

流体流动中波状游动平板 最优运动的数值方法*

钱勤建, 孙德军

(中国科学技术大学 近代力学系, 合肥 230026)

摘要: 提出了一种求解波状游动平板最优运动方式的优化方法。最优化问题表述为固定推力的条件下,使得输入功率最小。由于存在不可见模态,使得该问题具有奇性,用通常的 Lagrange 乘子法计算得到的可能不是最优解,而是一个鞍点值。为了消除这一奇性,增加了一个关于幅值的不等式约束,并利用逐步二次规划的优化方法求解该问题。将该方法运用到二维和三维的波动板的几个例子上,获得了最优解。

关键词: 波动板; 最优化; 面元法; 逐步二次规划

中图分类号: O352 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.03.008

引言

在水生动物的游动、鸟类以及昆虫的拍动飞行中所展现出的优异性能引起了许多学者的关注。令人感兴趣的问题是确定能得到最大水动力学效率的最优运动。根据 Wu^[1] 的定义,游动的水动力学效率为时均推力和时均输入功率的比值。最优化问题可以表述为,寻找一个合理的运动方式使得消耗的能量最小,同时必须保持足够的推力以维持向前游动。

近年来,更复杂的基于势流理论的面元法^[2-3]以及基于求解 Navier-Stokes 方程组的直接数值模拟方法^[4-6]被广泛用于模拟生物飞行游动的推进性能。利用这些方法,可以获得更细致的流场结构。然而,这些方法由于计算量巨大,并不适合复杂的性能优化分析。因此,需要一个计算量小的简单模型用于分析生物的飞行游动性能。Lighthill^[7-9]建立了细长体理论以及 Wu^[1,10-11]建立了二维波动板理论,但是这些理论基于一定的假设和近似,同真实的鱼体具有较大的差距。事实上,典型鱼体的展弦比在 0.2~0.5 之间。Cheng 等^[12]发展了三维波动板理论,考虑了展弦比的效应。Kagemoto 等的文献^[13]的结果表明,该理论能够较好预测实验的结果。在本文中,我们根据 Cheng 等、Kagemoto 等及 Lan 在文献^[12-14]中的方法,发展了涡格法程序用于计算推力、输入功率等物理量。

关于最优运动方式的工作较为少见,其中之一是 Wu 的文献^[11]关于二维的例子。由于存在奇性,刚性翼形的俯仰和沉浮组合运动的最优运动方式并不能够确定。常用的 Lagrange 乘子

* 收稿日期: 2010-11-20; 修订日期: 2011-01-19

作者简介: 钱勤建(1981—),男,浙江人,博士生(E-mail: qqj@mail.ustc.edu.cn);

孙德军(1967—),男,教授,博士,博士生导师(联系人, Tel: +86-551-3606797; E-mail: dsun@ustc.edu.cn)。

法所得到的解并不是最优解,从本文的分析可知,该点只是一个鞍点.为了求解该问题,Wu的文献[11]将浮沉运动幅值作为参变量.Ahmadi等的文献[15]的结果表明,该问题的奇性是由一个“不可见模态”所导致的.他采用不可见模态的幅值为一附加条件.利用这一方法,能够获得和Wu的文献[11]同样的结果.然而Wu的文献[11]和Ahmadi等的文献[15]的理论方法很难应用到更复杂的柔性波动板问题.

在本文中,利用特征值分解的方法分析了二维以及三维矩形波动板的最优运动方式.对于幅值为线性变化的最优运动问题中,存在1个不可见模态,而在幅值为二次变化的最优问题中,存在3个不可见模态.可见以上问题都是奇性的.为了消除奇性,在原问题中增加了关于摆动幅值的不等式约束.约束位于波动板的中点,方便同Wu的文献[11]的结果作比较.同时,为了避免取到鞍点,采用逐步二次规划法(SQP)的优化程序求解该问题.为了验证程序的正确性,求解刚性板最优运动方式,获得了同Wu的文献[11]一致的结果.并且,将该方法应用到前人没有研究过的二维和三维波动板的几个例子上,获得了最优解.

1 数学公式

假设一零厚度柔性板,在一沿 x 方向均匀流动 U 的不可压缩无粘流场中做波状摆动.板的运动由一系列波组成:

$$z = \text{Re}[h(x, t)] = \text{Re}[H(x) e^{i(\omega t - kx)}] = \text{Re}\left[\left(\sum_{n=1}^N A_n x^{n-1} e^{i\varphi_n}\right) e^{i(\omega t - kx)}\right], \quad (1)$$

其中, Re 表示实部, ω 为约化频率, k 为波数, A_n 是实系数, φ_n 表示第 n 项与第1项之间的相位差.所有的物理量都经过无量纲化.半板长 l 做为特征长度,因而 x 的取值范围在 -1 到 1 之间.来流速度 U 和 l/U 为特征速度和特征时间.

在此,假设振幅 h 要远远小于单位长度,因而无穿透的边界条件经过线化之后在 $z=0$ 上成立.放置离散涡于 $z=0$ 平面上以满足平板表面的边界条件以及替代尾迹中的涡层.在本文的涡格法中,平板表面和尾迹都根据“半圆”法则离散成小的面元(参见文献[12]和[14]).控制点取在计算平面上每个面元的形心.具体的细节可以参考文献[12-14].利用以上方法求得时均推力 T 和时均功率 E .在得到推力、功率等物理量之后,根据能量守恒定律得到能量耗散率为 $E_w = E - TU$.

当 $n \geq 2$ 时,记系数为 $\xi_{2n-2} = A_n \sin(\varphi_n)$ 以及 $\xi_{2n-3} = A_n \cos(\varphi_n)$,当 $n=1$ 时, $\xi_0 = A_1$,则时均功率、时均推力和能量耗散率经无量化后可以分别写成如下的二次形式:

$$\begin{cases} C_E = \xi^T \hat{E} \xi, \\ C_T = \xi^T \hat{T} \xi, \\ C_{EW} = \xi^T \hat{E}_w \xi, \end{cases} \quad (2)$$

其中, \hat{E} , \hat{T} , \hat{E}_w 为 $2N-1$ 阶实对称矩阵.

水动力学效率定义为

$$\eta = \frac{C_T}{C_E} = \frac{C_T}{C_T + C_{EW}}. \quad (3)$$

优化的目标就是获得最大水动力学效率.Wu^[11]指出,最优运动方式问题可以表述为:在一系列指定的运动方式 $h(x, t)$ 中,寻找到一个时均能量最小同时满足时均推力为一恒定值的运动方式.根据能量守恒定律,优化问题可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \min & C_{EW}, \\ \text{s. t.} & C_T = C_{T0} > 0. \end{cases} \quad (4)$$

2 Lagrange 乘子法

对于以上的优化问题,通常是采用 Lagrange 乘子法求解.对于幅值为线性变化的刚性板的最优运动问题,求得的 3 个解中只有 1 个解是可行的,记为 ξ_3 ,它满足约束条件.然而,这个解并不是一个最优解.事实上,Lagrange 乘子法所得到的解只满足最优解的必要条件,即一阶导为 0 条件.为了判断该点是否是极小值点,需要对该点的二阶充分条件进行验证,即对二阶增量 $f(d) = d^T W^* d$,在所有可行方向 d 上都满足条件 $f(d) \geq 0$,其中 d 满足 $a^T d = 0$, $a = \nabla C_T$, $W^* = \nabla_{\xi}^2 L(\xi_3, \lambda_3)$ 表示 Lagrange 函数 $L(\xi, \lambda)$ 的 Hess 矩阵, λ 为 Lagrange 乘子.

在该点处构造 3 个典型的可行方向分别为

$$d_1 = a \times \zeta_1, d_2 = a \times \zeta_2, d_3 = a \times \zeta_3,$$

其中, $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 是特征方程 $W^* \zeta = \lambda \zeta$ 的 3 个特征向量.图 1 给出了 3 个特征方向上的二阶增量 $f(d)$ 随频率的变化曲线.从图中可以看到, $f(d_1) > 0$ 以及 $f(d_2) < 0$.据此,可以断定该驻点既不是极小值点也不是极大值点,只是一个鞍点.

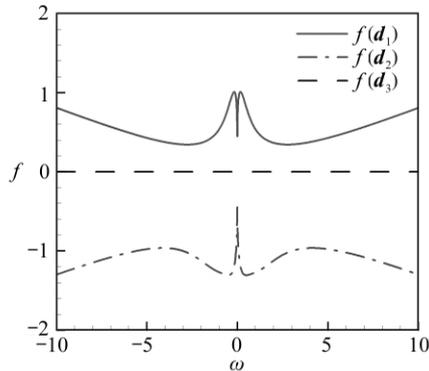


图 1 3 个典型方向上的二阶增量
Fig. 1 Second order increment in three typical directions

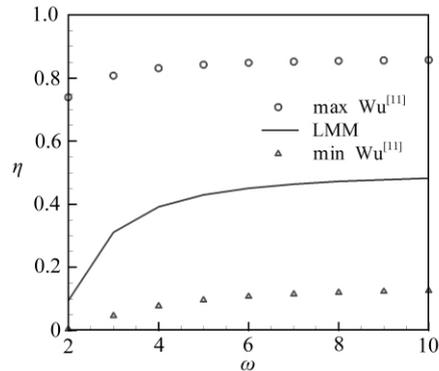


图 2 Lagrange 乘子法所得效率(实线)同 Wu 的文献[11]的结果比较

Fig. 2 Comparison between the efficiency by Lagrange multiplier method (solid line) and that by Wu^[11]

将 Lagrange 乘子法得到的效率同 Wu 的文献[11]的结果做比较,如图 2 所示.可以看到,Lagrange 乘子法得到的效率要低于 Wu 的文献[11]的最大效率而高于他的最小效率.这也可以判断该点既不是极大值点也不是极小值点.可以看到,Lagrange 乘子法在这里不再适用,这是由 Lagrange 乘子法局限性及问题的奇性导致的.

3 优化问题中的奇性

根据水动力学效率的定义,当能量耗散率为 0 时,效率达到最大值.但是,如果零能量耗散的运动产生的推力也为 0,要保持推力恒定,运动的振幅就必须趋于无穷.这种优化问题的奇性,下面还要更详细讨论.这种运动被 Ahmadi 等^[15]称为“不可见模态”.它对应于 \hat{E}_w 零特征值的特征矢量.

3.1 幅值线性变化问题的奇性

幅值线性变化的波动板的最优运动方式(记为 OP 01) 可以写成如下形式:

$$z = (A_1 + A_2 x e^{i\varphi}) e^{i(\omega t - kx)}. \quad (5)$$

能量耗散率 C_{EW} 的系数 \hat{E}_w 可以写成一个 3 阶矩阵. 利用特征值分解的办法, 特征值是特征方程 $\det(\hat{E}_w - \mu I) = 0$ 的解 μ . I 是单位阵. 相应于特征值 μ 的特征向量很容易计算得到. 图 3 给出了特征值随频率变化的曲线. 可以看到, 前两个特征值为正, 第 3 个特征值趋于零值. 通过进一步计算, 对应第 3 个特征向量的推力和功率都趋于零值. 因而第 3 个特征向量接近于不可见模态, 记为 ξ^1 . 根据 Ahmadi 的文献 [15] 中定义, 不可见模态是一种运动方式, 该运动方式对时均的物理量没有贡献, 也不产生尾迹涡.

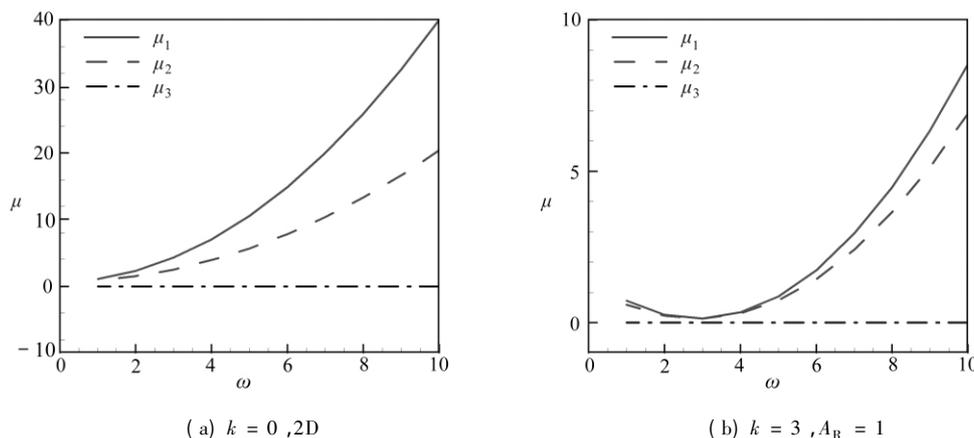


图 3 幅值线性变化的能量损耗率系数矩阵对应的特征值

Fig. 3 Eigenvalues of coefficient matrix of energy loss rate for motion with linearly varying amplitude

优化问题的奇性是由不可见模态和其它模态相互作用导致的. 除了不可见模态 ξ^1 之外, 还有另外两个模态记为 ξ^2 和 ξ^3 . 表征运动方式的矢量 ξ 可以改写为

$$\xi = a_1 \xi^1 + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3,$$

其中, a_1 , a_2 和 a_3 分别为相应的系数. 为使能量耗散率最小, 系数 a_1 和 a_2 必须趋于零值, 这是由于模态 ξ^1 和 ξ^2 会产生耗散能量. 与此同时, 推力也随着系数 a_1 和 a_2 的减小而减小. 为了保持推力恒定, 即 $C_T = \xi^T \hat{T} \xi = C_{T0}$, 不得不增加不可见模态的系数 a_3 . 而相应的能量耗散率并不会随着不可见模态幅值的增加而增加. 随着能量耗散率的逐渐减小, 相应的不可见模态的系数 a_3 增加, 导致整个运动的幅值增加. 当效率趋于 1 时, 幅值趋于无穷大. 因而, 如果不加约束条件的话, 该问题不存在最优解.

3.2 幅值二次变化问题的奇性

幅值二次变化的波动板的最优运动方式(记为 OP 012) 可以写成如下形式:

$$z = (A_1 + A_2 x e^{i\varphi_1} + A_3 x^2 e^{i\varphi_2}) e^{i(\omega t - kx)}. \quad (6)$$

能量耗散率的系数 \hat{E}_w 可以写成一个 5 阶矩阵. 同样用特征值分解的方法得到特征值和相应的特征向量. 图 4 给出了 5 个特征值随频率变化的曲线. 可以看到, 其中前两个特征值恒为正, 剩下的 3 个特征值都趋于零值. 通过计算表明, 3 个特征向量中任意一个对应的推力和能量都趋于零值, 表明 3 个特征向量都接近于不可见模态. 根据上一节的分析可知, 由于不可见模态的存在, 如果不增加幅值约束条件, 该优化问题将无解.

随着项数的增加, 不可见模态也增加, 求解最优运动方式的问题变得更加复杂. 并且, 继续

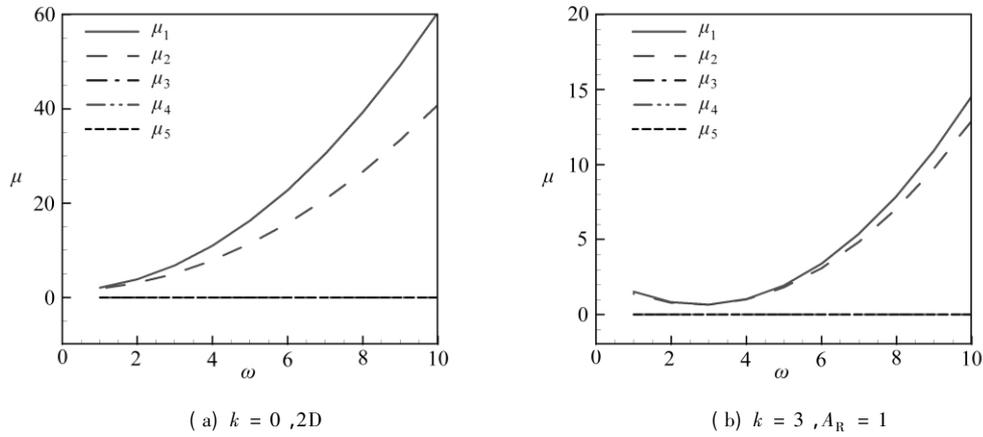


图4 幅值二次变化的能量损耗率系数矩阵对应的特征值

Fig.4 Eigenvalues of coefficient matrix of energy loss rate for motion with quadratically varying amplitude

增加项数,效率增加并不是非常明显,因而没有再考虑更多幂次的优化问题。

4 约束优化方法

为了消除问题的奇性,在原问题中增加了一个关于幅值的不等式约束条件.为了便于同 Wu 的文献 [11] 的结果作比较,不等式位于中点 $x = 0$ 处:

$$\| H(x = 0) \|^2 \leq \frac{1}{4} H_0, \tag{7}$$

其中 H_0 是一个参量,同 $x = 0$ 处最大振幅有关.此时,最优运动问题重新改写为

$$\begin{cases} \min(\max) & C_{EW}, \\ \text{s. t.} & C_T = C_{T0} \neq 0, \\ & \| H(x = 0) \|^2 \leq \frac{1}{4} H_0. \end{cases} \tag{8}$$

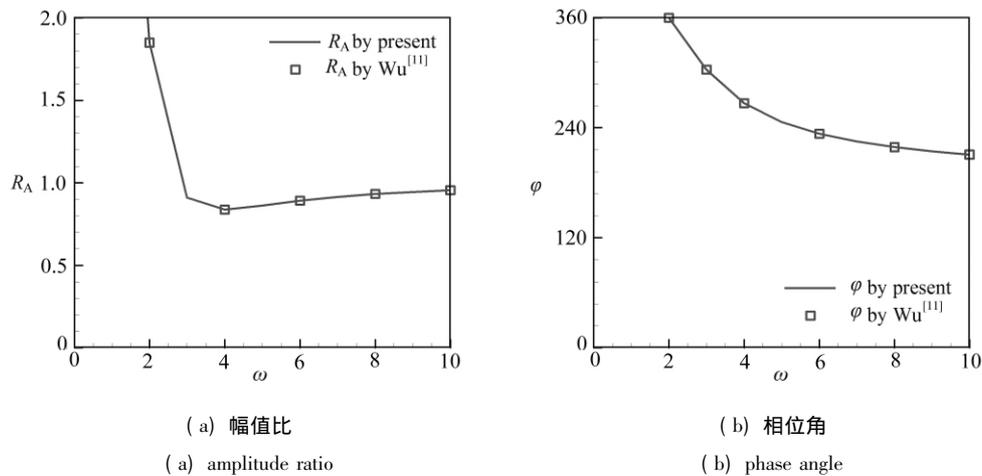


图5 本文所得效率最大的解同 Wu 的文献 [11] 的结果比较

Fig.5 Comparison of maximum efficiency solution by present with that by Wu [11]

在这个不等式约束下,该问题的奇性被消除掉.为了避免取到鞍点值,采用逐步二次规划

(SQP) 方法的优化程序求解以上问题. 该优化程序可以处理规则的混合约束, 也可以处理非规则的混合约束. 具体细节可以参见文献 [16-17].

为了验证方法的正确性, 求解刚性板 ($k = 0$) 的最优运动问题, 时均推力取为 $C_T = C_{T0} = 0.4$. 幅值比定义为 $R_A = A_2/A_1$. 对应最大效率的解如图 5 所示. 可以看到, 结果同 Wu 的文献 [11] 的结果一致.

5 算 例

用以上方法求解下面的几个算例, 获得了最优解. 时均推力取为 $C_{T0} = 0.4$. 波数 $k = 1$. 幅值参数 $H_0 = 0.1$.

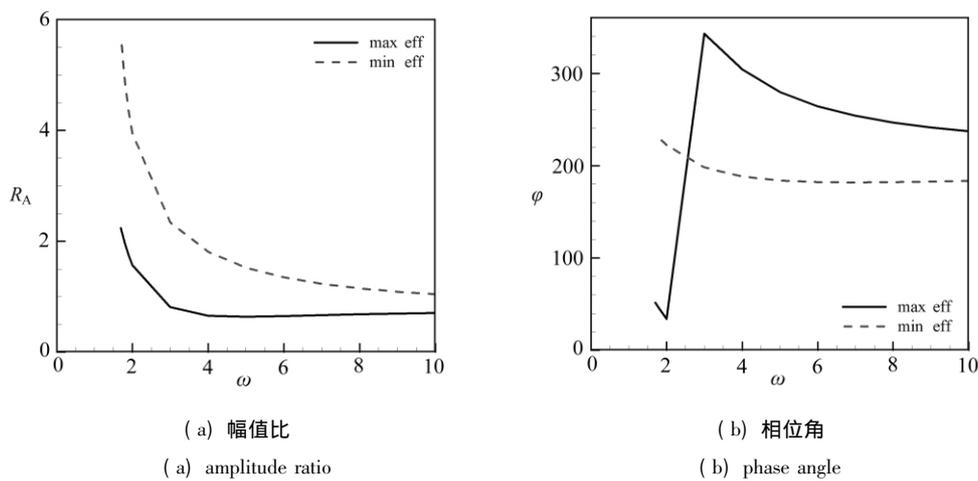


图 6 $H_0 = 0.1, k = 1, C_{T0} = 0.4$ 条件下的最优解

Fig. 6 Optimum solution for $H_0 = 0.1, k = 1, C_{T0} = 0.4$

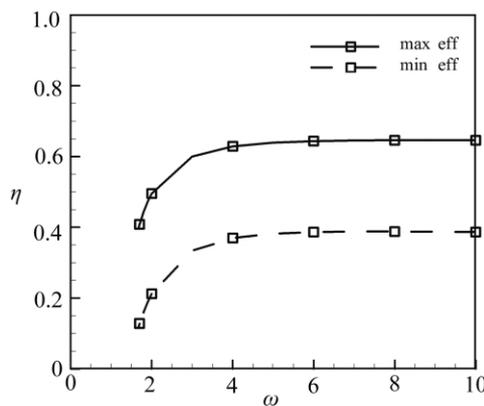


图 7 $H_0 = 0.1, k = 1, C_{T0} = 0.4$ 条件下, 最优效率随频率的变化曲线

Fig. 7 Optimum efficiency vs frequency (ω) for $H_0 = 0.1, k = 1, C_{T0} = 0.4$

5.1 二维波动板的最优运动方式

在这一节考虑了幅值线性变化的二维波动板的最优运动方式. 幅值比 ($R_A = A_2/A_1$) 和相位角 (φ) 由图 6 给出. 可以看到, 当频率高于一个临界值时, 可以同时得到最大效率和最小效率. 对于更小的频率, 则不存在最优解. 由于推力随着频率的减小而减小. 当频率小于临界值

时,不存在某一摆动方式能够产生足够推力以维持推力恒定的条件.随着频率的增加,幅值比和相位差一开始变化很快,在频率 ω 较高时,变化较为缓慢. Wu^[11]指出,当游动频率 ω 的区间落在幅值比 R_A 和相位角 φ 变化较为剧烈的区域内,更为熟练的控制是必不可少的.相应的效率随频率的变化曲线在图7中给出.

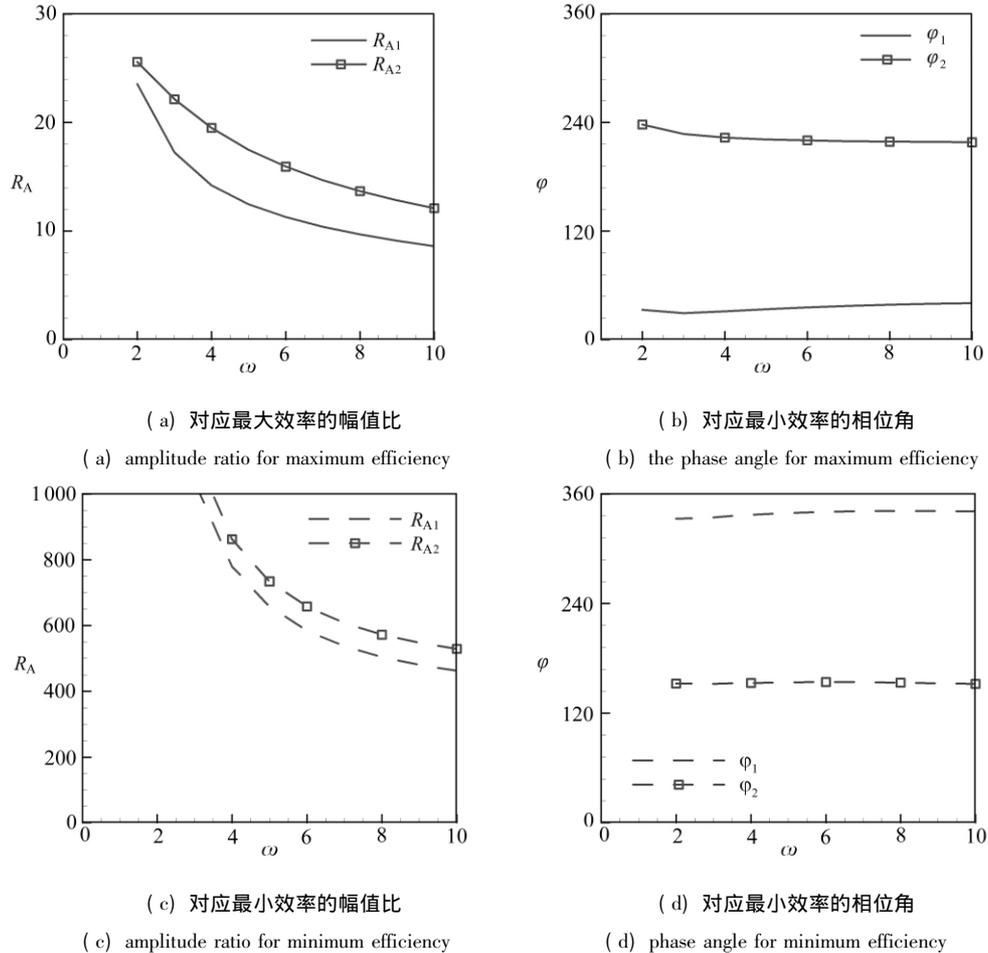


图8 $H_0 = 0.1, k = 1, C_{T0} = 0.4$ 条件下的最优解

Fig. 8 Optimum solution for $H_0 = 0.1, k = 1, C_{T0} = 0.4$

幅值为二次变化的二维波动板的最优运动方式的解在图8中给出.幅值比为 $R_{A1} = A_2/A_1$ 和 $R_{A2} = A_3/A_1$.相应的水动力学效率在图9中给出.可以看到,最大效率接近于1,最小效率接近于0.和上一节的讨论比较可知,幅值为二次变化的最大效率要高于幅值为一次变化的最大效率.

5.2 三维波动板的最优运动方式

在这一节,考虑流体中三维波动板的最优运动方式.展弦比 A_R 取为0.1, 1和10.

不同展弦比下,幅值线性变化的三维波动板的最优效率如图10所示.可以看到,三维波动板的效率随频率的变化趋势同二维的结果相近.随着展弦比减小,最大效率相应减小,同时最小效率相应增大.最大效率同最小效率之差随着展弦比的减小相应减小,表明随着展弦比的减小,摆动方式的变化对效率的影响也逐渐减弱.

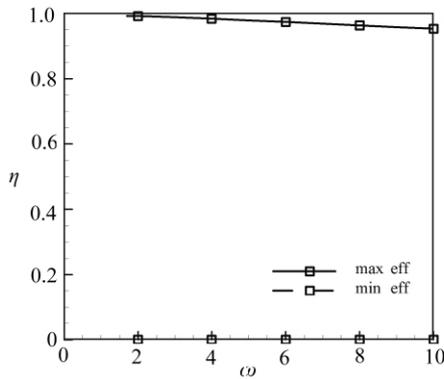


图9 $H_0 = 0.1, k = 1, C_{T0} = 0.4$ 条件下, 最优效率随频率变化的曲线

Fig. 9 Optimum efficiency vs frequency (ω) for $H_0 = 0.1, k = 1, C_{T0} = 0.4$

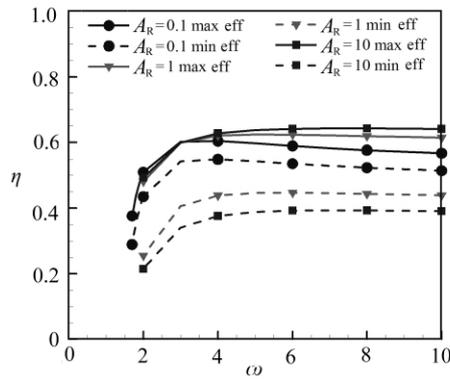


图10 $k = 1, C_{T0} = 0.4, H_0 = 0.1$ 条件下, 不同展弦比三维波动板的最优效率随频率变化的曲线

Fig. 10 Optimum efficiency of three-dimensional undulatory plate vs frequency (ω) for different aspect ratio (A_R) for $k = 1, C_{T0} = 0.4, H_0 = 0.1$

6 结论以及未来工作

本文提出了一种求解波状游动平板最优运动方式的数值优化方法。由于优化问题存在奇性, 通常的 Lagrange 乘子法得到解可能不是最优解, 而只是一个鞍点。这一奇性同不可见模态有关。对于幅值线性变化的最优运动方式问题中, 只存在 1 个不可见模态, 而对于幅值二次变化的问题中, 存在 3 个不可见模态。为了消除奇性, 在原问题上增加关于幅值的约束条件。为避免得到鞍点值, 采用一个基于逐步二次规划的优化程序求解该问题。将这个方法运用到二维和三维波动板的最优运动方式的问题中, 得到了最优解。

由于涡格法程序基于线化假设基础之上, 将计算量降到很低。然而, 基于线化涡格法的优化问题是奇性的, 这将会导致数值计算的处理较为困难。此外, 线性涡格法的计算精度不如基于求解 Navier-Stokes 方程组的数值计算。不过, 线性涡格法的低计算量很适合进行复杂的性能优化。

致谢 本文第一作者非常感谢孙亮的讨论和帮助。

参考文献:

- [1] Wu T Y. Swimming of a waving plate [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1961, **10**: 321-344.
- [2] Liu P, Bose N. Propulsive performance from oscillating propulsors with spanwise flexibility [J]. *Proceeding of the Royal Society of London*, 1997, **453** (1963): 1763-1770.
- [3] Zhu Q, Wolfgang M J, Yue D K P, Triantafyllou M S. Three dimensional flow structures and vorticity control in fish-like swimming [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2002, **468**: 1-28.
- [4] DONG Gen-jin, LU Xi-yun. Numerical analysis on the propulsive performance and vortex shedding of fish-like traveling wavy plate [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005, **48**: 1351-1373.
- [5] LU Xi-yun, YIN Xie-zhen. Propulsive performance of fish-like traveling wavy wall [J]. *Acta Mechanica*, 2005, **175**: 197-215.
- [6] WU Chui-jie, WANG Liang. Where is the rudder of a fish? —the mechanism of swimming and control

- of self-propelled fish school [J]. *Acta Mechanica Sinica* ,2010 ,**26** (1) : 45-65.
- [7] Lighthill M J. *Mathematical Biofluidynamics* [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics ,1975.
- [8] Lighthill M J. Note on the swimming of slender fish [J]. *Journal of Fluid Mechanics* ,1960 ,**9**: 305-320.
- [9] Lighthill M J. Aquatic animal propulsion of high hydromechanical efficiency [J]. *Journal of Fluid Mechanics* ,1970 ,**44**: 265-301.
- [10] Wu T Y. Hydromechanics of swimming propulsion. part 1: swimming of a two-dimensional flexible plate at variable forward speeds in an inviscid fluid [J]. *Journal of Fluid Mechanics* ,1971 ,**46**: 337-355.
- [11] Wu T Y. Hydromechanics of swimming propulsion. part 2: some optimum shape problems [J]. *Journal of Fluid Mechanics* ,1971 ,**46**: 521-544.
- [12] CHENG Jian-yu ,ZHUANG Li-xian ,TONG Bing-gang. Analysis of swimming three-dimensional waving plates [J]. *Journal of Fluid Mechanics* ,1991 ,**232**: 341-355.
- [13] Kagemoto H ,Wolfgang M J ,Yue D K P ,Triantafyllou M S. Force and power estimation in fish-like locomotion using a vortex-lattice method [J]. *Journal of Fluids Engineering* ,2000 ,**122**: 239-253.
- [14] Lan C E. A Quasi-vortex-lattice method in thin wing theory [J]. *Journal of Aircraft* ,1974 ,**11**(9) : 518-527.
- [15] Ahmadi A R ,Widnall S E. Energetics and optimum motion of oscillating lifting surfaces of finite span [J]. *Journal of Fluid Mechanics* ,1986 ,**162**: 261-282.
- [16] Spellucci P. An SQP method for general nonlinear programs using only equality constrained subproblems [J]. *Mathematical Programming* ,1998 ,**82**(3) : 413-448.
- [17] Spellucci P. A new technique for inconsistent problems in the SQP method [J]. *Mathematical Method of Operations Research* ,1998 ,**47**: 355-400.

Numerical Method for Optimum Motion of Undulatory Swimming Plate in Fluid Flow

QIAN Qin-jian , SUN De-jun

(*Department of Modern Mechanics , University of Science and Technology of China ,
Hefei 230026 , P. R. China*)

Abstract: A numerical method for optimum motion of an undulatory swimming plate was presented. The optimal problem was stated as minimizing the power input under the condition of fixed thrust. The problem was singular for the invisible modes and the commonly used Lagrange method may not predict an optimum solution but just a saddle point. To eliminate the singularity , an additional amplitude inequality constraint was added to the problem. A numerical optimization code with a sequential quadratic programming method was used to solve the problem. The method was applied to several cases of two-dimensional and three-dimensional undulatory plates' motions and the optimum results were obtained.

Key words: undulating plate; optimization; panel method; sequential quadratic programming