

瞬态问题稳定性及弥散分析的 无网格 RKPM 配点法研究*

罗汉中¹, 刘学文², 黄醒春¹

(1. 上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院,上海 200240;
2. 西门子工业软件(上海)有限公司,上海 200042)

摘要: 介绍了基于强形式的 RKPM 配点法求解瞬态动力问题的算法,并提出了采用 RKPM 配点法,配合时间域中心差分求解二阶波动方程的稳定性评价方法,并通过数值算例验证了此方法的正确性.此评价方法可以方便有效地评估出实际计算时的临界时间步长.通过数值算例比较可知,实际算例的计算临界时间步长与本评价方法,所预测的临界时间步长结果非常接近.给出了如何合理地选择 RKPM 形函数支撑域的建议.最后与径向基函数配点法进行了对比研究.

关键词: RKPM 配点法; 稳定性分析; 弥散分析; 瞬态动力问题

中图分类号: O302 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.06.010

引 言

近年来数值算法受到了人们越来越多的关注,国内外研究者们提出了许多不同的算法,并将其应用到了各个领域.传统的有限单元法(FEM)在处理一些特大变形问题时需要重构网格,这占用了非常大的计算量.而无网格法因其不需要构建网格的特点,在处理此类问题时具有明显的优势.近年来研究者们提出了许多种无网格方法,比如光滑粒子流体动力学方法(smooth particle hydrodynamics,简称 SPH)法^[1],散射元法(diffuse element method,简称 DEM)^[2],无单元 Galerkin 法(element free Galerkin,简称 EFG)^[3],单位分解法(partition of unity method,简称 PUM)^[4],h-p 云团法(h-p-Clouds)^[5],重构核点法(reproducing kernel particle method,简称 RKPM)^[6-7],自然单元法(natural element method,简称 NEM)^[8],无网格局部 Petrov-Galerkin 法(meshless local Petrov-Galerkin method,简称 MLPG)^[9],径向基函数配点法(radial basis collocation method,简称 RBCM)^[10-11],多重等位函数法(multiple level set method,简称 MLSM)^[12].Belytschko^[13],张雄等^[14],Liu^[15]等人发表了一些关于各种无网格方法的详细综述.除此之外,研究者们还做了许多无网格法的应用以及更深入的开发.Zhang 等将径向基函数配点法应用于求解偏微分方程,并发现 Hermite 配点法能够显著地提高精度^[16].

* 收稿日期: 2010-07-21; 修订日期: 2011-04-13

基金项目: 交通部西部交通建设科技资助项目(2009318000046)

作者简介: 罗汉中(1983—),男,江西人,博士生(E-mail: lough_me@163.com);

黄醒春(1957—),男,广西人,教授(联系人.E-mail: huangxc@sjtu.edu.cn).

Huang 等研究了物理学上等离子场电磁波传播问题的 Schrödinger-Poisson 方程的稳定性,并证明了系统基态的存在性^[17]. Ye 用有限元方法得到了平面内弹性变形问题的三维应力解^[18]. 朱合华等研究了无网格自然单元法在弹塑性分析中的应用^[19]. 熊渊博等用无网格局部 Petrov-Galerkin 方法,分析了 Winkler 弹性地基板后表明其具有收敛快、稳定性好和精度高的特点^[20]. 李树忱等在数值流行方法和单位分解法的基础上提出了无网格数值流行方法,该方法克服了传统有限元在解决非连续性问题时碰到的一些问题,最后给出了算例,验证了该方法的正确性^[21].

以上所提到的各种无网格方法可以归为两类,一种是基于 Galerkin 弱形式的,另一种是基于强形式的. 由于不需要进行区域数值积分,基于强形式的配点法的复杂性和运算时间都可以得到大幅度的缩减. 此外,一些基于弱形式的无网格方法在施加位移边界条件的时候需要做特殊处理,而对于配点法来说会非常简单. 由于这些优点,研究者们对各种配点法做了大量的研究. 重构核配点法(reproducing kernel collocation method,简称 RKCM)是其中较为广泛应用的一种. Hu 等对重构核配点法进行了误差分析^[22],并研究了重构核配点法的收敛性和复杂性^[23]. 然而,目前还很少有人对重构核配点法用于求解动力问题时的稳定性进行研究.

本文主要研究了重构核配点法求解波动方程的稳定性和弥散性. 第 1 节对重构核配点法进行了简单的介绍,第 2 节提出了稳定性评价方法,随后在第 3 节给出了对弥散性的分析. 第 4 节对分析结果与数值算例计算结果进行了对比. 第 5 节给出了一些重要的结论.

1 重构核配点法(RKCM)

1.1 重构核形函数

核估计(kernel estimate,简称 KE)是无网格计算所用到的最早最简单的近似方法. 人们第一次将其应用于无网格计算是在光滑粒子流体动力学方法(SPH)的研究中^[24-27]. 人们发现,核估计离散格式很难在有限域内实现 0 阶和 1 阶的一致性. 1995 年, Liu 提出了一种叫重构核点法(RKPM)的方法,通过增加一项修正函数来提高 SPH 在求解有限域问题的精度^[28-29]. 引入这项修正函数后,通过在将幂函数添加到基函数中,新的重构核(reproducing kernel,简称 RK)近似函数可以实现指定阶一致性. 下面给出的是一个常见的 RK 形函数构造方法.

一维函数 $w(x)$ 可以通过一系列插值点 $S = \{x_1, x_2, \dots, x_{N_s}\}$ 按如下公式进行近似:

$$w^h(x) = \sum_{i=1}^{N_s} \psi_i(x) d_i, \quad (1)$$

其中, $\psi_i(x)$ 是以 x_i 为中心的形函数, d_i 是各点的待定系数.

RK 形函数可以用以下公式进行构造:

$$\psi_i(x) = \mathbf{H}^T(0) \mathbf{M}^{-1}(x) \mathbf{H}(x - x_i) \phi_a(x - x_i), \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{M}(x) = \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{H}(x - x_i) \mathbf{H}^T(x - x_i) \phi_a(x - x_i), \quad (3)$$

$$\mathbf{H}^T(x - x_i) = [1, x - x_i, (x - x_i)^2, \dots, (x - x_i)^m], \quad (4)$$

$$\mathbf{H}^T(0) = [1, 0, 0, \dots, 0], \quad (5)$$

其中, m 是基函数最高阶数, $\phi_a(x)$ 被称为核函数, a 是其支撑域, 取常见的 3 阶 B 样条函数

为例

$$\phi_a(z) = \begin{cases} 2/3 - 4z^2 + 4z^3, & 0 \leq z \leq 0.5, \\ \frac{4}{3} - 4z + 4z^2 - \frac{4}{3}z^3, & 0.5 \leq z \leq 1.0, \\ 0, & z \geq 1.0, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $z = |x - x_i|/a$. 关于更详细的推导过程请参见参考文献[30].

1.2 RKCM 求解瞬态动力问题

一个常见的弹性动力问题可以用式(7)表示如下:

$$\eta \ddot{\mathbf{u}}(x, t) + \mathbf{L}\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{f}(x, t), \quad x \in \Omega, t \in [0, T], \quad (7)$$

其边界条件为

$$\mathbf{B}^h \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{h}(x, t), \quad x \in \partial\Omega^h, t \in [0, T], \quad (8)$$

$$\mathbf{B}^g \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{g}(x, t), \quad x \in \partial\Omega^g, t \in [0, T], \quad (9)$$

及初始条件

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x), \quad x \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega^h \cup \partial\Omega^g, \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(x, 0) = \mathbf{v}^0(x), \quad x \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega^h \cup \partial\Omega^g, \quad (11)$$

其中, \mathbf{L} 是域 Ω 内空间微分算子, t 是时间域 $[0, T]$ 内的时间变量, \mathbf{B}^h 和 \mathbf{B}^g 分别是应力边界 $\partial\Omega^h$ 上的微分算子和位移边界 $\partial\Omega^g$ 上的微分算子. $\mathbf{u}(x, t)$ 是待求位移向量, $\eta = \rho$ 是密度, $\mathbf{f}(x, t)$ 是体力向量, $\mathbf{h}(x, t)$ 是施加在应力边界上的外力, $\mathbf{g}(x, t)$ 是施加在位移边界上的给定位移向量, \mathbf{u}^0 和 \mathbf{v}^0 分别是初始位移向量和初始速度向量. 对于二维的弹性动力问题, 这些微分算子具体为

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{B}^h = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} & \lambda n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mu n_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \lambda n_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} & (\lambda + 2\mu)n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mu n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^g = \mathbf{I}, \quad (13)$$

其中, λ 和 μ 是 Lamé 常数, n_1 和 n_2 是表面外法线单位向量分量, \mathbf{I} 是单位矩阵. 二维位移函数 $u_k(x, t)$ 可以用 RK 形函数插值近似表示成

$$u_k(x, t) \approx u_k^h(x, t) = \sum_{i=1}^{N_s} \psi_i(x) d_{ki}(t) \quad (14)$$

或

$$\mathbf{u}^h(x, t) = \begin{bmatrix} u_1^h(x, t) \\ u_2^h(x, t) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(x) \mathbf{d}(t), \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{G}(x) = [\mathbf{G}_1(x) \quad \mathbf{G}_2(x) \quad \cdots \quad \mathbf{G}_{N_s}(x)], \quad \mathbf{G}_i(x) = \psi_i(x) \mathbf{I}, \quad (16)$$

$$\mathbf{d}(t) = [\mathbf{d}_1(t) \quad \mathbf{d}_2(t) \quad \cdots \quad \mathbf{d}_{N_s}(t)]^T, \quad \mathbf{d}_i(t) = [d_{1i}(t) \quad d_{2i}(t)], \quad (17)$$

其中 \mathbf{d}_i 是各节点系数向量。

通过让微分方程(7)、边界条件方程(8)和(9)及初始条件方程(10)和(11)分别在域 Ω 、应力边界 $\partial\Omega^h$ 和位移边界 $\partial\Omega^g$ 的 N_p 、 N_q 和 N_r 个配点 $\{\xi_i\}_{i=1}^{N_c}$ ($N_c = N_p + N_q + N_r$) 上精确满足式(18) ~ (22), 可以求得位移近似方程(14)中的各节点系数。

运动方程

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \eta \mathbf{G}(\xi_1) \\ \vdots \\ \eta \mathbf{G}(\xi_{N_p}) \end{bmatrix}}_M \ddot{\mathbf{d}}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{L}\mathbf{G}(\xi_1) \\ \vdots \\ \mathbf{L}\mathbf{G}(\xi_{N_p}) \end{bmatrix}}_{A^1} \mathbf{d}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}(\xi_1, t) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\xi_{N_p}, t) \end{bmatrix}}_{b^1(t)}, \quad \xi_i \in \Omega, \quad i = 1, 2, \dots, N_p. \quad (18)$$

边界条件

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}^h \mathbf{G}(\xi_{N_p+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{B}^h \mathbf{G}(\xi_{N_p+N_q}) \end{bmatrix}}_{A^2} \mathbf{d}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{h}(\xi_{N_p+1}, t) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(\xi_{N_p+N_q}, t) \end{bmatrix}}_{b^2(t)}, \quad \xi_i \in \partial\Omega^h, \quad i = N_p + 1, N_p + 2, \dots, N_p + N_q, \quad (19)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}^g \mathbf{G}(\xi_{N_p+N_q+1}) \\ \vdots \\ \mathbf{B}^g \mathbf{G}(\xi_{N_c}) \end{bmatrix}}_{A^3} \mathbf{d}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{g}(\xi_{N_p+N_q+1}, t) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(\xi_{N_c}, t) \end{bmatrix}}_{b^3(t)}, \quad \xi_i \in \partial\Omega^g, \quad i = N_p + N_q + 1, N_p + N_q + 2, \dots, N_c. \quad (20)$$

初始条件

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}(\xi_1) \\ \vdots \\ \mathbf{G}(\xi_{N_c}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \mathbf{d}(0) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}^0(\xi_1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^0(\xi_{N_c}) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}^0}, \quad \xi_i \in \Omega \cup \partial\Omega^h \cup \partial\Omega^g, \quad i = 1, 2, \dots, N_c, \quad (21)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}(\xi_1) \\ \vdots \\ \mathbf{G}(\xi_{N_c}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{d}}(0) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}^0(\xi_1) \\ \vdots \\ \mathbf{v}^0(\xi_{N_c}) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}^0}, \quad \xi_i \in \Omega \cup \partial\Omega^h \cup \partial\Omega^g, \quad i = 1, 2, \dots, N_c. \quad (22)$$

结合式(18) ~ (20), 可得

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_S \ddot{\mathbf{d}}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{A}^3 \end{bmatrix}}_A \mathbf{d}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b}^1(t) \\ \mathbf{b}^2(t) \\ \mathbf{b}^3(t) \end{bmatrix}}_{b(t)}. \quad (23)$$

此问题的半离散方程可以表达成

$$\mathbf{S}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{d}(t) = \mathbf{b}(t), \quad (24)$$

$$\mathbf{H}\mathbf{d}(0) = \bar{\mathbf{u}}^0, \quad (25)$$

$$\mathbf{H}\dot{\mathbf{d}}(0) = \bar{\mathbf{v}}^0. \quad (26)$$

通过采用 Newmark 法对时间域进行离散可得如下方程:

$$\underbrace{(\mathbf{S} + \beta\Delta t^2\mathbf{A})}_{\mathbf{S}^*} \mathbf{a}_{n+1} = \underbrace{\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{d}}_{n+1}}_{\mathbf{b}_{n+1}^*}, \quad (27)$$

其中, n 是时间步数, Δt 是时间步长, $\mathbf{d}_n \approx \mathbf{d}(t_n)$, $\mathbf{v}_n \approx \dot{\mathbf{d}}(t_n)$, $\mathbf{a}_n \approx \ddot{\mathbf{d}}(t_n)$, 预测函数表达式如下:

$$\tilde{\mathbf{d}}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t\mathbf{v}_n + \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\Delta t^2\mathbf{a}_n, \quad (28)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + (1 - \gamma)\Delta t\mathbf{a}_n, \quad (29)$$

其中, β 和 γ 是 Newmark 参数. 位移和速度修正函数如下:

$$\mathbf{d}_{n+1} = \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} + \beta\Delta t^2\mathbf{a}_{n+1}, \quad (30)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \gamma\Delta t\mathbf{a}_{n+1}. \quad (31)$$

RKCM 的程序流程如下:

1) 定义所求问题的空间域和时间域大小; 2) 用 N_s 个 RK 节点对空间域进行离散; 3) 计算各点的 RK 形函数; 4) 根据运动方程和边界条件组装 \mathbf{S} 矩阵和 \mathbf{A} 矩阵; 5) 求解初始条件方程得 \mathbf{d} 和 \mathbf{v} 的初值; 6) 定义时间步长 Δt 然后在时间上逐步循环; 7) 根据式(28) ~ (29) 由前一时间步结果计算预测函数 $\tilde{\mathbf{d}}_{n+1}$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}_{n+1}$; 8) 根据方程(27) 求解 \mathbf{a} ; 9) 根据式(30) ~ (31) 计算修正函数 \mathbf{d}_{n+1} 和 \mathbf{v}_{n+1} ; 10) 如果当前时间点 $t_{n+1} < T$; 用 $t_{n+2} = t_{n+1} + \Delta t$ 更新当前时间点并跳至第 7) 步; 如果 $t_{n+1} \geq T$, 根据 \mathbf{d} 求得位移时程并输出结果.

2 结合时间域中心差分的 RKCM 法稳定性分析

考虑如下一维波动方程:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad (32)$$

其中, c 是弹性波波速, $c = \sqrt{E/\rho}$, $u_u(x, t)$ 和 $u_{xx}(x, t)$ 分别是位移函数 $u(x, t)$ 关于时间变量 t 和空间变量 x 的 2 阶导数. 采用 N_s 个 RK 节点对空间域进行离散, 位移函数可以按式(33)用 RK 形函数插值

$$u(x, t) = \mathbf{G}(x)\mathbf{d}(t), \quad (33)$$

其中 $\mathbf{G}(x) = [\psi_1(x) \ \psi_2(x) \ \cdots \ \psi_{N_s}(x)]$.

通过让式(33)在 N_c 个配点上精确满足可得

$$\mathbf{U}(t) \equiv \begin{bmatrix} u(\xi_1, t) \\ \vdots \\ u(\xi_{N_c}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\xi_1) \\ \vdots \\ \mathbf{G}(\xi_{N_c}) \end{bmatrix} \mathbf{d}(t) \equiv \mathbf{M}\mathbf{d}(t). \quad (34)$$

类似地, 通过对式(32)进行配点可得

$$U_u(t) = c^2 \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{xx}(\xi_1) \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{xx}(\xi_{N_c}) \end{bmatrix} \mathbf{d}(t) \equiv c^2 \mathbf{A} \mathbf{d}(t). \tag{35}$$

采用中心差分法 ($\beta = 0, \gamma = 0.5$) 对式(35)的时间域进行数值积分可得下式:

$$(U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}) = c^2 \Delta t^2 \mathbf{A} \mathbf{d}^n, \tag{36}$$

其中, $U^n \equiv U(t_n), \mathbf{d}^n \equiv \mathbf{d}(t_n)$. 结合式(34), 可将式(36)改写成

$$(U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}) = c^2 \Delta t^2 \bar{\mathbf{G}} U^n, \tag{37}$$

其中, $\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1}$, \mathbf{M} 矩阵的维度为 $N_s \times N_c$. 对于 $N_c > N_s$ 的情况, \mathbf{M}^{-1} 可以通过求伪逆矩阵而得.

为了评价离散方程(37)的稳定性, 此处引入 von Neumann 假设进行分析. 根据 von Neumann 假设, U^n 的第 m 个分量可以表示成

$$u_m^n = \lambda_0^n e^{imkh}, \tag{38}$$

其中, λ_0 是波的振幅, k 是波数. 将式(38)代入式(37), 并取其第 m 行为例进行分析可得

$$\lambda_0^2 - (2 + \Delta t^2 c^2 D) \lambda_0 + 1 = 0, \tag{39}$$

其中 $D \equiv D_m = \sum_{j=1}^{N_s} \bar{\mathbf{G}}_{mj} e^{i(j-m)kh}$. \tag{40}

为了得到一个稳定解以使 $|\lambda_0| \leq 1$, 得到了以下稳定条件:

- a) 假如 $D \geq 0$, 无条件不稳定;
- b) 假如 $D < 0$, 条件稳定, 时间步长必须满足以下稳定条件:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{-4}{D}}. \tag{41}$$

根据以上分析可以看出, 此处 RKCM 算法稳定与否取决于参数 D 的符号, 而根据式(40)可知参数 D 是与 RK 形函数及其二阶导数和空间域离散点的点距有关的.

稳定性分析的程序流程如下:

- 1) 定义所求问题的空间大小;
- 2) 用 N_s 个 RK 节点对空间域进行离散;
- 3) 计算各点的 RK 形函数;
- 4) 组装矩阵 \mathbf{M} 和 \mathbf{A} 矩阵;
- 5) 计算 $\bar{\mathbf{G}}$ 矩阵;
- 6) 评估对于任意波数 k 的 D 值; 假如 $D \geq 0$, 停止计算并输出“无条件不稳定”; 假如 $D < 0$, 根据式(41)求得临界时间步长并输出结果.

3 弥散分析

考虑与第 2 节同样的波动方程, 通过引入 RK 近似函数, 方程(32)的半离散形式可表达成

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{d}(t) = \mathbf{0}, \tag{42}$$

其中 $\mathbf{M}_{IJ} = \psi_I(x_J), \mathbf{K}_{IJ} = -\psi_{I,xx}(x_J)$.

引入 von Neumann 假设

$$d(x) = d_0 e^{(ikx \cos \theta - i\bar{\omega} t)}, \tag{43}$$

其中, $\bar{\omega}$ 是计算圆频率, k 是波数, 可得

$$(\mathbf{K} - \bar{\omega}^2 \mathbf{M}) \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad (44)$$

采用均布点距 h 的 N_s 个点对空间域进行离散后可得第 m 个节点的正则化相速度 p_n 如下:

$$p_n = \frac{\bar{c}}{c} = \frac{\bar{\omega}}{ck} = \frac{1}{ck} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{K}_{m,m+i} \cos(kih)}{\sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{M}_{m,m+i} \cos(kih)}}, \quad (45)$$

其中 $\bar{c} = \bar{\omega}/k$ 是计算相速度。

4 数值算例

为了将第 1 节所描述的 RKCM 法的计算稳定时间步长与第 2 节提出的稳定性评价方法所求得预测稳定时间步长进行比较,本节计算了如图 1 所示的一维杆件波动问题。杆的几何参数和材料参数为:长度 $l = 10$ m,线密度 $\rho = 1.0$ kg/m,弹性模量 $E = 10$ kPa。问题的具体描述如下:

运动方程

$$\rho \ddot{u} = E u_{xx}, \quad 0 < x < 10, t \geq 0. \quad (46)$$

边界条件

$$u(0, t) = 0, E u_x(l, t) = 0. \quad (47)$$

初始条件

$$u(x, 0) = 0, \dot{u}(x, 0) = v^0 = -1.0 \text{ m/s}. \quad (48)$$

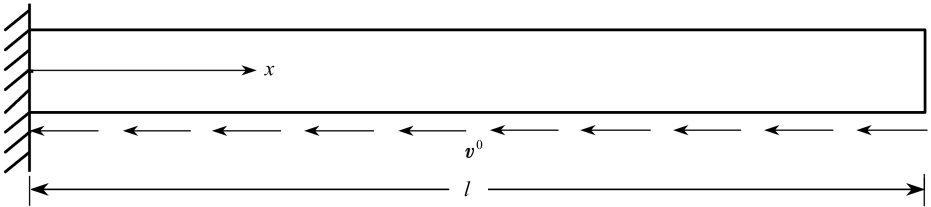


图 1 波的传播算例示意图

Fig.1 Wave propagation problem statement

采用如下离散参数: $N_s = 21, N_c = 21, \beta = 0, \gamma = 0.5$, 基函数最高阶数 $m = 2$ 。

表 1 RKCM 法临界时间步长预测值和计算值的对比

Table 1 Comparison of predicted time step and numerical time step by RKCM

a/h	τ / s (RKCM)	
	predicted (Δt_p)	numerical (Δt_n)
3.3	0.318 3	0.322 1
4.3	0.320 9	0.329 5
5.3	0.320 8	0.337 3
6.3	0.255 7	unconditionally unstable

计算数值算例的临界时间步长的程序流程如下:

1) 定义所求问题的空间域 $[0, 10]$ 以及 $N_s = 21$ 个 RK 节点; 2) 计算各节点的 RK 形函数; 3) 根据运动方程(46)和边界条件(47)按式(23)组装 \mathbf{S} 矩阵和 \mathbf{A} 矩阵; 4) 根据初始条件

(48) 求解方程 (25) 和 (26) 得 \mathbf{d} 和 \mathbf{v} 的初值; 5) 设定初始时间步长 Δt 然后在时间上逐步循环; 6) 根据前一时间步所得结果按照式 (28) ~ (31) 计算预测函数和修正函数 ($\beta = 0, \gamma = 0.5$); 7) 更新 \mathbf{S}^* 矩阵和 \mathbf{b}^* 矩阵并根据式 (27) 求解 \mathbf{a} ; 8) 求得位移时程并判断结果的稳定性: 假如稳定, 跳至第 5) 步采用更大的时间步长重新计算; 假如不稳定, 设定临界时间步长, 结束计算。

如上面程序流程所示, RKCM 法的临界时间步长计算值是通过逐渐增大时间步长直到出现不稳定的结果。另一方面, 根据第 2 节的稳定性分析算法可以求得临界时间步长预测值。表 1 给出了不同支撑域大小情况下的预测值 Δt_p 和计算值 Δt_n 的对比。

图 2 所示的是由式 (45) 所得的不同支撑域的情况下正则化相速度的比较。

如表 1 所示, 对于 $a/h = 3.3, 4.3, 5.3$ 的情况, 临界时间步长的预测值和计算值非常接近。而对于 $a/h = 6.3$ 的情况, 我们从弥散分析可以看出 p_n 在 $a/h = 6.3$ 下的表现要比其他情况差很多, 这应该就是导致计算结果表现出无条件不稳定的原因, 即使稳定性分析给出的预测值是一个稳定的结果。

为了进行比较, 表 2 给出了采用径向基函数配点法 (RBCM) [31] 求解此算例所得结果。从表 2 可以看出, 这两个方法对于求解瞬态动力问题所需的临界时间步长比较接近。

表 2 RBCM 法所求得的临界时间步长预测值和计算值对比

Table 2 Comparison of predicted time step and numerical time step by RBCM

a_r/h	τ / s (RBCM)	
	predicted (Δt_p)	numerical (Δt_n)
3	0.319 2	0.331 2
4	0.321 1	0.335 6
5	0.323 7	0.337 9
6	0.326 7	0.340 2

表 2 中 RBCM 采用的形函数是逆多元二次函数 $g_i(x) = (r_i^2 + a_r^2)^{-1/2}$, 其中 a_r 是形状参数。

5 结 论

作为一个基于强形式的配点法, RKCM 由于其各种优点近年来受到了越来越多的关注。不过其应用在动力问题时的稳定性和弥散性分析还非常的少。本文提出了一个简单有效的算法对其稳定性和弥散性进行了分析并通过数值算例进行了验证。通过对数值结果进行比较, 本文得出了以下几点重要的结论:

a) 根据所提出的算法而求得的临界时间步长预测值和计算值非常接近, 预测值相较计算值而言略为保守。

b) 采用更大的支撑域并不会对稳定性有很大的提高, 而采用更大的支撑域会消耗大量的运算时间。此外, 如果支撑域过大的话, 可能会因为弥散性过差而导致不稳定性的问题出现。因

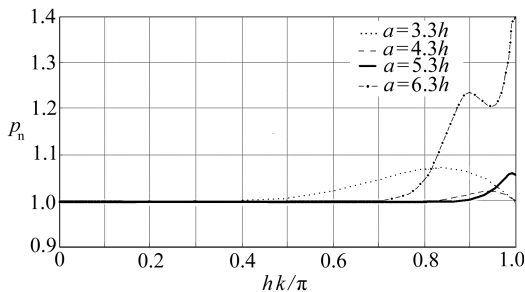


图 2 不同支撑域下正则化相速度比较

Fig.2 Comparison of normalized phase speed obtained by different support sizes

此,建议在合理的范围内采用相对较小的支撑域。

c) RKCM 和 RBCM 这两个基于不同形函数的配点法在求解瞬态动力问题时的稳定性处于相似的水平。

参考文献:

- [1] Gingold R A, Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars[J]. *Royal Astronomical Society, Monthly Notices*, 1977, **181**:375-389.
- [2] Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements[J]. *Computational Mechanics*, 1992, **10**(5):307-318.
- [3] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, **37**(2):229-256.
- [4] Melenk J M, Babuska I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **139**(1/4):289-314.
- [5] Duarte C A, Oden J T. An h-p adaptive method using clouds[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **139**(1/4):237-262.
- [6] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, **20**(8/9):1081-1106.
- [7] Chen J S, Pan C H, Wu C T, Liu W K. Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **139**(1/4):195-227.
- [8] Sukumar N, Moran B, Belytschko T. The natural element method in solid mechanics[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, **43**:839-887.
- [9] Atluri S N, Zhu T L. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics[J]. *Computational Mechanics*, 2000, **25**(2/3):169-179.
- [10] Kansa E J. Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivatives[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 1990, **19**(8/9):127-145.
- [11] Kansa E J. Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 1990, **19**(8/9):147-161.
- [12] Zhang X, Chen J S, Osher S. A multiple level set method for modeling grain boundary evolution of polycrystalline materials[J]. *Interaction and Multiscale Mechanics*, 2008, **1**:178-191.
- [13] Belytschko T, Kronggaus Y, Organ D, Fleming M. Meshless methods: an overview and recent developments[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **139**(1/4):3-47.
- [14] 张雄,刘岩,马士. 无网格法的理论及应用[J]. 力学进展,2009, **39**(1):1-36. (ZHANG Xiong, LIU Yan, MA Shang. Meshfree methods and there applications[J]. *Advances in Mechanics*, 2009, **39**(1):1-36. (in Chinese))
- [15] Liu G R. *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*[M]. 2nd ed. CRC Press, 2009.

- [16] Zhang X, Song K Z, Lu M W, Liu X. Meshless methods based on collocation with radial basis function[J]. *Computational Mechanics*, 2000, **26**(4):333-343.
- [17] 黄娟,张健,陈光淦. 一类 Schrödinger-Poisson 型方程的稳定性[J]. 应用数学和力学,2009,**30**(11):1381-1386. (HUANG Juan, ZHANG Jiang, CHEN Guang-gin. Stability of Schrödinger-Poisson type equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2009, **30**(11):1469-1474.)
- [18] Ye Z. A new finite element formulation for planar elastic deformation[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, **40**(14):2579-2591.
- [19] 朱合华,杨宝红,蔡永昌,徐斌. 无网格自然单元法在弹塑性分析中的应用[J]. 岩土力学,2004,**25**(4):671-674. (ZHU He-hua, YANG Bao-hong, CAI Yong-chang, XU Bin. Application of meshless natural element method to elastoplastic analysis[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2004, **25**(4):671-674. (in Chinese))
- [20] 熊渊博,龙述尧. 用无网格局部 Petrov-Galerkin 方法分析 Winkler 弹性地基板[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2004, **31**(4): 101-105. (XIONG Yuan-bo, LONG Shu-yao. An analysis of plates on the Winkler foundation with the meshless local Petrov-Galerkin method[J]. *Journal of Hunan University (Natural Science)*, 2004, **31**(4):101-105. (in Chinese))
- [21] 李树忱,程玉民. 基于单位分解法的无网格数值流形方法[J]. 力学学报, 2004, **36**(4): 496-500. (LI Shu-chen, CHENG Yu-min. Meshless numerical manifold method based on unit partition [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, **36**(4):496-500. (in Chinese))
- [22] Hu H Y, Chen J S, Hu W. Error analysis of collocation method based on reproducing kernel approximation[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2009, **27**(3):554-580.
- [23] Hu H Y, Lai C K, Chen J S. A study on convergence and complexity of reproducing kernel particle method [J]. *Interaction and Multiscale Mechanics*, 2009, **2**:295-319.
- [24] Lucy L. A numerical approach to testing the fission hypothesis[J]. *The Astronomical Journal*, 1977, **82**(12):1013-1024.
- [25] Monaghan J J. Why particle methods work[J]. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1982, **3**(4):422-433.
- [26] Monaghan J J. An introduction to SPH[J]. *Computer Physics Communications*, 1988, **48**(1): 89-96.
- [27] Randles P W, Libersky L D. Smoothed particle hydrodynamics: some recent improvements and applications[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **139**(1/4): 375-408.
- [28] Liu W K, Jun S, Li S, Adee J, Belytschko B. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, **38**: 1655-1679.
- [29] Liu W K, Chen Y. Wavelet and multiple scale reproducing kernel particle methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, **21**(10):901-931.
- [30] Chen J S, Pan C, Roque M O L, Wang H P. A Lagrangian reproducing kernel particle method for metal forming analysis[J]. *Computational Mechanics*, 1998, **22**(3):289-307.
- [31] LUO Han-zhong, CHEN Jiun-shyan, HU Hsin-yun, HUANG Xing-chun. Stability of radial basis

collocation method for transient dynamics[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University(Science)*, 2010, **15**(5): 615-621.

Stability and Dispersion Analysis of Reproducing Kernel Collocation Method for Transient Dynamics

LUO Han-zhong¹, LIU Xue-wen², HUANG Xing-chun¹

(1. *School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, P. R. China;*

2. *Siemens Industry Software (China) Co., Ltd., Shanghai 200042, P. R. China*)

Abstract: Reproducing kernel collocation method based on strong formulation was introduced for transient dynamics. von Neumann stability and dispersion analysis of reproducing kernel collocation method with central difference temporal discretization was derived to evaluate the stability condition for second order wave problem. The stability analysis algorithm proposed firstly given an approach to predict critical time step for second order wave problem which can greatly save computational time in application. A numerical test was conducted to validate this algorithm. The comparison of numerical critical time step and predicted results shows good agreement. The guidance to choose a proper support size of reproducing kernel shape function is also given. The results by radial basis collocation method are also listed for comparison.

Key words: reproducing kernel collocation method (RKCM); stability analysis; dispersion analysis; transient dynamics