

微极流体在两个伸展平面之间的 不稳定轴对称 MHD 流动*

T·哈亚特^{1,2}, M·纳瓦兹¹, S·奥拜达特²

(1. 古艾德-阿赞姆大学 数学系,伊斯兰堡 45320, 巴基斯坦;

2. 国王大学 数学系,利雅得 11451,沙特阿拉伯)

摘要: 研究在两个径向伸展的平面之间,微极流体作随时间变化的磁流体动力学(MHD)流动.考虑了高浓度微元($n = 0$)和低浓度微元($n = 0.5$)两种情况.使用恰当的变换,将偏微分方程转换为常微分方程.用同伦分析法(HAM),对变换后的方程求解.给出不同参数下,角速度、表面摩擦因数和面应力偶系数的图形结果.

关键词: 微极流体; 径向伸展; 同伦分析法; 表面摩擦因数; 面应力偶系数

中图分类号: O361.3;O357.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.03.010

引 言

在过去几十年里,由于非 Newton 流体在工业和工程领域中的广泛应用,对这类流体的研究取得了长足的进步.对该类流体流变特性的研究,有助于弄清楚诸如洗涤剂、番茄酱、泥浆、油漆和化妆品等类常见流体的流动特征.经典的 Navier-Stokes 方程无法解释诸如微转动、旋转惯量、应力偶等流动特性,许多流体,如高分子液体、液晶体、胶状悬浮体、动物血液和含少量高分子溶液的流体等,上述流动特性对此类流体就十分重要.实际上,在 Erigen^[1]建立的非 Newton 流体理论中,微转动、旋转惯量、面应力偶和体扭矩等都是重要的物理概念,具有这些特征的流体被称为微极流体.

一些研究者对微极流体稳定和不稳定的流动进行了研究,比如 Gorla 等^[2]在一个微极流体的轴对称驻点流动中,进行了组合对流的研究. Gorla 和 Takhar^[3]就旋转轴对称表面具有集中热源时,研究微极流体的边界层流动. Guram 和 Smith^[4]分析了具有强/弱相互作用微极流体的驻点流. Kumari 和 Nath^[5]提出了驻点处微极流体的不稳定边界层流动. Abdullah 和 Amin^[6]将血液的流动,视为流过逐渐狭窄锥形动脉的微极流体. Seddeek^[7]研究了微极流体流过连续运动板时的流动. Nazar 等^[8]就高浓度微元和低浓度微元两种情况,研究了伸展平面上不可压缩微极流体的二维稳定的驻点流动,使用 Keller Box 算法,对控制方程进行数值求解,在有限

* 收稿日期: 2010-08-17; 修订日期: 2010-12-01

基金项目: 巴基斯坦高等教育委员会基金资助项目

作者简介: M. Nawaz(联系人. Tel: +92-51-90642172; E-mail: nawaz_d2006@yahoo.com).

本文原文为英文,海治译,张禄坤校.

范围内将得到的结果与已发表的著作进行了比较。Takhar 等^[9]利用有限元法,研究两个多孔圆盘之间微极流体的流动及其热传导。Abo-Eldahab 和 Ghonaim^[10]研究辐射效应对多孔介质中微极流体热传导的影响。Nazar 等^[11]在微极流体中等温球体上自由对流的研究时,引入了边界层假设。Sahoo^[12]由轴对称伸展平面引起的、导电非 Newton 的、粘弹性 2 级流体的流动进行了研究。接着,Sahoo^[13]就 2 级流体通过径向伸展平面,分析滑移、粘性耗散和 Joule 传热,对 MHD 流动和热传递的影响。在文献[12-13]的研究中,作者考虑了越过径向伸展平面时的流动。然而,Hayat 和 Nawaz^[14]对两个径向伸展平面之间,粘性导电流体的轴对称稳定流动,首次考虑了热传导特性。使用同伦分析法得到导出方程的解析解。接着,Hayat 和 Nawaz^①,讨论了由径向伸展平面引起 MHD 微极流体的稳定流动。

文献调查研究表明,在两个以时间的线性速度伸展的平面间,微极流体的不稳定流动,迄今尚未发现进行过研究。本文将在这方面进行一定的尝试。基本上是在 Hyayt 和 Nawaz^①的继续,考虑高浓度微元和低浓度微元两种情况,用同伦分析法(HAM)得到控制方程的解。目前,同伦分析法(HAM)应用十分广泛,许多研究者应用同伦法求解非线性问题^[15-32]。最后,详细地显示和分析图示结果。

1 问题陈述

考虑在 $z = \pm L$ 处的两个无限平行平面之间,不可压缩微极流体的轴对称流动,两平面均以 $u_w = ar(1 - bt)^{-1}$ 的速度伸展。假设流动具有对称性,在与板平面垂直,即与 z 轴平行的方向上,施加有磁场 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0(1 - bt)^{-1/2}$,没有电场作用即 $\mathbf{E} = 0$,取较小的磁 Reynolds 数,感应磁场忽略不计。

图 1 给出了问题的物理模型及其坐标系,速度 \mathbf{V} 的分量 u, v, w ,微转动矢量 $\mathbf{\Omega}$ 的分量 N_1, N_2 和 N_3 ,分别表示在径向、周向和轴向的分量。流动的基本控制方程为^{[11]①}:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = & -\nabla p + (\mu + k) \nabla^2 \mathbf{V} + \\ & k \nabla \times \mathbf{\Omega} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \rho j \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = & (\alpha + \beta + \gamma) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Omega}) - \\ & \gamma \nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Omega}) + k \nabla \times \mathbf{V} - \\ & 2k\mathbf{\Omega}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\mathbf{J} = \sigma[\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \tag{4}$$

其中 d/dt 为随体导数, \mathbf{V} 为速度场, j 为单位质量的微惯量, $\mathbf{\Omega}$ 为微转动矢量, ρ 为流体密度, μ 和 k 为粘性系数, α, β 和 γ 为旋转粘性系数。进一步地, μ, k, α, β 和 γ 满足以下约束^[15]:

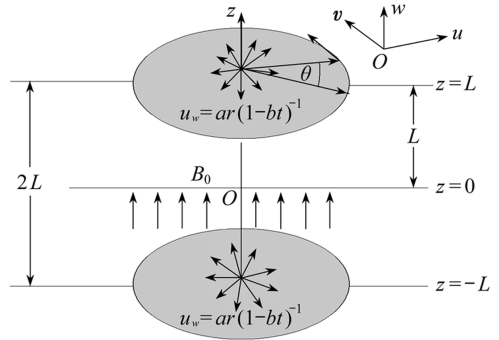


图 1 问题的几何表示及其坐标系

Fig. 1 Geometry of the problem and coordinate system

① Hyayt T, Nawaz M. Flow of magnetohydrodynamic micropolar fluid between the radially stretching sheets [J]. Z Naturforsch A (accepted)

$$2\mu + k \geq 0, \quad k \geq 0; \quad 3\alpha + \beta + \gamma \geq 0, \quad \gamma \geq |\beta|.$$

轴对称流动时的速度场和微转动场分别为

$$\mathbf{V} = [u(r, z, t), 0, w(r, z, t)], \quad \boldsymbol{\Omega} = [0, N_2(r, z, t), 0], \quad (5)$$

其中 r 和 z 分别为径向和轴向坐标, u 和 w 分别为径向 r 和轴向 z 的速度分量, t 为时间, N_2 为微转动矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的周向分量. 方程(1) ~ (5)可以改写为

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\rho} (\mu + k) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right] - \frac{k}{\rho} \frac{\partial N_2}{\partial z} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} (\mu + k) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] - \frac{k}{\rho} \left[\frac{\partial N_2}{\partial r} + \frac{N_2}{r} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_2}{\partial t} + u \frac{\partial N_2}{\partial r} + w \frac{\partial N_2}{\partial z} = \\ \frac{\gamma}{\rho j} \left[\frac{\partial^2 N_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 N_2}{\partial z^2} - \frac{N_2}{r^2} \right] - \frac{k}{\rho j} \left[2N_2 + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

边界条件为

$$\begin{cases} u(r, L, t) = u_w, \quad w(r, L, t) = 0, \quad N_2(r, L, t) = -n \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=L}, \\ \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad w(r, 0, t) = 0, \quad N_2(r, 0, t) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

其中 $n(0 \leq n \leq 1)$ 为常量, $n=0$ 表示伸展平面上微元无转动(伸展表面处 $\boldsymbol{\Omega}=0$), 也就是说微元浓度极高. 当 $n=0.5$ 时应力张量的反对称项消失, 这表明平面上微元浓度降低. 当 $n=1$ 时有湍流边界层^[8]. 本文流动的分析考虑 $n=0$ 和 $n=0.5$ 两种情况.

方程(6) ~ (10)无量纲化时, 要用到以下变换:

$$u = \frac{ar}{1-bt} f'(\eta), \quad w = -\frac{2aL}{\sqrt{1-bt}} f(\eta), \quad N_2 = \frac{ar}{L(1-bt)} g(\eta), \quad \eta = \frac{z}{L\sqrt{1-bt}}. \quad (11)$$

使用上面的变换并消去压力梯度后, 得到

$$\begin{cases} (1+K)f'''' - \frac{SRe}{2}[\eta f'''' + 3f'''] + 2Reff'''' - Kg'' - ReMf'' = 0, \\ f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{K}{2}\right)g'' + ReK[f'' - 2g] - \frac{SRe}{2}[3g + \eta g'] + Re[2fg' - f'g] = 0, \\ g(1) = -\eta f''(1), \quad g(0) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

这里, 方程(6)已得到自动满足, 且 $\gamma = (\mu + k/2)j$ 和 $j = \nu(1-bt)/a$ ^[8]. 无量纲的量

$$K = \frac{k}{\mu}, \quad Re = \frac{aL^2}{\nu}, \quad M = \frac{\sigma B_0^2}{\rho a}, \quad S = \frac{b}{a},$$

分别表示微极参数 K 、Reynolds 数 Re 、Hartman 数 M 和不稳定参数 S , 稳定时 $S = 0$. 进一步地, 当 $K = 0$ 时, 方程(7)和(8)简化为经典的 Navier-Stokes 方程, 实际上, 该情况下微转动效应小得可以忽略不计, 不会对流动产生影响.

$z = +L$ 处的表面摩擦因数 C_{fr} 和面应力偶系数 C_{gr} 为^[9]:

$$C_{fr} = \frac{\tau_w}{\rho(u_w)^2} = \frac{(\mu + k)}{\rho(ar)^2(1 - bt)^{-2}} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{z=L} = \frac{(1 + K)}{Re_r} f''(1), \quad (14)$$

$$C_{gr} = - \frac{L\gamma(\partial N_2/\partial z) \Big|_{z=L}}{\rho(u_w)^2} = - \frac{L\gamma(\partial N_2/\partial z) \Big|_{z=L}}{\rho(ar)^2(1 - bt)^{-2}} = - \frac{(1 + K/2)}{Re_r} g'(1), \quad (15)$$

其中 $Re_r = ar/(\nu\sqrt{1 - bt})$ 为局部 Reynolds 数.

2 问题的解

为用同伦分析求解, 选用如下基函数:

$$\{\eta^{2n+1}, n \geq 0\} \quad (16)$$

并表示为

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^{2n+1}, \quad (17)$$

$$g(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \eta^{2n+1}, \quad (18)$$

其中 a_n 和 b_n 为参数. 假设初始猜测值为以下形式:

$$\begin{cases} f_0(\eta) = \frac{1}{2}(\eta^3 - \eta), \\ g_0(\eta) = -nf''(1)\eta, \end{cases} \quad (19)$$

并采用如下线性算子:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(f(\eta)) = \frac{d^4 f}{d\eta^4}, \\ \mathcal{L}_2(g(\eta)) = \frac{d^2 g}{d\eta^2}, \end{cases} \quad (20)$$

算子具有特性:

$$\mathcal{L}_1[C_1 + C_2\eta + C_3\eta^2 + C_4\eta^3] = 0, \quad (21)$$

$$\mathcal{L}_2[C_5 + C_6\eta] = 0, \quad (22)$$

其中 $C_i (i = 1, \dots, 6)$ 为积分常数.

2.1 零阶变形问题

构造如下的零阶变形问题:

$$(1 - q)\mathcal{L}_1[\Phi(\eta; q) - f_0(\eta)] = q\hbar_1 \mathcal{N}_1[\Phi(\eta; q), \Psi(\eta; q)], \quad (23)$$

$$\Phi(1; q) = 0, \frac{\partial \Phi(\eta; q)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = 1, \Phi(0; q) = 0, \frac{\partial^2 \Phi(\eta; q)}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad (24)$$

$$(1 - q)\mathcal{L}_1[\Psi(\eta; q) - g_0(\eta)] = q\hbar_2 \mathcal{N}_2[\Psi(\eta; q), \Phi(\eta; q)], \quad (25)$$

$$\Psi(1; q) = -n \frac{\partial^2 \Phi(\eta; q)}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=1}, \Psi(0; q) = 0, \quad (26)$$

上式中 $q \in [0, 1]$ 和 $\hbar_i \neq 0$ ($i = 1, 2$) 分别称为嵌入和收敛控制参数, 且满足: $\Phi(\eta; 0) = f_0(\eta)$, $\Psi(\eta; 0) = g_0(\eta)$, $\Phi(\eta; 1) = f(\eta)$ 和 $\Psi(\eta; 1) = g(\eta)$. 当 q 从 0 变化到 1 时, $\Phi(\eta; q)$ 从 $f_0(\eta)$ 变化到 $f(\eta)$, $\Psi(\eta; q)$ 从 $g_0(\eta)$ 变化到 $g(\eta)$. 非线性算子 \mathcal{N}_i ($i = 1, 2$) 由以下式子给出:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1[\Phi(\eta; q), \Psi(\eta; q)] &= (1 + K) \frac{\partial^4 \Phi(\eta; q)}{\partial \eta^4} - \\ &\frac{SRe}{2} \left[\eta \frac{\partial^3 \Phi(\eta; q)}{\partial \eta^3} + 3 \frac{\partial^2 \Phi(\eta; q)}{\partial \eta^2} \right] + 2Re\Phi(\eta; q) \frac{\partial^3 \Phi(\eta; q)}{\partial \eta^3} - \\ &K \frac{\partial^2 \Psi(\eta; q)}{\partial \eta^2} - ReM \frac{\partial^2 \Phi(\eta; q)}{\partial \eta^2}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2[\Psi(\eta; q), \Phi(\eta; q)] &= \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{\partial^2 \Psi(\eta; q)}{\partial \eta^2} - \\ &KRe \left[2\Psi(\eta; q) - \frac{\partial^2 \Phi(\eta; q)}{\partial \eta^2} \right] - \frac{SRe}{2} \left[3\Psi(\eta; q) + \eta \frac{\partial \Psi(\eta; q)}{\partial \eta} \right] + \\ &Re \left[2\Phi(\eta; q) \frac{\partial \Psi(\eta; q)}{\partial \eta} - \Psi(\eta; q) \frac{\partial \Phi(\eta; q)}{\partial \eta} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

用 Taylor 级数展开 $\Phi(\eta; q)$ 和 $\Psi(\eta; q)$, 得到

$$\Phi(\eta; q) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta) q^m, \quad (29)$$

$$\Psi(\eta; q) = g_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\eta) q^m, \quad (30)$$

$$f_m(\eta) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Phi(\eta; q)}{\partial \eta^m} \Big|_{q=0}, \quad (31)$$

$$g_m(\eta) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Psi(\eta; q)}{\partial \eta^m} \Big|_{q=0}. \quad (32)$$

2.2 高阶变形问题

m 阶变形问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = \hbar_1 \mathcal{R}_{1m}(f_{m-1}(\eta)), \\ f_m(1) = 0, f_m'(1) = 0, f_m(0) = 0, f_m''(0) = 0, \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_2[g_m(\eta) - \chi_m g_{m-1}(\eta)] = \hbar_2 \mathcal{R}_{2m}(g_{m-1}(\eta)), \\ g_m(1) = 0, g_m(0) = 0, \end{cases} \quad (34)$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1, \end{cases} \quad (35)$$

$$\mathcal{R}_{1m}(f_m(\eta), g_m(\eta)) = (1 + K) f_{m-1}''' - \frac{SRe}{2} [3f_{m-1}'' + \eta f_{m-1}'''] -$$

$$ReM f_{m-1}'' + 2Re \sum_{n=0}^{m-1} f_n''' f_{m-1-n} - Kg_{m-1}'',$$

$$\mathcal{R}_{1m}(g_m(\eta), f_m(\eta)) = \left(1 + \frac{K}{2}\right) g_{m-1}'' + ReK [f_{m-1}'' - 2g_{m-1}'] -$$

$$\frac{SRe}{2}[3g_{m-1} + \eta g'_{m-1}] + Re \sum_{n=0}^{m-1} [2f_n g'_{m-1-n} - f'_n g_{m-1-n}] \cdot$$

m 阶变形问题的解为

$$f_m(\eta) = f_m^*(\eta) + C_1^m + C_2^m \eta + C_3^m \eta^2 + C_4^m \eta^2, \tag{36}$$

$$g_m(\eta) = g_m^*(\eta) + C_5^m + C_6^m \eta, \tag{37}$$

其中 $f_m^*(\eta)$ 和 $g_m^*(\eta)$ 分别表示方程(33)和(34)的特解, $C_i^m (i = 1, \dots, 6)$ 由方程(33)和(34)中的边界条件给出.

3 同伦解的收敛性

同伦分析法得到的级数解中包含了收敛控制参数(辅助参数), 利用辅助参数来调整级数解的收敛区间. 为了检验辅助参数的影响, 图2和图3中分别绘出了 \hbar_1 和 \hbar_2 曲线. 从图2和图3中可以看到, 当 $-1.2 \leq \hbar_1, \hbar_2 \leq -0.45$ 时级数解收敛. 但是在接下来的分析中, \hbar_1 和 \hbar_2 都取固定值 -0.8 . 表1给出了级数解的收敛性. 从表中可以看到, 第20阶近似的级数解, 已达到11位小数的收敛性.

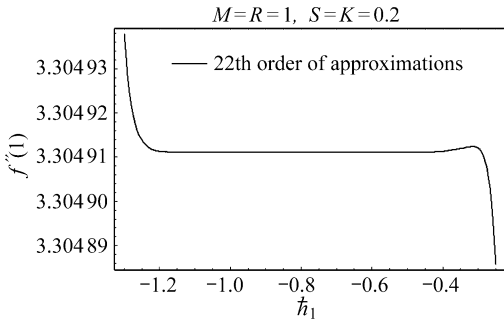


图2 $f''(1)$ 的 \hbar_1 曲线

Fig. 2 \hbar_1 curve of $f''(1)$

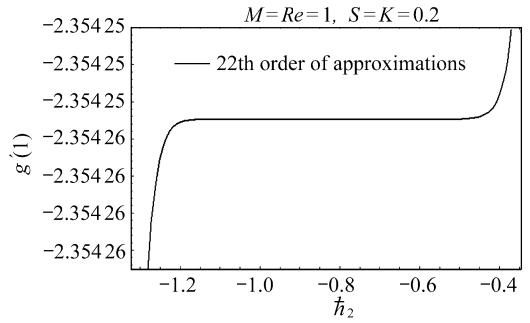


图3 $g'(1)$ 的 \hbar_2 曲线

Fig. 3 \hbar_2 curve of $g'(1)$

表1 当 $Re = M = 2.0, S = K = 0.2, n = 0.5$ 和 $\hbar_1 = \hbar_2 = -0.8$ 时 HAM 解的收敛性

Table 1 Convergence of HAM solutions when $Re = M = 2.0, S = K = 0.2, n = 0.5$ and $\hbar_1 = \hbar_2 = -0.8$

order of approximations	$f''(1)$	$g'(1)$
1	3.950 857 142 86	-3.575 428 571 43
5	3.886 969 275 34	-3.605 904 554 66
10	3.887 104 492 42	-3.606 052 732 54
15	3.887 104 582 28	-3.606 052 850 00
20	3.887 104 582 33	-3.606 052 850 11
25	3.887 104 582 33	-3.606 052 850 11
30	3.887 104 582 33	-3.606 052 850 11
35	3.887 104 582 33	-3.606 052 850 11

4 结果及其讨论

本节讨论 Hartman 数 M 、Reynolds 数 Re 、不稳定参数 S 和微极参数 K , 对速度的径向分量 $f'(\eta)$ 、速度的轴向分量 $f(\eta)$ 和角速度的周向分量的影响。

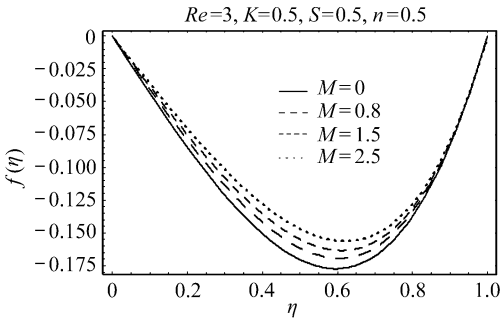


图 4 M 对 $f(\eta)$ 的影响

Fig. 4 Influence of M on $f(\eta)$

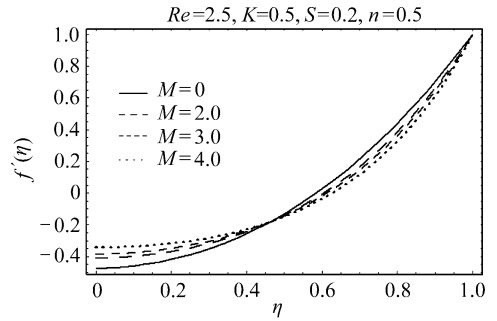


图 5 M 对 $f'(\eta)$ 的影响

Fig. 5 Influence of M on $f'(\eta)$

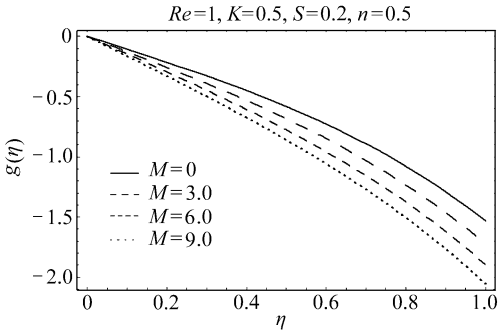


图 6 当 $n = 0.5$ 时 M 对 $g(\eta)$ 的影响

Fig. 6 Influence of M on $g(\eta)$ when $n = 0.5$

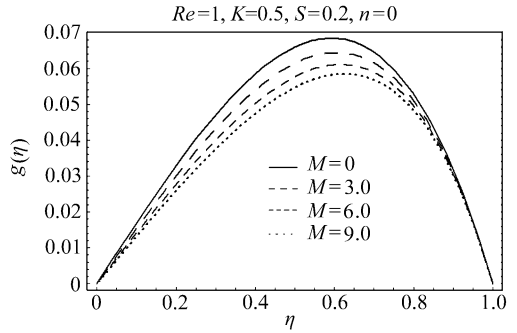


图 7 当 $n = 0$ 时 M 对 $g(\eta)$ 的影响

Fig. 7 Influence of M on $g(\eta)$ when $n = 0$

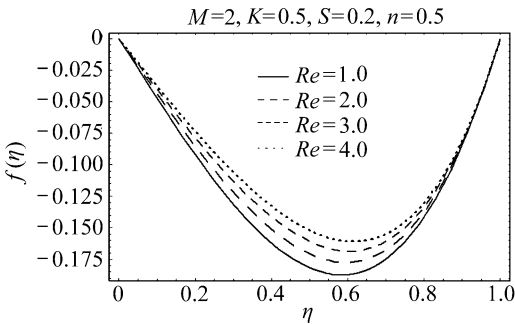


图 8 Re 对 $f(\eta)$ 的影响

Fig. 8 Influence of Re on $f(\eta)$

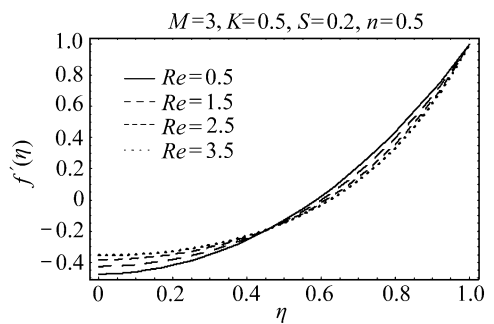


图 9 Re 对 $f'(\eta)$ 的影响

Fig. 9 Influence of Re on $f'(\eta)$

图 4 和图 5 分别给出 Hartman 数 M 对 $f(\eta)$ 和 $f'(\eta)$ 的影响。从图中可以看到,随着 M 的增加, $f(\eta)$ 和 $f'(\eta)$ 的量值在减小,这是因为 Lorentz 力阻碍了径向和轴向的流动。

图 6 和图 7 分别给出 $n = 0$ (高浓度微元) 和 $n = 0.5$ (低浓度微元) 时,磁场对无量纲角速度 $g(\eta)$ 的影响。从图中可以看到, $n = 0.5$ 时微元可以在伸展平面上转动, $n = 0$ 时微元不可以

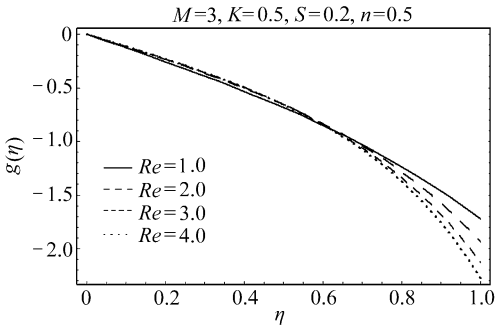


图 10 当 $n = 0.5$ 时 Re 对 $g(\eta)$ 的影响
Fig. 10 Influence of Re on $g(\eta)$ when $n = 0.5$

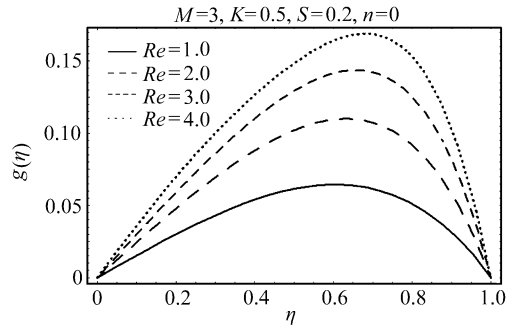


图 11 当 $n = 0$ 时 Re 对 $g(\eta)$ 的影响
Fig. 11 Influence of Re on $g(\eta)$ when $n = 0$

在伸展平面上转动, Hartman 数 M 对 $g(\eta)$ 的影响正好相反。

图 8 和图 9 表明, $f(\eta)$ 和 $f'(\eta)$ 的量值是 Reynolds 数 Re 的减函数。

从 $n = 0.5$ 时的图 10 发现, 伸展平面附近 Reynolds 数 Re 对 $g(\eta)$ 的影响更大些, 远离伸展平面处 Reynolds 数 Re 对 $g(\eta)$ 的影响可以忽略不计。从 $n = 0$ 时的图 11 可以看到, $g(\eta)$ 随着 Reynolds 数 Re 增加而增大。

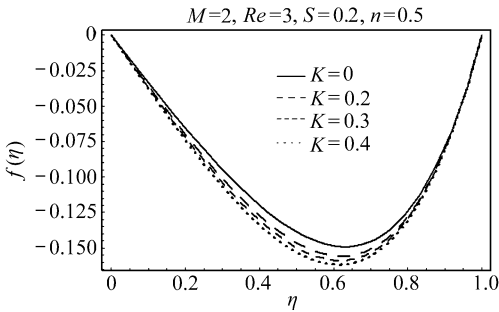


图 12 K 对 $f(\eta)$ 的影响
Fig. 12 Influence of K on $f(\eta)$

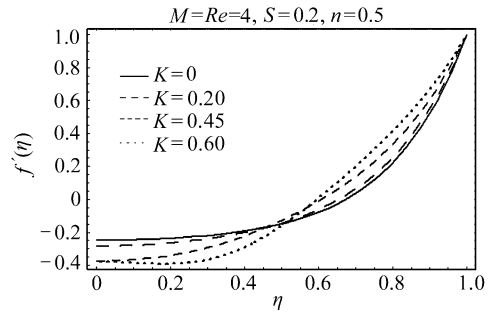


图 13 K 对 $f'(\eta)$ 的影响
Fig. 13 Influence of K on $f'(\eta)$

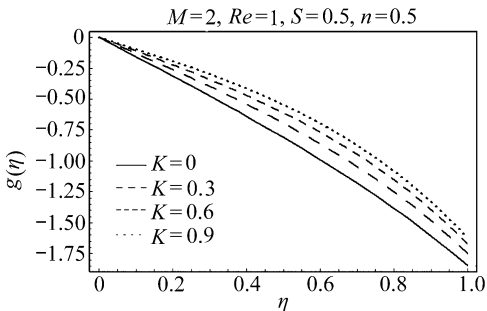


图 14 当 $n = 0.5$ 时 K 对 $g(\eta)$ 的影响
Fig. 14 Influence of K on $g(\eta)$ when $n = 0.5$

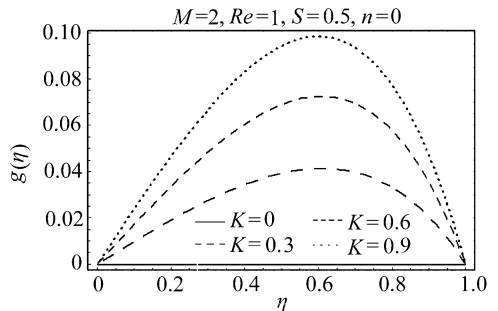


图 15 当 $n = 0$ 时 K 对 $g(\eta)$ 的影响
Fig. 15 Influence of K on $g(\eta)$ when $n = 0$

图 12 和图 13 显示, 随着微极参数 K 的增加, 无量纲轴向分量 $f(\eta)$ 和径向分量 $f'(\eta)$ 的量值随之增加。

图 14 给出 $n = 0.5$ 时, 随着微极参数 K 的增加, 角速度 $g(\eta)$ 的量值在减少。而图 15 给出 $n = 0$ 时, 随着微极参数 K 的增加, 角速度 $g(\eta)$ 的量值在增加。

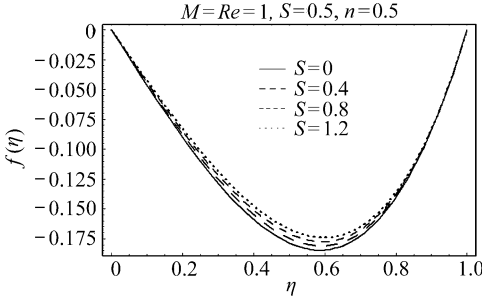


图 16 S 对 $f(\eta)$ 的影响

Fig. 16 Influence of S on $f(\eta)$

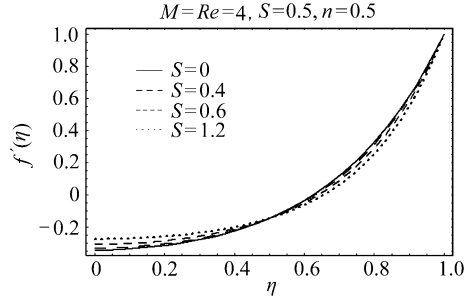


图 17 S 对 $f'(\eta)$ 的影响

Fig. 17 Influence of S on $f'(\eta)$

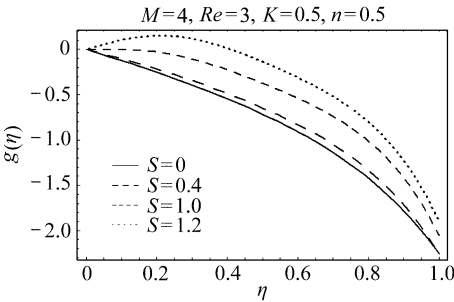


图 18 当 $n = 0.5$ 时 S 对 $g(\eta)$ 的影响

Fig. 18 Influence of S on $g(\eta)$ when $n = 0.5$

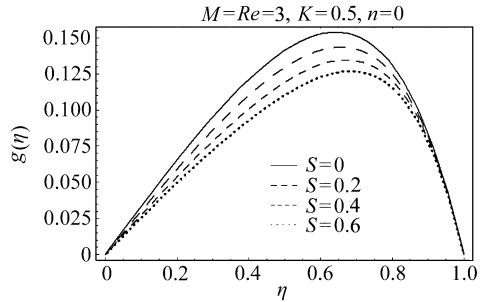


图 19 当 $n = 0$ 时 S 对 $g(\eta)$ 的影响

Fig. 19 Influence of S on $g(\eta)$ when $n = 0$

图 16 ~ 19 显示不稳定参数 S 对 $f(\eta)$, $f'(\eta)$ 和 $g(\eta)$ 的影响. 图 16 和图 17 表明, $f(\eta)$ 和 $f'(\eta)$ 量值都是不稳定参数 S 的增函数. 图 18 和图 19 表明, 不管 $n = 0$ 还是 $n = 0.5$, $g(\eta)$ 的量值均随着不稳定参数 S 的增加而减少.

表 2 表面摩擦因数 $Re_r C_{fr}$ 的数值结果

Table 2 Numerical values of skin friction coefficient $Re_r C_{fr}$

M	Re	K	$Re_r C_{fr}$			
			S = 0 (steady flow)		S = 0.2 (unsteady flow)	
			n = 0	n = 0.5	n = 0	n = 0.5
0.0	2.0	0.2	3.824 730 202 38	3.787 266 918 78	3.991 203 589 26	3.942 399 350 89
1.0			4.204 454 230 54	4.169 930 620 67	4.364 616 303 21	4.319 074 412 17
2.0			4.552 210 644 58	4.520 128 178 77	4.707 324 965 12	4.664 525 498 79
3.0			4.873 952 292 20	4.843 930 679 76	5.024 943 926 74	4.984 485 546 25
2.0	0.5	0.2	3.849 616 513 65	3.840 084 532 69	3.889 364 888 51	3.876 475 010 00
		1.5	4.325 559 753 65	4.300 118 946 60	4.442 916 612 55	4.408 832 700 45
		2.5	4.771 684 251 32	4.733 682 288 48	4.963 867 905 99	4.913 371 653 56
		3.5	5.190 461 303 92	5.142 413 975 60	5.454 879 450 55	5.391 481 431 78
2.0	2.0	0.0	3.951 059 166 98	3.951 059 166 98	4.104 398 089 67	4.104 398 089 67
		0.1	4.254 815 226 04	4.241 207 712 27	4.408 963 488 44	4.389 546 179 93
		0.2	4.552 210 644 58	4.520 128 178 77	4.707 324 965 12	4.664 525 498 79
		0.3	4.844 354 453 13	4.789 883 318 62	5.000 515 621 61	4.931 124 431 78

表 2 给出了两种情况下稳定流 ($S = 0$) 和不稳定流 ($S \neq 0$) 的表面摩擦因数. 第一种情况: 伸展面附近的微元不能转动 ($n = 0$), 即高浓度微元; 第二种情况: 伸展面附近的微元能转动 ($n = 0.5$), 即低浓度微元. 从表中可以看出以下诸点: 表面摩擦因数是 Hartman 数 M 、Reynolds 数 Re 和微极参数 K 的增函数; 不稳定流 ($S \neq 0$) 的表面摩擦因数, 大于稳定流 ($S = 0$) 的表面摩擦因数; 高浓度微元 ($n = 0$) 情况下的表面摩擦因数, 高于低浓度微元 ($n = 0.5$) 情况下的表面摩擦因数; 磁流体动力学流 ($M \neq 0$) 的表面摩擦因数, 大于水动力学流 ($M = 0$) 的表面摩擦因数; 当 Reynolds 数 Re 增加时, 表面摩擦因数 $Re_r C_{fr}$ 也增加; 进一步可以说, 惯性力占优势 ($Re < 1$) 时的 $Re_r C_{fr}$ 值, 高于粘性力占优势 ($Re > 1$) 时的 $Re_r C_{fr}$ 值; 表面摩擦因数 $Re_r C_{fr}$ 是微极参数 K 增函数; 显然, 非 Newton 流体 ($K \neq 0$) 的表面摩擦因数 $Re_r C_{fr}$, 高于粘性流体 ($K = 0$) 时的表面摩擦因数.

表 3 面应力偶系数 $Re_r C_{gr}$ 的数值结果Table 3 Numerical values of couple stress coefficient $Re_r C_{gr}$

M	Re	K	$Re_r C_{gr}$			
			$S = 0$ (steady flow)		$S = 0.2$ (unsteady flow)	
			$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 0$	$n = 0.5$
0.0	2.0	0.2	0.387 278 980 109	3.262 953 247 28	0.383 145 930 553	3.688 737 851 10
1.0			0.387 543 251 367	3.407 709 588 77	0.383 603 165 498	3.833 134 884 47
2.0			0.387 797 110 015	3.541 403 629 83	0.384 023 949 443	3.966 658 135 13
3.0			0.388 039 304 423	3.666 081 339 07	0.384 412 418 868	4.091 282 931 10
2.0	0.5	0.2	0.099 220 968 475	2.151 034 362 28	0.098 934 723 438 2	2.264 765 356 84
	1.5		0.293 069 065 641	3.095 143 186 66	0.290 798 273 461	3.420 856 571 47
	2.5		0.481 151 680 563	3.972 378 971 88	0.475 653 829 432	4.493 614 049 36
	3.5		0.664 043 350 895	4.793 426 729 77	0.654 723 551 751	5.497 746 427 37
2.0	2.0	0.0	0.000 000 000 000	2.679 778 360 57	0.000 000 000 000	3.136 805 493 37
		0.2	0.197 854 021 227	3.119 117 059 25	0.195 587 393 503	3.558 478 312 59
		0.4	0.387 797 110 015	3.541 403 629 83	0.384 023 949 443	3.966 658 135 13
		0.6	0.571 285 510 760	3.950 187 243 78	0.566 534 046 078	4.363 971 237 75

表 3 给出了物理参数对面应力偶系数 $Re_r C_{gr}$ 的影响. 表 3 表明, 不管是稳定流 ($S = 0$) 还是不稳定流 ($S \neq 0$), 面应力偶系数随着 M 、 Re 和 K 的增加而增加. 当 $n = 0$ 时, 稳定流 ($S = 0$) 的面应力偶系数 $Re_r C_{gr}$, 大于不稳定流 ($S \neq 0$) 的面应力偶系数; 而当 $n = 0.5$ 时, 不稳定流 ($S \neq 0$) 的面应力偶系数, 大于稳定流 ($S = 0$) 的面应力偶系数. 从表 3 中还可以看到 $n = 0$ 时, 对于牛顿流体 ($K = 0$), 稳定流 ($S = 0$) 和 不稳定流 ($S \neq 0$) 都有面应力偶系数 $Re_r C_{gr} = 0$. 这是由于 $K = 0$ 时, 方程 (7) 和方程 (8) 简化为经典的 Navier-Stokes 方程, 而经典方程是不会呈现出象面应力偶特性的.

5 总 结

本文研究了位于两个径向伸展平面之间的不可压缩微极流体的流动. 通过同伦分析法导出了收敛的级数解, 从分析过程中得出如下结果:

- 1) 微极参数 K 对 $f(\eta)$ 和 $f'(\eta)$ 的影响, 与 M 和 Re 对 $f(\eta)$ 和 $f'(\eta)$ 的影响正相反;
- 2) 就定性而言, 不稳定参数 S 对 $f(\eta)$ 和 $f'(\eta)$ 和 $g(\eta)$ 的影响是类似的;

3) M 和 K 对无量纲角速度 $g(\eta)$ 的影响,高浓度($n = 0$)与低浓度($n = 0.5$)时的影响正相反.但是不管 $n = 0$ 还是 $n = 0.5$, Re 和 S 对 $g(\eta)$ 的影响相类似;

4) Hartman 数 M 增加时,边界层是减少的;

5) 不管 $n = 0$ 还是 $n = 0.5$, 表面摩擦因数 $Re_r C_{fr}$ 和面应力偶系数 $Re_r C_{gr}$ 是 Re, M, S 和 K 的增函数;

6) $n = 0.5$ 时的表面摩擦因数 $Re_r C_{fr}$, 低于 $n = 0$ 时的表面摩擦因数;

7) 磁流体动力学流的表面摩擦因数 $Re_r C_{fr}$, 大于水动力学流的表面摩擦因数;

8) 稳定流($S = 0$)的表面摩擦因数 $Re_r C_{fr}$, 小于不稳定流($S \neq 0$)的表面摩擦因数;

9) 当 $n = 0$ 时, 不稳定流($S \neq 0$)的面应力偶系数 $Re_r C_{gr}$, 小于稳定流($S = 0$)的面应力偶系数. 当 $n = 0.5$ 时, 不稳定流($S \neq 0$)的面应力偶系数 $Re_r C_{gr}$, 大于稳定流($S = 0$)的面应力偶系数.

致谢 第一作者(作为访问教授)感谢沙特阿拉伯国王大学在 KSU-VPP-103 下的资金赞助. 作者还感谢评审专家的宝贵建议.

参考文献:

- [1] Eringen A C. Theory of micropolar fluids[J]. *J Math*, 1966, **16**(1): 1-18.
- [2] Gorla R S R, Mansour M A, Mohammedien A A. Combined convection in an axisymmetric stagnation flow of micropolar fluid[J]. *Int J Num Meth Heat Fluid Flow*, 1996, **6**(4): 47-55.
- [3] Gorla R S R, Takhar H S. Boundary layer flow of micropolar fluid on rotating axisymmetric surfaces with a concentrated heat source[J]. *Acta Mechanica*, 1994, **105**(1/4): 1-10.
- [4] Guram G S, Smith A C. Stagnation flows of micropolar fluids with strong and weak interactions[J]. *Compu Math Appl*, 1980, **6**(2): 213-233.
- [5] Kumari M, Nath G. Unsteady incompressible boundary layer flow of a micropolar fluid at a stagnation point[J]. *Int J Eng Sci*, 1984, **22**(16): 755-768.
- [6] Abdullah I, Amin N. A micropolar fluid model of blood flow through a tapered artery with a stenosis[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2010, **33**(16): 1910-1923. doi: 10.1002/mma.1303.
- [7] Seddeek M A. Flow of a magneto-micropolar fluid past a continuously moving plate[J]. *Phy Lett A*, 2003, **306**(4): 255-257.
- [8] Nazar R, Amin N, Filip D, Pop I. Stagnation point flow of a micropolar fluid towards a stretching sheet[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 2004, **39**(7): 1227-1235.
- [9] Takhar H S, Bhargava R, Agrawal R S, Balaji A V S. Finite element solution of a micropolar fluid flow and heat transfer between two porous discs[J]. *Int J Eng Sci*, 2000, **38**(17): 1907-1922.
- [10] Abo-Eldahab E M, Ghonaim A F. Radiation effects on heat transfer of a micropolar fluid through a porous medium[J]. *Appl Math Comp*, 2005, **169**(1): 500-510.
- [11] Nazar R, Amin N, Pop I. Free convection boundary layer flow on an isothermal sphere in a micropolar fluid[J]. *Int Comm Heat Mass Trans*, 2002, **29**: 377-386.
- [12] Sahoo B. Effects of partial slip on axisymmetric flow of an electrically conducting viscoelastic fluid past a stretching sheet[J]. *Cent Eur J Phys*, 2010, **8**(3): 498-508.

- [13] 萨胡 B. 二阶流体通过径向伸展平面时滑移、黏性耗散、焦耳热对 MHD 流动的影响[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(2): 150-162. (Sahoo B. Effects of slip, viscous dissipation and Joule heating on the MHD flow and heat transfer of a second grade fluid past a radially stretching sheet[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2010, **31**(2):159-173.)
- [14] Hayat T, Nawaz M. Effect of heat transfer on magnetohydrodynamic axisymmetric flow between two stretching sheets[J]. *Z Naturforsch*, 2010, **65**(11):1-8.
- [15] Liao S J. *Beyond Perturbation: Introduction to Homotopy Analysis Method*[M]. Boca Raton: Chapman and Hall CRC Press, 2003.
- [16] Liao S J. Notes on the homotopy analysis method: some definitions and theorems[J]. *Comm Nonlinear Sci Num Simu*, 2009, **14**(4): 983-997.
- [17] Liao S J. A new branch of solutions of unsteady boundary layer flows over an impermeable stretched plate[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2005, **48**(12): 2529-2539.
- [18] Cheng J, Liao S J. Series solutions of nano-boundary layer flows by means of the homotopy analysis method[J]. *J Math Anal Appl*, 2008, **343**(1): 233-245.
- [19] Abbasbandy S. Homotopy analysis method for the Kawahara equation[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, **11**(1): 307-310.
- [20] Abbasbandy S, Hayat T. Solution of the MHD Falkner-Skan flow by homotopy analysis method[J]. *Comm Nonlinear Sci Num Simu*, 2009, **14**(9/10): 3591-3598.
- [21] Abbasbandy S, Shirzadi A. A new application of the homotopy analysis method: Solving the Sturm—Liouville problems[J]. *Comm Nonlinear Sci Num Simu*, 2011, **16**(1): 112-126.
- [22] Hashim I, Abdulaziz O, Momani S. Homotopy analysis method for fractional IVPs[J]. *Comm Nonlinear Sci Numer Simu*, 2009, **14**(3): 674-684.
- [23] Bataineh A S, Noorani M S M, Hashim I. On a new reliable modification of homotopy analysis method[J]. *Comm Nonlinear Sci Numer Simu*, 2009, **14**(2): 409-423.
- [24] Bataineh A S, Noorani M S M, Hashim I. Modified homotopy analysis method for solving systems of second-order BVPs[J]. *Comm Nonlinear Sci Num Simu*, 2009, **14**(2): 430-442.
- [25] Allan F M. Derivation of the Adomian decomposition method using the homotopy analysis method[J]. *Appl Math Comp*, 2007, **190**(1): 6-14.
- [26] Hayat T, Nawaz M. Soret and Dufour effects on the mixed convection flow of a second grade fluid subject to Hall and ion-slip currents[J]. *Int J Num Methods Fluids*. doi: 10.1002/fld.2405.
- [27] Hayat T, Qasim M, Abbas Z. Radiation and mass transfer effects on the magnetohydrodynamic unsteady flow induced by a stretching sheet[J]. *Z Naturforsch A*, 2010, **65**(3): 231-239.
- [28] Hayat T, Mustafa M, Pop I. Heat and mass transfer for Soret and Dufour's effect on mixed convection boundary layer flow over a stretching vertical surface in a porous medium filled with a viscoelastic fluid[J]. *Comm Nonlinear Sci Num Simu*, 2010, **15**(5):1183-1196.
- [29] Hayat T, Nawaz M. Magnetohydrodynamic three-dimensional flow of a second-grade fluid with heat transfer[J]. *Z Naturforsch A*, 2010, **65**(8): 683-691.
- [30] Hayat T, Nawaz M. Hall and ion-slip effects on three-dimensional flow of a second grade fluid [J]. *Int J Num Methods Fluids*. doi: 10.1002/fld.2251.
- [31] Hayat T, Awais M. Three-dimensional flow of an upper-convected Maxwell (UCM) fluid[J].

Int J Num Methods Fluids. doi: 10.1002/flid.2289.

- [32] Hayat T, Mustafa M, Mesloub S. Mixed convection boundary layer flow over a stretching surface filled with a Maxwell fluid in the presence of Soret and Dufour's effects[J]. *Z Naturforsch A*, 2010, **65**(5):401-410.

Axisymmetric Magnetohydrodynamic flow of a Micropolar Fluid Between Unsteady Stretching Surfaces

T. Hayat^{1, 2}, M. Nawaz¹, S. Obaidat²

(1. *Department of Mathematics, Quaid-I-Azam University 45320, Islamabad 44000, Pakistan;*

2. *Department of Mathematics, King Saud University, P. O. Box 2455, Riyadh 11451, Saudi Arabia*

Abstract: This investigation examines the time dependent MHD flow problem of a micropolar fluid between two radially stretching sheets. Both the cases ($n = 0, 0.5$) of strong and weak concentrations of microelements are taken into account. Suitable transformations were employed for the conversion of partial differential equations into the ordinary differential equations. The solutions of the resulting problems were developed by a homotopy analysis method (HAM). Angular velocity, skin friction coefficient and wall couple stress coefficient were illustrated for various parameters of interest.

Key words: micropolar fluid; radial stretching; homotopy analysis solution; skin friction coefficient; wall couple stress coefficient