p_0 > 0$  的作用, 而外表面是无约束的, 则相应的初始条件为

$$\tau_{rr}^{[1]}(r^{[1]}(R_1, t), t) = -p_0, \quad \tau_{rr}^{[2]}(r^{[2]}(R_3, t), t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

### 1.3 问题的解

由式(4)不难验证

$$\frac{\partial^2 r^{[i]}(R, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial(c\ddot{c} \ln r^{[i]} + (\ln r^{[i]} + (r^{[i]})^{-2}c^2/2)\dot{c}^2)}{\partial r^{[i]}} \quad (i = 1, 2). \quad (12)$$

对方程(8)关于  $r^{[i]}$  从  $r^{[i]}(R_i, t)$  到  $r^{[i]}(R_{i+1}, t)$  ( $i = 1, 2$ ) 积分, 然后再将两式相加, 由径向应力连续条件(7)和边界条件(11)可得

$$\begin{aligned} p_0 + \int_{r_1^{[1]}}^{r_2^{[1]}} \left[ \lambda_1^{[1]} \frac{\partial W^{[1]}}{\partial \lambda_1^{[1]}} - \lambda_2^{[1]} \frac{\partial W^{[1]}}{\partial \lambda_2^{[1]}} \right] \frac{dr^{[1]}}{r^{[1]}} + \int_{r_2^{[2]}}^{r_3^{[2]}} \left[ \lambda_1^{[2]} \frac{\partial W^{[2]}}{\partial \lambda_1^{[2]}} - \lambda_2^{[2]} \frac{\partial W^{[2]}}{\partial \lambda_2^{[2]}} \right] \frac{dr^{[2]}}{r^{[2]}} = \\ \rho^{[1]} \left( c\ddot{c} \ln \left( \frac{r_2^{[1]}}{c} \right) + \left( \ln \left( \frac{r_2^{[1]}}{c} \right) + \frac{1}{2} \left( (r_2^{[1]})^{-2}c^2 - 1 \right) \right) \dot{c}^2 \right) + \\ \rho^{[2]} \left( c\ddot{c} \ln \left( \frac{r_3^{[2]}}{r_2^{[2]}} \right) + \left( \ln \left( \frac{r_3^{[2]}}{r_2^{[2]}} \right) + \frac{1}{2} \left( (r_3^{[2]})^{-2} - (r_2^{[2]})^{-2} \right) \right) c^2 \dot{c}^2 \right), \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{cases} r_1^{[1]} = r_1^{[1]}(R_1, t) = c(t), \\ r_2^{[1]} = r_2^{[1]}(R_2, t) = r_2^{[2]} = r_2^{[2]}(R_2, t) = [R_2^2 - R_1^2 + c^2(t)]^{1/2}, \\ r_3^{[2]} = r_3^{[2]}(R_3, t) = [R_3^2 - R_1^2 + c^2(t)]^{1/2}. \end{cases} \quad (14)$$

易见, 方程(13)事实上是关于  $c(t)$  的一个二阶非线性常微分方程, 它描述了施加在管道内表面的径向压力  $p_0$  和内表面半径  $c(t)$  随时间运动的精确关系; 由式(4)和(5)即可求得管道整体的径向运动.

## 2 管道膨胀的定性分析

为研究方便, 引入如下的无量纲记号

$$x(t) = \frac{c(t)}{R_1}, \quad \delta_1 = \frac{R_2^2}{R_1^2} - 1, \quad \delta_2 = \frac{R_3^2}{R_2^2} - 1. \quad (15)$$

可以求得如下的关系式是成立的:

$$\frac{r_3^2}{R_3^2} = \frac{x^2 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2}{(1 + \delta_1)(1 + \delta_2)}, \quad \frac{(r_2^{[i]})^2}{R_2^2} = \frac{x^2 + \delta_1}{1 + \delta_1} \quad (i = 1, 2). \quad (16)$$

进一步地, 若令

$$\omega = \omega(R, c) = \begin{cases} r^{[1]}(R)/R, & R_1 \leq R \leq R_2, \\ r^{[2]}(R)/R, & R_2 \leq R \leq R_3, \end{cases}$$

则有

$$\left( \lambda_1^{[i]} \frac{\partial W^{[i]}}{\partial \lambda_1^{[i]}} - \lambda_2^{[i]} \frac{\partial W^{[i]}}{\partial \lambda_2^{[i]}} \right) \frac{dr^{[i]}}{r^{[i]}} = \frac{W_1^{[i]} d\omega}{\omega^2 - 1}, \quad (17)$$

其中,  $W_1^{[i]} = dW^{[i]}(\omega)/d\omega$ . 利用式(15) ~ (17)中的记号, 可将方程(13)改写为

$$p_0 + G(x, \delta_1, \delta_2) = A^{[1]}(x, \delta_1, \delta_2) \ddot{x} + B^{[1]}(x, \delta_1, \delta_2) \dot{x}^2 + A^{[2]}(x, \delta_1, \delta_2) \ddot{x} + B^{[2]}(x, \delta_1, \delta_2) \dot{x}^2, \quad (18)$$

其中

$$G(x, \delta_1, \delta_2) = \int_x^{((x^2+\delta_1)/(1+\delta_1))^{1/2}} \frac{W_1^{[1]} d\omega}{\omega^2 - 1} + \int_{((x^2+\delta_1)/(1+\delta_1))^{1/2}}^{((x^2+\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2)/((1+\delta_1)(1+\delta_2)))^{1/2}} \frac{W_1^{[2]} d\omega}{\omega^2 - 1}, \quad (19)$$

$$A^{[1]}(x, \delta_1, \delta_2) = \frac{1}{2} \rho^{[1]} R_1^2 x \ln \left( 1 + \frac{\delta_1}{x^2} \right), \quad (20)$$

$$B^{[1]}(x, \delta_1, \delta_2) = \frac{1}{2} \rho^{[1]} R_1^2 \left( \ln \left( 1 + \frac{\delta_1}{x^2} \right) - \frac{\delta_1}{x^2 + \delta_1} \right), \quad (21)$$

$$A^{[2]}(x, \delta_1, \delta_2) = \frac{1}{2} \rho^{[2]} R_1^2 x \ln \left( 1 + \delta_2 \frac{1 + \delta_1}{x^2 + \delta_1} \right), \quad (22)$$

$$B^{[2]}(x, \delta_1, \delta_2) = \frac{1}{2} \rho^{[2]} R_1^2 \left( \ln \left( 1 + \delta_2 \frac{1 + \delta_1}{x^2 + \delta_1} \right) - \frac{\delta_2 + \delta_1 \delta_2}{x^2 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2} \frac{x^2}{x^2 + \delta_1} \right), \quad (23)$$

式(10)中初始条件变为

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (24)$$

为了更好地理解文中的结论, 管道的内、外层分别取两类横观各向同性的幂率型材料模型, 其应变能函数如下:

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{cases} \mu_1 \left( ((\lambda_1^{[1]})^{2n_1} + (\lambda_2^{[1]})^{2n_1} - 2) / (2n_1) + \beta_1 \left( (\lambda_1^{[1]})^2 - 1 \right)^2 \right), & R_1 < R < R_2, \\ \mu_2 \left( ((\lambda_1^{[2]})^{2n_2} + (\lambda_2^{[2]})^{2n_2} - 2) / (2n_2) + \beta_2 \left( (\lambda_1^{[2]})^2 - 1 \right)^2 \right), & R_2 < R < R_3. \end{cases} \quad (25)$$

其中,  $\mu_1$  和  $\mu_2$  分别为两类材料产生无穷小变形时的剪切模量,  $n_1$  和  $n_2$  是给定的材料常数,  $\beta_1$  和  $\beta_2$  是描述材料关于径向各向异性的材料参数. 特别地, 当  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  时, 式(25)对应于由 Chou-Wang 和 Horgan 提出的幂率型材料模型<sup>[9]</sup>; 当  $n_1 = n_2 = 1$  时, 材料模型对应于经典的 neo-Hookean 材料模型<sup>[5]</sup>.

## 2.1 静态径向膨胀

本小节研究层合管道在径向压力  $p_0 > 0$  作用下的拟静态膨胀问题. 此时, 方程(18)退化为

$$p_0 + G(x, \delta_1, \delta_2) = 0. \quad (26)$$

一方面, 当  $x \in (1, +\infty)$  时, 容易验证等式  $G(1, \delta_1, \delta_2) = 0$  以及不等式:

$$\left( \frac{x^2 + \delta_1}{1 + \delta_1} \right)^{1/2} < x, \quad \left( \frac{x^2 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2}{(1 + \delta_1)(1 + \delta_2)} \right)^{1/2} < \left( \frac{x^2 + \delta_1}{1 + \delta_1} \right)^{1/2},$$

对任意给定的  $\delta_1$  和  $\delta_2$  恒成立, 因此必有  $G(x, \delta_1, \delta_2) < 0$ ; 换句话说, 方程(26)必有实根.

另一方面,对任意给定的  $\delta_1$  和  $\delta_2$ , 利用反常积分的性质可以证明:

1) 若两类材料对应的应变能函数的最高次幂不超过 2, 即  $n_1, n_2 \leq 1$ , 则式(26)存在水平渐近线, 特别地:

(i) 若两种材料对应的应变能函数的最高次幂均小于 2 ( $n_1, n_2 < 1$ ), 则当  $x \rightarrow +\infty$  时, 有  $p_0 \rightarrow 0$ ;

(ii) 若两种材料中一类材料的应变能函数的最高次幂小于 2, 而另一类材料的应变能函数的最高次幂等于 2, 则当  $x \rightarrow +\infty$  时, 有  $p_0 \rightarrow 0.5\mu_1 \ln(1 + \delta_1)$  (即  $n_1 = 1, n_2 < 1$ ) 或  $p_0 \rightarrow 0.5\mu_2 \ln(1 + \delta_2)$  (即  $n_1 < 1, n_2 = 1$ );

(iii) 两种材料的应变能函数的最高次幂均等于 2 (即  $n_1 = n_2 = 1$ ), 则当  $x \rightarrow +\infty$  时, 有  $p_0 \rightarrow 0.5\mu_1 \ln(1 + \delta_1) + 0.5\mu_2 \ln(1 + \delta_2)$ .

2) 若两种材料中至少有一类材料的应变能函数的最高次幂超过 2 (即  $n_1 > 1, n_2 > 1$ ), 则式(26)存在斜渐近线, 即当  $x \rightarrow +\infty$  时, 有  $p_0 \rightarrow +\infty$ .

当材料参数和结构参数分别取为  $n_2 = 1, \delta_1 = 1, \beta_2 = 0$ , 以及  $\mu = \mu_2/\mu_1$  和  $n_1$  取不同值时, 满足方程(26)的  $P$  和  $x$  的关系曲线图如图 1 和 2 所示, 其中  $P = p_0/\mu_1$ .

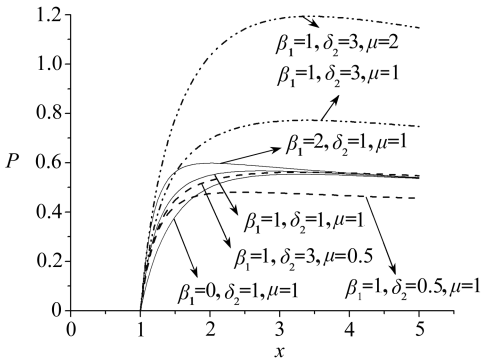


图 1 材料常数满足  $n_1, n_2 \leq 1$  时  $P$  和  $x$  的关系曲线, 其中  $n_1 = 0.75$

Fig. 1 Relation curves of  $P$  and  $x$  for material parameters satisfying  $n_1, n_2 \leq 1$ , where  $n_1 = 0.75$

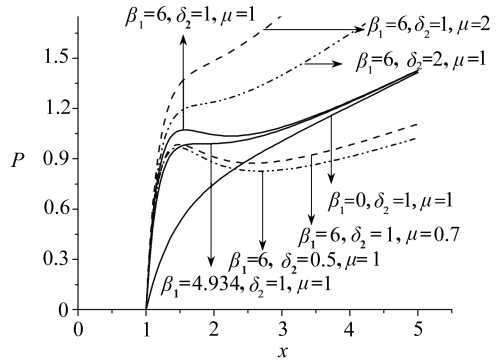


图 2 材料常数满足条件  $n_1 > 1$  或  $n_2 > 1$  或  $n_1, n_2 > 1$  之一时  $P$  和  $x$  的关系曲线, 其中  $n_1 = 1.5$

Fig. 2 Relation curves of  $P$  and  $x$  for material parameters satisfying one of conditions  $n_1 > 1$  or  $n_2 > 1$  or  $n_1, n_2 > 1$ , where  $n_1 = 1.5$

## 2.2 动态径向膨胀

令  $y = \dot{x}$ , 则方程(18)等价于如下的一阶微分方程组

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ C(x, y) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

其中

$$C(x, y) = \frac{-(B^{[1]}(x, \delta_1, \delta_2) + B^{[2]}(x, \delta_1, \delta_2))y^2 + p_0 + G(x, \delta_1, \delta_2)}{A^{[1]}(x, \delta_1, \delta_2) + A^{[2]}(x, \delta_1, \delta_2)}. \quad (28)$$

显然微分方程组的平衡点为  $(x, y) = (\bar{x}, 0)$ , 其中  $\bar{x}$  为方程(26)的实根. 进一步地, 方程组(27)的 Jacobi 矩阵的特征值为

$$\lambda_{1,2} = \pm \left[ \frac{G_x(\bar{x}, \delta_1, \delta_2)}{A^{[1]}(\bar{x}, \delta_1, \delta_2) + A^{[2]}(\bar{x}, \delta_1, \delta_2)} \right]^{1/2}. \quad (29)$$

由图1可见,  $P$  和  $x$  的关系曲线各自存在一个最大值, 记为  $P_{\max}$ . 当  $P < P_{\max}$  时, 若关系曲线单调增加, 则  $G_x(\bar{x}, \delta_1, \delta_2) < 0$ , 此时  $\lambda_{1,2}$  是一对纯虚根, 即平衡点  $(x, y) = (\bar{x}, 0)$  是方程组(27)的线性化方程组的中心; 若关系曲线单调减少, 对应的  $G_x(\bar{x}, \delta_1, \delta_2) > 0$ , 此时  $\lambda_{1,2}$  是绝对值相等但符号相反的两个实根, 即平衡点  $(x, y) = (\bar{x}, 0)$  是方程组(27)的线性化方程组的鞍点, 进而也是方程组(27)的鞍点. 然而, 当  $P > P_{\max}$  时, 平衡点不复存在, 方程组(27)的解随时间的增加而无限增大, 管道最终将会破裂.

图2的分析与图1的类似, 也可参见文献[8]的相关讨论.

由微分方程的定性理论可知, 线性化方程的中心可能是非线性方程的中心, 但也可能是非线性方程的焦点. 因此, 还需要对上述平衡点为线性化方程组的中心情形做进一步的定性.

若将方程(18)的两端乘以  $x\dot{x}$ , 则可以求得方程(18)满足初始条件(24)的首次积分为

$$\int_1^x zG(z, \delta_1, \delta_2) dz + \frac{1}{2} p_0(x^2 - 1) = \frac{1}{2}(A^{[1]}(x, \delta_1, \delta_2) + A^{[2]}(x, \delta_1, \delta_2))x\dot{x}^2. \quad (30)$$

易见, 方程(30)关于  $\dot{x}$  满足对称性. 由非线性常微分方程的对称性原理可知, 若方程组(27)的平衡点是其线性化方程组的中心, 则它们也是非线性方程组(27)的中心. 在这种情形下, 方程(18)有满足初始条件(24)的周期解, 即此时圆管在内表面压力的作用下随时间的演化是非线性的周期振动.

### 3 结 论

本文通过对描述不可压缩的层合橡胶材料管道径向膨胀的方程的定性分析, 结合数值算例分别研究了管道静态和动态膨胀的机理, 得到了如下结论:

1) 若管道的内外两层橡胶材料的应变能函数的最高次幂均未超过2, 则存在一个临界压力, 当径向压力小于该临界压力时, 管道的径向膨胀模式随时间演化是非线性的周期振动; 当径向压力大于该临界压力时, 管道随时间的演化将无限膨胀, 最终将会破裂.

2) 若两层橡胶材料的应变能函数的最高次幂至少有一个超过2, 则对任意给定的径向压力, 管道的径向膨胀模式随时间演化都将是非线性的周期振动; 此外, 在某些条件下, 振动的振幅会出现跳跃性的增长.

#### 参考文献:

- [1] Beatty M F. Topics in finite elasticity: hyperelasticity of rubber, elastomers, and biological tissues—with examples[J]. *Applied Mechanics Review*, 1987, **40**(12): 1699-1733.
- [2] FU Yi-bin, Ogden R W. *Nonlinear Elasticity: Theory and Applications*[M]. London Mathematical Society Lecture Note Series, 2001, 283.
- [3] Attard M M. Finite strain—isotropic hyperelasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, **40**(17): 4353-4378.
- [4] Haughton D M, Kirkinis E. A comparison of stability and bifurcation criteria for inflated spherical elastic shells[J]. *Math Mech Solids*, 2003, **8**(5): 561-572.
- [5] Horgan C O, Polignone D A. Cavitation in nonlinearly elastic solids: a review[J]. *Applied*

- Mechanics Review*, 1995, **48**(7): 471-485.
- [6] Knowles J K. Large amplitude oscillations of a tube of incompressible elastic material[J]. *Q Appl Math*, 1960, **18**(1): 71-77.
- [7] 任九生. 周期载荷下超弹性圆柱壳的动力响应[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(10): 1199 - 1207. (REN Jiu-sheng. Dynamical response of hyper-elastic cylindrical shells under periodic load[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2008, **29**(10): 1319-1327.)
- [8] YUAN Xue-gang, ZHANG Ruo-jing, ZHANG Hong-wu. Controllability conditions of finite oscillations of hyper-elastic cylindrical tubes composed of a class of ogden material models[J]. *Computers, Materials & Continua*, 2008, **7**(3): 155-165.
- [9] Chou-Wang M-S, Horgan C O. Void nucleation and growth for a class of incompressible nonlinear elastic materials[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1989, **25**(11): 1239-1254.

## Stability Analysis of Radial Inflation of Incompressible Composite Rubber Tubes

YUAN Xue-gang<sup>1,2</sup>, ZHANG Wen-zheng<sup>2</sup>, ZHANG Hong-wu<sup>2</sup>, ZHU Zheng-you<sup>3</sup>

(1. School of Science, Dalian Nationalities University, Dalian, Liaoning 116600, P. R. China;

2. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,  
Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,  
Dalian, Liaoning 116024, P. R. China;

3. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Department of Mechanics,  
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

**Abstract:** The inflation mechanism was examined for a composite cylindrical tube composed of two incompressible rubber materials, where the inner surface of the tube was subjected to a suddenly applied radial pressure. The mathematical model of the problem was formulated and the corresponding governing equation was reduced to a second order ordinary differential equation by using the incompressible condition of the material, the boundary conditions and the continuity conditions of radial displacement and radial stress of the cylindrical tube, moreover, the first integral of the equation was obtained. The qualitative analyses of static inflation and dynamic inflation of the tube were presented, particularly, the effects of material parameters, structure parameters and radial pressure on radial inflation and nonlinearly periodic oscillation of the tube were discussed by combining numerical examples.

**Key words:** composite rubber tube; radial inflation; stability; nonlinearly periodic oscillation