

扩展型动网格的 Chebyshev 有限谱方法*

詹杰民¹, 李毓湘², 董志¹

(1. 中山大学 应用力学与工程系, 广州 510275;

2. 香港理工大学 土木及结构工程系, 香港)

(王彪推荐)

摘要: 给出了基于非均匀网格的 Chebyshev 有限谱方法, 提出了可生成两种类型扩展型动网格的均布格式. 一种类型的网格被用来提高波面附近的分辨率, 另一种类型则用在梯度较大的流动区域. 由于采用 Chebyshev 多项式作为基函数, 该方法具有高阶精度. 从上个时间步到当前时间步, 两套不均匀网格间的物理量采用 Chebyshev 多项式插值. 为使方法在时间离散方面保持高精度, 采用了 Adams-Bashforth 预报格式和 Adams-Moulton 校正格式. 为了避免由 Korteweg-de Vries (KdV) 方程的弥散项引起的数值振荡, 给出了一种非均匀网格下的数值稳定器. 给出的方法与具有分析解的 Burgers 方程的非线性对流扩散问题和 KdV 方程的单孤独波和双孤独波传播问题进行了比较, 结果非常吻合.

关键词: Chebyshev 多项式; 有限谱方法; 非线性波; 非均匀网格; 移动网格

中图分类号: O351.2; O24 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.03.012

引言

采用局部加密的移动网格方法是适于求解偏微分方程的有效方法. 在波锋面和大流动梯度存在时, 即使数值格式是高阶的, 移动网格方法在减少弥散的误差方面, 还是相当出色的.

Adjerid 和 Flaherty^[1] 求解了一维非定常偏微分方程的矢量系统, 讨论了一种移动有限元方法. 移动网格可以使离散误差的空间分量均匀分布. 为了提出同时实现网格移动和加密的算法, 还在自适应网格的加密过程中采用了误差估计方法. Anderson^[2] 通过将传统的 Poisson 网格生成器改写为非线性均布格式, 给出了多个利用均布法的网格生成算例. Huang 等^[3] 针对移动网格的偏微分方程组 (PDEs, partial differential equations) 发展了多个版本的简单且易于编程的移动网格方法, 数值结果显示这些方法可以准确地跟踪空间和时间上的快速变化. Huang 和 Russell^[4] 提出了一种新的求解非定常 PDEs 的移动网格方法, 对物理 PDEs 采用单元平均的 3 次 Hermite 配点型离散, 对控制移动网格的 PDE 采用 3 点有限差分离散, 给出了包括 Burgers

* 收稿日期: 2010-05-03; 修订日期: 2011-01-10

基金项目: 香港研究资助局基金资助项目 (522007); 国家海洋公益性行业科研专项基金资助项目 (201005002)

作者简介: 詹杰民 (1963—), 男, 广东人, 教授, 博士, 博士生导师 (联系人. Tel/Fax: +86-20-84111130; E-mail: stszjm@mail.sysu.edu.cn).

方程和 Sod 激波管问题在内的几个基准问题的数值结果。

在偏微分方程组的 blow-up 区域捕捉定性规律是一项挑战性的工作, Budd 等^[5]研究了这一问题的数值解, 其中非均匀网格的应用起到了关键的作用. Huang 和 Russell^[6]基于均布原理推导了两组空间光滑的移动网格偏微分方程组 (MMPDEs, moving mesh partial differential equations), 这种光滑技术借鉴了 Dorfi 和 Drury^[7]的移动网格方法. Beckett 等^[8]发现计算的准确性强烈依赖于监视函数的选择, 并提出了一种可产生最优收敛速度的监视函数. Cao 等^[9]提出一种新的适应网格移动策略, 它基于网格移动速度而不是像许多其他工作那样基于网格坐标. Tang^[10]给出了利用空间分裂型监视函数的适应网格方法, 用以求解 Euler 方程组. Soheili 和 Stockie 等^[11]提出了求解非定常偏微分方程组的自适应移动网格方法, 空间网格点的运动由一个 MMPDE 控制, 其中网格松弛时间 τ 被用作正则化参数. Tan 等^[12]利用流函数度量方程, 给出了求解不可压缩黏性流动的自适应移动网格技术, 网格移动策略基于 Li 等^[13]的工作, 即在每个时间步区分网格移动和偏微分方程的求解。

与经典的差分法和有限元法相比较, 谱方法具有计算精度高、滤短波较彻底的突出优点. 然而, 传统的谱方法运算量和存储量均较大, 较小的电子计算机不易实现。

由于谱方法对小尺度问题有较好的分辨率, 谱元法在过去 20 年里得到了快速发展. Patera^[14]和他的同事们 (Ghaddar 等^[15]) 系统地阐述了如何应用谱元法. Giraldo^[16]针对浅水方程提出了强和弱 Lagrange-Galerkin 谱元法. 最近, 王和他的同事发展了一种谱差分法 (Liu 等^[17]; Liang 等^[18]). 这种谱差分法类似于 Kopriva^[19-20]提出的多区域谱方法, 可以看成是多区域谱方法到单一非结构网格的一种推广。

另一种能有效提高计算效率的谱展开方法是 Wang^[21-22]提出的有限谱方法. 此谱方法是按节点而不是按区域进行离散, 处理过程中使用了有限个节点和有限个基函数. 与传统的谱元法相比较, 有限谱方法的离散过程更接近有限差分法或多项式展开法. 即在所研究节点的某个领域内, 未知函数表示为 $N + 1$ 项“基函数”的和, 其各阶导数值由该领域各节点的函数值确定。

詹和李^[23]提出了一种高精度有限谱方法. 为使方法在时间离散方面保持高精度, 采用了 4 阶 Adams-Bashforth-Moulton 预报-校正格式. 以 Legendre 多项式、Chebyshev 多项式和 Hermite 多项式为基函数作为例子, 给出的方法应用具有分析解的 Burgers 方程的非线性对流扩散问题和 KdV 方程的单孤独波和双孤独波传播问题进行了验证, 结果非常吻合. Li 等^[24]给出了针对一维 Boussinesq 型方程组的 Chebyshev 有限谱方法. 利用具有分析解的孤独波在平底上传播的问题验证了方法的有效性和准确性, 还利用具有实验数据的非线性波在潜堤上传播的问题, 检验了方法模拟周期波和随机波的能力. 这些方法已被扩展应用到二维问题中 (参见詹等的文献[25]).

1 广义有限谱格式

假设未知量 $u(x)$ 可以用 $2N + 1$ 个正交基函数 $\phi_n(x)$ 表示:

$$u(\xi_j^i) = \sum_{n=0}^{2N} C_n^i \phi_n(\xi_j^i), \quad (1)$$

其中, ξ_j^i 为局部坐标, 定义如下:

$$\xi_j^i = l \frac{x_{i+j} - x_i}{N\Delta x_i} \begin{cases} j = -N, -(N-1), \dots, 1, \dots, N-1, N, & N < i < M-N; \\ j = 1-i, 2-i, \dots, 2N+1-i, & i \leq N; \\ j = M-2N-i, M-2N-i+1, \dots, M-i, & i \geq M-N. \end{cases} \quad (2)$$

方程(2)中,参数 l 小于 1, M 是总网格点数目, Δx_i 为局部平均空间网格步长, 定义为

$$\Delta x_i = \begin{cases} \frac{x_{i+N} - x_{i-N}}{2N}, & N < i < M-N; \\ \frac{x_{2N+1} - x_1}{2N}, & i \leq N; \\ \frac{x_M - x_{M-2N}}{2N}, & i \geq M-N. \end{cases} \quad (3)$$

为了得到系数 C_n^i , 当 $N < i < M-N$ 时, 方程(1)可改写成

$$\begin{bmatrix} \phi_0(\xi_{-N}^i) & \phi_1(\xi_{-N}^i) & \cdots & \phi_{2N-1}(\xi_{-N}^i) & \phi_{2N}(\xi_{-N}^i) \\ \phi_0(\xi_{-N+1}^i) & \phi_1(\xi_{-N+1}^i) & \cdots & \phi_{2N-1}(\xi_{-N+1}^i) & \phi_{2N}(\xi_{-N+1}^i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_0(\xi_{N-1}^i) & \phi_1(\xi_{N-1}^i) & \cdots & \phi_{2N-1}(\xi_{N-1}^i) & \phi_{2N}(\xi_{N-1}^i) \\ \phi_0(\xi_N^i) & \phi_1(\xi_N^i) & \cdots & \phi_{2N-1}(\xi_N^i) & \phi_{2N}(\xi_N^i) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_0^i \\ C_1^i \\ \vdots \\ C_{2N-1}^i \\ C_{2N}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_{i-N}) \\ u(x_{i-N+1}) \\ \vdots \\ u(x_{i+N-1}) \\ u(x_{i+N}) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

当 $i \leq N$ 和 $i \geq M-N$ 时, 可以得到类似的方程. 可以通过求解上述方程组得到系数 $C_n^i \cdot u(x)$ 的 1 阶导数是

$$u_x^i(x_{i+j}) = \sum_{n=0}^{2N} C_n^i \frac{d}{dx} \phi_n(\xi_j^i), \quad (5)$$

$$u_{xx}^i(x_{i+j}) = \sum_{n=0}^{2N} C_n^i \frac{d^2}{dx^2} \phi_n(\xi_j^i), \quad (6)$$

$$u_{xxx}^i(x_{i+j}) = \sum_{n=0}^{2N} C_n^i \frac{d^3}{dx^3} \phi_n(\xi_j^i). \quad (7)$$

本文采用的正交基函数是 Chebyshev 多项式 $T_n(x)$. Chebyshev 插值的逐点误差已由 Price^[26] 估计.

由于

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \text{ 且 } \theta_j^i = \arccos(\xi_j^i), \quad (8)$$

$$\frac{d}{dx} T_n(\xi_j^i) = \frac{nl}{N\Delta x_i} \frac{1}{\sqrt{1 - (\xi_j^i)^2}} \sin(n\theta), \quad (9)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} T_n(\xi_j^i) = \left(\frac{l}{N\Delta x_i}\right)^2 \frac{1}{1 - (\xi_j^i)^2} [\xi_j^i T_n'(\xi_j^i) - n^2 T_n(\xi_j^i)], \quad (10)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} T_n(\xi_j^i) = \left(\frac{l}{N\Delta x_i}\right)^3 \frac{1}{1 - (\xi_j^i)^2} [3\xi_j^i T_n''(\xi_j^i) - (n^2 - 1)T_n(\xi_j^i)]. \quad (11)$$

2 KdV-Burgers 方程的数值格式

KdV-Burgers 方程(KdVB)的一般形式为

$$u_t + \varepsilon uu_x - \nu u_{xx} + \mu u_{xxx} = 0, \quad (12)$$

其中, ε, ν 和 μ 为参数. 方程(12)由 Su 和 Gardner^[27] 导出.

2.1 空间离散

通过求解方程组(4), 可求得方程组(1)的系数. 因为方程组(1)不仅可以用于计算区域的内部, 而且可以用于边界, 因此 l 的值在边界处不大于 0.5. 在计算中, 我们发现数值稳定性和精度基本不依赖于 l 的取值. 我们取 $l = 0.48$.

得到系数 C_n^j 后, 方程(12)中的 1 阶、2 阶(扩散项)和 3 阶导数项可分别由方程(5)、(6)、(7)求得.

2.2 时间离散

用于本文的时间离散方法是 Li 和 Zhan^[28] 用于 Beji 和 Nadaoka^[29] 提出的改进型 Boussinesq 方程的时间离散方法. 这里, 仅仅简要描述如何将方法推广到 KdVB 方程. 在 $n + 1$ 时刻, u 的值可用 3 阶精度的 Adams-Bashforth 显格式(Press 等^[30] 及 Wei 和 Kirby^[31]) 从它们在 $n, n - 1$ 和 $n - 2$ 时刻的值求得:

$$\bar{u}_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{12} \left[23 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n - 16 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n-1} + 5 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n-2} \right], \quad (13)$$

\bar{u}^{n+1} 的预报值可以通过一个迭代过程来校正. $(u_i^{k+1})_i$ 的值通过如下的 KdVB 方程的第 k 次迭代获得

$$(u_i^{k+1})_i = -\varepsilon (u^k u_x^k)_i + \nu (u_{xx}^k)_i - \mu (u_{xxx}^k)_i, \quad (14)$$

而 u_i^{k+1} 可以由 4 阶 Adams-Moulton 校正格式得到

$$(u_i^{n+1})^{k+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{24} \left\{ 9 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n+1} \right]^k + 19 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n - 5 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n-1} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n-2} \right\}, \quad (15)$$

其中, 当 $k = 0$ 时,

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n+1} \right]^0 = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)_i^{n+1}.$$

当 u 的两次迭代值之差的绝对值小于 10^{-8} , 一个时间步的迭代过程完成.

注意方程(13)和(15)是在移动网格上求解. 如果网格刚开始移动, 迭代前方程(13)和(15)中的 $u_i^n, \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n+1} \right]^0, \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n, \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n-1}$ 和 $\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n-2}$ 各项应利用方程(1)从上个时间步的网格插值到当前网格.

2.3 数值稳定器

由 Taylor 展开, 可有

$$\begin{aligned} u_{i \pm 1} &= u_i + \Delta x_{\pm} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i + \frac{\Delta x_{\pm}^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{\Delta x_{\pm}^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i + \\ &\frac{\Delta x_{\pm}^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_i + \frac{\Delta x_{\pm}^5}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \Big|_i + O(\Delta x^6), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i \pm 1} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i + \Delta x_{\pm} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{\Delta x_{\pm}^2}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i + \\ &\frac{\Delta x_{\pm}^3}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_i + \frac{\Delta x_{\pm}^4}{24} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \Big|_i + O(\Delta x^5), \end{aligned} \quad (17)$$

式中

$$\Delta x_+ = x_{i+1} - x_i, \Delta x_- = x_{i-1} - x_i.$$

可将方程(16)和(17)改写为

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\Delta x_+^3}{6} & \frac{\Delta x_+^4}{24} & \frac{\Delta x_+^5}{120} \\ 1 & \frac{\Delta x_-^3}{6} & \frac{\Delta x_-^4}{24} & \frac{\Delta x_-^5}{120} \\ 0 & \frac{\Delta x_+^3}{2} & \frac{\Delta x_+^4}{6} & \frac{\Delta x_+^5}{24} \\ 0 & \frac{\Delta x_-^3}{2} & \frac{\Delta x_-^4}{6} & \frac{\Delta x_-^5}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\ \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} u_{i+1} - \Delta x_+ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i - \frac{\Delta x_+^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i \\ u_{i-1} - \Delta x_- \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i - \frac{\Delta x_-^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i \\ \Delta x_+ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+1} - \Delta x_+ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i - \Delta x_+^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i \\ \Delta x_- \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i-1} - \Delta x_- \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i - \Delta x_-^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i \end{bmatrix} + O(\Delta x^6). \tag{18}$$

网格点 i 上变量 u 的值可由方程(18) 得到, 记为 u^* . 由于方程(15)和(18)都是高阶精度的格式, 我们建议每个迭代步采用如下公式:

$$u(x) = \alpha_1 u^{k+1}(x) + \alpha_2 u^*(x), \tag{19}$$

式中, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1, u^{k+1}(x)$ 由方程(15)求得. 当网格是均匀网格时, 方程(19)与詹和李^[23]文中的方程(30)相同. 我们曾经分别取 $\alpha_1 = 0.7, \alpha_1 = 0.5, \alpha_1 = 0.3$, 利用稳定器可以获得 KdV 方程的精确结果(见下节). 本文取 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, 使得无论在非均匀网格还是均匀网格上格式都更为稳定. 在接下来的测试算例中, 基函数包含 7 项, 即方程(1)中 $N = 3$.

2.4 移动网格方法

本文采用了均布法思想来生成网格, 网格点的空间位置由下述方程确定:

$$x_{\xi\xi} + x_\xi \frac{\omega_\xi}{\omega} = 0, \tag{20}$$

式中, ω 是权重函数. 利用该方程, 权重函数可以均匀分布到网格上, 从而生成物理平面上新的节点位置. 在转换平面上, 假设间距 $\Delta\xi$ 为 1. 方程(20)可写成

$$\frac{x_{i-1}^k - 2x_i^{k+1} + x_{i+1}^k}{\Delta\xi^2} + \frac{x_{i-1}^k - x_{i+1}^k}{2\Delta\xi} \frac{\omega_\xi}{\omega} = 0, \tag{21}$$

该方程可利用超松弛法求解. 在本文, 我们取

$$\omega = 1 + A \left| \frac{h}{h_{\max}} \right|, \tag{22}$$

式中, h 代表梯度或者其他可以衡量哪些位置需要较高分辨率的类似的量, A 用以调整网格的适应性, 左端第 1 项则用以防止 h 值趋向 0 时网格过度延伸.

2.4.1 波面附近加密的移动网格方法

第一类移动网格方法用以在波面处生成较高分辨率的网格. 在这种情况下, 例如孤独波, 变量 h 可写为

$$h_i = \frac{1}{2L \cdot \Delta x_i} \int_{x_{i-L}}^{x_{i+L}} |u| dx \approx \frac{1}{2L \cdot \Delta x_i} \sum_j |u_{i+j}| \Delta x_{i+j}, \tag{23}$$

式中的积分用以控制网格的协调性, L 的值本文取为 10.

2.4.2 适应梯度的移动网格方法

第二类移动网格方法用以更好地描述梯度较大的问题. 在这种情况下, 例如激波, 变量 h 可写为

$$h = \frac{1}{2L \cdot \Delta x} \int_{x_{i-L}}^{x_{i+L}} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right| dx \approx \frac{1}{2L \cdot \Delta x_i} \sum_j \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{i+j} \Delta x_{i+j}. \quad (24)$$

3 数值结果

3.1 Burgers 方程

当 $\varepsilon = 1$ 和 $\mu = 0$, KdVB 方程(12)可以写成如下的 Burgers 方程:

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0. \quad (25)$$

由于弥散项在上述方程中不出现, 数值稳定器在此情形下不需使用. 为了验证数值结果的准确性, 本文采用下列初始条件(参见 Kaya 的文献[32]):

$$u(x, 0) = \frac{[\alpha + \beta + (\beta - \alpha) \exp(\gamma)]}{1 + \exp(\gamma)}, \quad (26)$$

其中, $\gamma = (\alpha/\nu)(x - \lambda)$, 而参数 α, β, λ 和 ν 为任意常数. 在上述初始条件下, 有精确解:

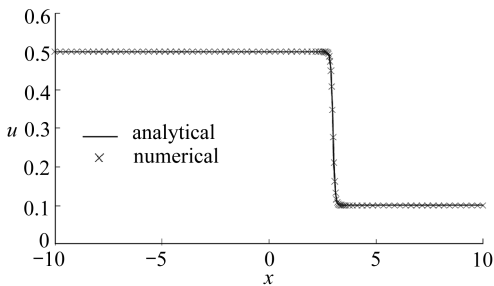
$$u(x, \zeta) = \frac{[\alpha + \beta + (\beta - \alpha) \exp(\zeta)]}{1 + \exp(\zeta)}. \quad (27)$$

式中 $\zeta = (\alpha/\nu)(x - \beta t - \lambda)$.

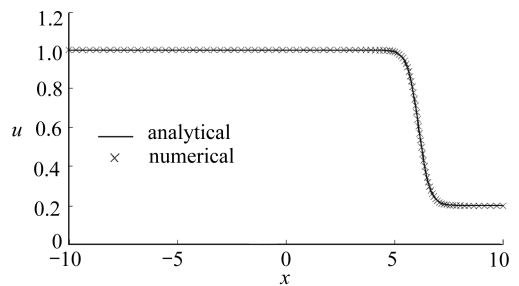
表 1 Chebyshev 有限谱方法的准确性(均方根误差)

Table 1 Accuracy of the Chebyshev finite spectral method (root mean square error)

cases	method	
	moving mesh, $M = 101$	uniform mesh, $M = 401$
Burgers Eg ($\nu = 0.01$)	4.85×10^{-5}	5.0×10^{-5}
Burgers Eg ($\nu = 0.1$)	2.53×10^{-6}	4.4×10^{-5}
KdV Eq (1-soliton)	1.13×10^{-4}	1.23×10^{-4}
KdV Eq (2-soliton)	2.11×10^{-3}	8.1×10^{-4}



(a) $\alpha = 0.2, \beta = 0.3, \lambda = 0, \nu = 0.01$



(b) $\alpha = 0.4, \beta = 0.6, \lambda = 0.125, \nu = 0.1$

图 1 Burgers 方程的数值解与分析解 ($t = 10$)

Fig.1 The numerical and analytical results for the Burgers equation at $t = 10$

本文考虑两组参数: 一种是曲线斜率急变的情形, 参数为 $\alpha = 0.2, \beta = 0.3, \lambda = 0$ 和 $\nu = 0.01$; 一种是曲线斜率缓变的情形, 参数为 $\alpha = 0.4, \beta = 0.6, \lambda = 0.125$ 和 $\nu = 0.1$. 网格数为 $M = 101$, 而时间步长 $\Delta t = 0.001$, 求解区域为 $[-10, 10]$. 数值结果的准确性由表 1 所示. 可以看

出,基于均匀网格和移动网格的数值结果均与分析解吻合非常好,后者的精度更高.图 1 给出了 $t = 10$ 时的数值结果和分析解,可以看出两者完全一致,再次说明了方法求解 Burgers 方程的准确性.

3.2 Korteweg-de Vries 方程

当 $\nu = 0, \varepsilon = -6$ 和 $\mu = 1$, KdVB 方程(12)可写为如下 KdV 方程:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{28}$$

如果初始条件为 $u(x,0) = -2\text{sech}^2(x)$, 则有如下的精确解 (Kaya^[32]):

$$u(x,t) = -2\text{sech}^2(x - 4t), \tag{29}$$

节点数为 101, 求解区域为 $x \in [-5, 15]$, 时间步长为 $\Delta t = 0.00005$. 由于方程中有弥散项, 计算中使用了数值稳定器. 从图 2 可知, 计算结果与分析解相当吻合. 从表 1 可以看出, 数值稳定器对计算结果的精度影响不大, 结果依然保持高精度.

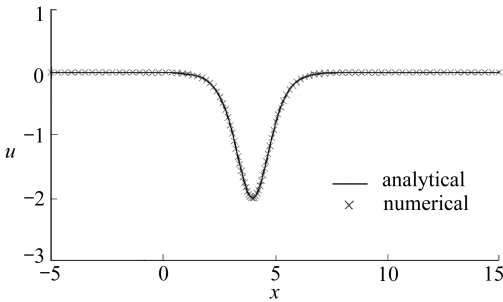
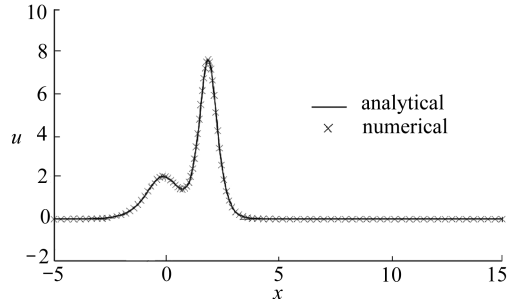
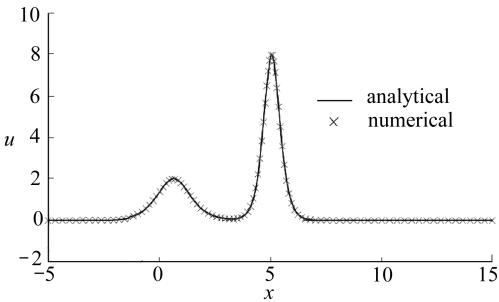


图 2 孤波的数值解与分析解 ($t = 1$)

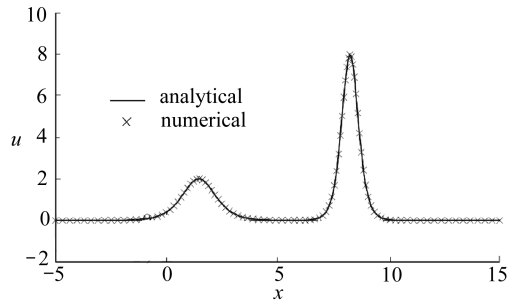
Fig.2 The numerical and analytical results for the solitary wave solution at $t = 1$



(a) $t = 0.1$



(b) $t = 0.3$



(c) $t = 0.5$

图 3 双孤波的数值解与分析解

Fig.3 The numerical and analytical results for the 2-solitary wave

本文考虑的另一种形式的 KdV 方程为

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{30}$$

该方程曾通过分析方法和数值方法来研究 (Dodd 等^[33]). 如果初始条件为 $u(x,0) = 6\text{sech}^2(x)$, 则有下列双孤独波解:

$$u(x,t) = -12 \frac{3 + 4\cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{[3\cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)]^2}. \tag{31}$$

网格节点数和求解区域不变, 时间步长 $\Delta t = 0.00005$. 同样, 再次使用数值稳定器. 从图 3 可

知,数值解与分析解相当吻合.相对于单孤独波的例子而言,计算精度有所降低,但与 Li^[34]用半隐蛙跳格式的计算结果相比,这里的误差是很小的.

4 结 论

本文给出的广义有限谱方法具有精度高、网格布置灵活等优点,能很好地适应强非线性微分方程的求解.方法容易推广到多维的数学物理问题.

参考文献:

- [1] Adjerid S, Flaherty J E. A moving finite element method with error estimation and refinement for one-dimensional time dependent partial differential equations[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1986, **23**(4): 778-796.
- [2] Anderson D A. Equidistribution schemes, Poisson generators, and adaptive grids[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1987, **24**(3): 211-227.
- [3] Huang W Z, Ren Y H, Russell R D. Moving mesh methods based on moving mesh partial-differential equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, **113**(2): 279-290.
- [4] Huang W Z, Russell R D. A moving collocation method for solving time dependent partial differential equations[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 1996, **20**(1/2): 101-116.
- [5] Budd C J, Huang W H, Russell R D. Moving mesh methods for problems with blow-up[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1996, **17**(2): 305-327.
- [6] Huang W Z, Russell R D. Analysis of moving mesh partial differential equations with spatial smoothing[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1997, **34**(3): 1106-1126.
- [7] Dorfi E A, Drury L O' C. Simple adaptive grids for 1-D initial value problems[J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, **69**(1): 175-195.
- [8] Beckett G, Mackenzie J A, Ramage A, Sloan D M. On the numerical solution of one-dimensional PDEs using adaptive methods based on equidistribution[J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, **167**(2): 372-392.
- [9] Cao W M, Huang W Z, Russell R D. A moving mesh method based on the geometric conservation law[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2002, **24**(1): 118-142.
- [10] Tang H Z. A moving mesh method for the Euler flow calculations using a directional monitor function[J]. *Communications in Computational Physics*, 2006, **1**(4): 656-676.
- [11] Soheili A R, Stockie J M. A moving mesh method with variable mesh relaxation time[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2008, **58**(3): 249-263.
- [12] Tan Z, Lim K M, Khoo B C. An adaptive moving mesh method for two-dimensional incompressible viscous flows[J]. *Communications in Computational Physics*, 2008, **3**(3): 679-703.
- [13] Li R, Tang T, Zhang P W. Moving mesh methods in multiple dimensions based on harmonic maps[J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, **170**(2): 562-588.
- [14] Patera A T. A spectral element method for fluid-dynamics - laminar-flow in a channel expansion[J]. *Journal of Computational Physics*, 1984, **54**(3): 468-488.
- [15] Ghaddar N K, Karniadakis G E, Patera A T. A conservative isoparametric spectral element

- method for forced convection: application to fully developed flow in periodic geometries[J]. *Num Heat Transfer*, 1986, **9**(3):277-300.
- [16] Giraldo F X. Strong and weak Lagrange-Galerkin spectral element methods for the shallow water equations[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2003, **45**(1/3): 97-121.
- [17] Liu Y, Vinokur M, Wang Z J. Spectral difference method for unstructured grids I: basic formulation[J]. *J Computational Physics*, 2006, **216**(2): 780-801.
- [18] Liang C, Kannan R, Wang Z J. A p-multigrid spectral difference method with explicit and implicit smoothers on unstructured triangular grids[J]. *Computers and Fluids*, 2009, **38**(2): 254-265.
- [19] Kopriva D A. A conservative staggered-grid Chebyshev multidomain method for compressible flows: II semi-structured method[J]. *J Comput Phys*, 1996, **128**(2):475-488.
- [20] Kopriva D A. A staggered-grid multi-domain spectral method for the Euler and Navier-Stokes equations on unstructured grids[J]. *J Comput Phys*, 1998, **143**(1):125-158.
- [21] Wang J P. Non-periodic fourier transform and finite spectral method[C]//*Sixth Inter Symposium in CFD*. Nevada, USA, 1995: 1339-1344.
- [22] Wang J P. Finite spectral method based on non-periodic Fourier transform[J]. *Computers & Fluids*, 1998, **27**(5/6): 639-644.
- [23] 詹杰民, 李毓湘. 一维 Burgers 方程和 KdV 方程的广义有限谱方法[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(12):1431-1439. (ZHAN Jie-min, LI Yok-sheung. Generalized finite spectral method for 1D Burgers and KdV equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2006, **27**(12): 1635-1643.)
- [24] Li Y S, Zhan J M. Chebyshev finite-spectral method for 1D Boussinesq-type equations[J]. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 2006, **132**(3): 212-223.
- [25] 詹杰民, 林东, 李毓湘. 线性与非线性波的 Chebyshev 广义有限谱模拟[J]. 物理学报, 2007, **56**(7): 3649-3654. (ZHAN Jie-min, LIN Dong, LI Yok-sheung. Chebyshev generalized finite spectral method for linear and nonlinear waves[J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, **56**(7): 3649-3654. (in Chinese))
- [26] Price T E. Pointwise error estimates for interpolation[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1987, **19**(3): 389-393.
- [27] Su C H, Gardner C S. Derivation of the Korteweg-de Vries and Burgers-equation[J]. *J Math Phys*, 1969, **10**(3):536-539.
- [28] Li Y S, Zhan J M. Boussinesq-type model with boundary-fitted coordinate system[J]. *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering, ASCE*, 2001, **127**(3):152-160.
- [29] Beji S, Nadaoka K. A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth[J]. *Ocean Engineering*, 1996, **23**(8): 691-704.
- [30] Press W H, Flannery B P, Teukolsky S A, Vetterling W T. *Numerical Recipes*[M]. New York: Cambridge University Press, 1989: 569-572.
- [31] Wei G, Kirby J T. Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations[J]. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, ASCE*, 1995, **121**(5): 251-260.

- [32] Kaya D. An application of the decomposition method for the KdVB equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **152**(1): 279-288.
- [33] Dodd R K, Eilbeck J C, Gibbon J D, Morris H C. *Solitons and Nonlinear Wave Equations* [M]. New York: Academic Press, 1984.
- [34] Li P W. On the numerical study of the KdV equation by the semi-implicit and leap-frog method [J]. *Computer Physics Communications*, 1995, **88**(2/3): 121-127.

Chebyshev Finite Spectral Method With Extended Moving Grids

ZHAN Jie-min¹, LI Yok-sheung², DONG Zhi¹

(1. *Department of Applied Mechanics and Engineering,
Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, P. R. China;*

2. *Department of Civil & Structural Engineering, The Hong Kong
Polytechnic University, Hong Kong, P. R. China)*

Abstract: A Chebyshev finite spectral method on non-uniform mesh was proposed. An equidistribution scheme for two types of extended moving grids was proposed for grid generation. One type of grid was designed to provide better resolution for wave surface. The other type was for highly variable gradients. The method was of high-order accuracy because of the use of Chebyshev polynomial as the basis function. The polynomial was used to interpolate values between the two non-uniform meshes from the previous time step to the current time step. To attain high accuracy in time discretization, the fourth-order Adams-Bashforth-Moulton predictor and corrector scheme was used. To avoid numerical oscillations caused by the dispersion term in the KdV equation, a numerical technique on non-uniform mesh was introduced to improve the numerical stability. The proposed numerical scheme was validated by applications to the Burgers equation (nonlinear convection-diffusion problem) and KdV equation (single solitary and 2-solitary wave problems), where analytical solutions were available for comparison. Numerical results agree very well with the corresponding analytical solutions in all cases.

Key words: Chebyshev polynomial; finite spectral method; nonlinear wave; non-uniform mesh; moving grids