

交错网格上的压力 Poisson 方程法和 抛射法的本质相容性*

王 艺

(中国石油大学(北京)城市油气输配技术北京市重点实验室,北京 102249)

摘要: 通过保留压力 Poisson 方程源项中的粘性项,建立了交错网格上的一种求解压力 Poisson 方程的新方法.该方法的推导过程显示,新建立的压力方程与抛射法中的压力方程具有相同的形式.数值计算显示这两种求解压力的方法不会影响速度和压力的结果,而且计算耗时相当.

关键词: 压力 Poisson 方程; 抛射法; 数值分析; 计算流体力学; 交错网格

中图分类号: O302;O357.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.06.011

引 言

同位网格上的压力 Poisson 方程法,由 Abdallah^[1]作了详细介绍.他利用连续性条件消去了压力 Poisson 方程中的粘性项,并采用 Neumann 边界条件求解压力方程.但是在数值收敛未达到前,粘性项可能含有较大的方程余量,从而影响方程的收敛速度^[2-3].因此,本文提出的新方法保留了压力 Poisson 方程中的粘性项,并且使用交错网格,求解压力 Poisson 方程以较 Abdallah 的同位网格方法更方便地耦合速度和压力.本文的方法还与抛射法及基准解作了比较,以验证该方法的正确性.

1 交错网格上的压力 Poisson 方程

为简便起见,以二维方腔不可压缩顶盖驱动流(图1)为例说明本文提出的新方法.无量纲控制方程如下:

连续性方程

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0; \quad (1)$$

x 方向动量方程

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right); \quad (2)$$

* 收稿日期: 2010-06-04; 修订日期: 2011-04-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50876114)

作者简介: 王艺(1982—),男,合肥人,博士生(Tel: +86-10-89733776;E-mail: wy1031@yahoo.com.cn).

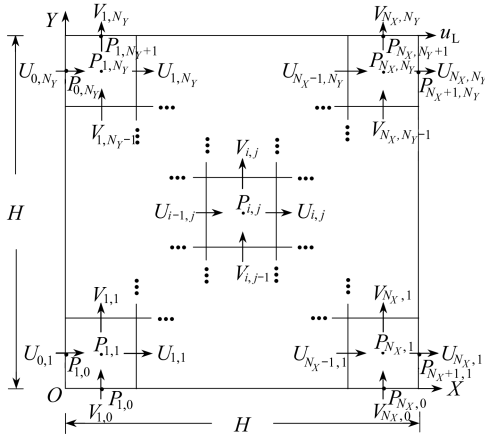


图1 计算区域和交错网格示意图

Fig. 1 Computational domain and staggered grid

相加,得到以下压力 Poisson 方程:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left[- \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[- \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right), \quad (4)$$

其中的空间项可以显式离散,非稳态项的离散如下:

$$- \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = - \frac{1}{\Delta \tau} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right)^{(n+1)} - \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] = \frac{1}{\Delta \tau} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right). \quad (5)$$

在上述方程的离散过程中,非稳态项的隐式部分 $(\partial U/\partial X + \partial V/\partial Y)^{(n+1)}$ 强制为 0 是因为压力方程在达到收敛以前,无法同时保证在第 n 和第 $n+1$ 时层都满足连续性条件(方程(1))^[2-3],只能使连续性条件优先在 $n+1$ 时层得到满足以维持不断的时间推进.另一方面,方程(5)中非稳态项的显式部分 $\partial U/\partial X + \partial V/\partial Y$ 被保留下来以克服求解动量方程时的非线性数值不稳定性^[3-6].那么既然该显式部分在方程(5)中被保留下来,即该项不恒为 0,作者认为在数学意义上,该项也不能像传统的压力 Poisson 方程法那样用于消去压力 Poisson 方程(方程(4))中的粘性项.因此在本文中保留了方程(4)中的粘性项.将方程(5)代入方程(4),得到如下形式:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} = \frac{\partial U'}{\partial X} + \frac{\partial V'}{\partial Y} + \frac{1}{\Delta \tau} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right), \quad (6)$$

其中

$$U' = - \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right),$$

$$V' = - \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right).$$

将方程(6)在交错网格上采用内节点法离散,并结合无滑移边界条件,得到其以下离散形式:

$$c_{ext} \cdot P_{i+1,j} + c_{wxi} \cdot P_{i-1,j} + c_{nj} \cdot P_{i,j+1} + c_{syj} \cdot P_{i,j-1} - c_{pi,j} \cdot P_{i,j} = S_{i,j}, \quad (7)$$

其中

y 方向动量方程

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right); \quad (3)$$

其中, U 和 V 分别为以顶盖速度 (u_L) 为基准的 x 和 y 方向的无量纲速度, $U = u/u_L$, $V = v/u_L$; X 和 Y 分别为以方腔边长 (H) 为基准的无量纲坐标, $X = x/H$, $Y = y/H$; τ 为无量纲时间, $\tau = t/(H/u_L)$; P 为由 u_L 和流体密度 (ρ) 为基准的无量纲压力, $P = p/(\rho u_L^2)$; Re 为 Reynolds 数, $Re = \rho u_L H/\mu$; μ 为流体粘度.

将方程(2)和方程(3)分别对 X 和 Y 求导并

$$c_{exi} = \begin{cases} 0, & i = N_x, \\ \frac{1}{\Delta X^2}, & \text{其它}, \end{cases} \quad c_{wxi} = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ \frac{1}{\Delta X^2}, & \text{其它}, \end{cases} \quad c_{nyj} = \begin{cases} 0, & j = N_y, \\ \frac{1}{\Delta Y^2}, & \text{其它}, \end{cases}$$

$$c_{syj} = \begin{cases} 0, & j = 1, \\ \frac{1}{\Delta Y^2}, & \text{其它}, \end{cases} \quad c_{pi,j} = c_{wxi} + c_{exi} + c_{syj} + c_{nyj},$$

$$S_{i,j} = \frac{1}{\Delta X}(c_{exi} \cdot U'_{i,j} - c_{wxi} \cdot U'_{i-1,j}) + \frac{1}{\Delta Y}(c_{nyj} \cdot V'_{i,j} - c_{syj} \cdot V'_{i,j-1}) + \frac{1}{\Delta \tau} \left(\frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta X} + \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta Y} \right).$$

方程(7)中的 N_x 和 N_y 分别为 x 和 y 方向的网格数, ΔX 和 ΔY 为相应网格步长. 由方程(7)可解出压力, 再把求得的压力代入动量方程(2)和(3)可求出速度. 从而非稳态控制方程可以在时间上持续推进下去. 至此, 交错网格上新的压力 Poisson 方程已经建立起来.

从以上分析过程可以看出, 在压力 Poisson 方程中保留粘性项的新方法相对于传统的压力 Poisson 方程法大大简化了方程的离散过程. 交错网格的使用避免了同位网格上需要的复杂的压力 Neumann 边界条件^[1], 使得所建立的新方法更加简便易行.

2 结果及讨论

动量方程(2)和(3)中的压力还可由抛射法隐式求出^[3]. 为了将本文提出的方法与抛射法对比, 给出如下的抛射法离散形式:

$$c_{exi} \cdot P_{i+1,j}^{(n+1)} + c_{wxi} \cdot P_{i-1,j}^{(n+1)} + c_{nyj} \cdot P_{i,j+1}^{(n+1)} + c_{syj} \cdot P_{i,j-1}^{(n+1)} - c_{pi,j} \cdot P_{i,j}^{(n+1)} = S'_{i,j}, \quad (8)$$

其中

$$S'_{i,j} = \frac{1}{\Delta \tau} \left(\frac{c_{exi} \cdot \langle U \rangle_{i,j} - c_{wxi} \cdot \langle U \rangle_{i-1,j}}{\Delta X} + \frac{c_{nyj} \cdot \langle V \rangle_{i,j} - c_{syj} \cdot \langle V \rangle_{i,j-1}}{\Delta Y} \right),$$

$$\langle U \rangle_{i,j} = U_{i,j} + U'_{i,j} \Delta \tau, \quad \langle V \rangle_{i,j} = V_{i,j} + V'_{i,j} \Delta \tau.$$

结合速度无滑移边界条件, $S'_{i,j}$ 可以展开成如下形式:

$$S'_{i,j} = \frac{1}{\Delta \tau} \left[\frac{c_{exi} \cdot (U_{i,j} + U'_{i,j} \Delta \tau) - c_{wxi} \cdot (U_{i-1,j} + U'_{i-1,j} \Delta \tau)}{\Delta X} + \frac{c_{nyj} \cdot (V_{i,j} + V'_{i,j} \Delta \tau) - c_{syj} \cdot (V_{i,j-1} + V'_{i,j-1} \Delta \tau)}{\Delta Y} \right] =$$

$$\frac{1}{\Delta X} (c_{exi} \cdot U'_{i,j} - c_{wxi} \cdot U'_{i-1,j}) + \frac{1}{\Delta Y} (c_{nyj} \cdot V'_{i,j} - c_{syj} \cdot V'_{i,j-1}) + \frac{1}{\Delta \tau} \left(\frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta X} + \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta Y} \right).$$

至此, 意外地发现方程(8)中的源项 $S'_{i,j}$ 与方程(7)中的源项 $S_{i,j}$ 完全相同, 而这两个方程的左端项也极其相似. 这一现象说明两种方法可能具有一些共同特征.

为了进一步发现和验证这些共同特征, 将两种方法分别应用于图 1 所示的顶盖驱动流问题. 速度和压力的初始条件设为 0. 采用均分网格离散计算区域, 网格数为 64×64 . 计算 $Re = 1000$. 无量纲时间步长为 $\Delta \tau = 0.001$. 采用多重网格方法以加速压力方程的迭代.

图 2 比较了新的压力 Poisson 方程法和抛射法得到的方腔中垂线上的速度分量, 同时与基

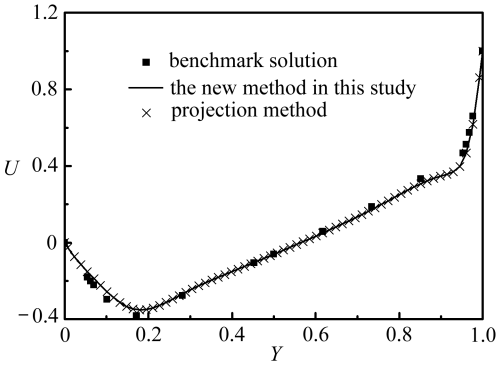
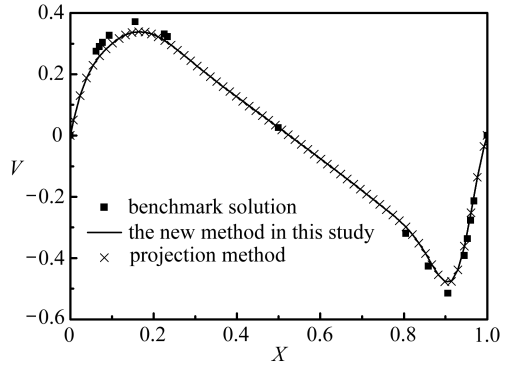
(a) $X = 0.5$ 线上 U 的变化(a) U at $X = 0.5$ (b) $Y = 0.5$ 线上 V 的变化(b) V at $Y = 0.5$

图2 两种方法得到的中垂线速度比较

Fig.2 Velocity components on the center lines by the two methods

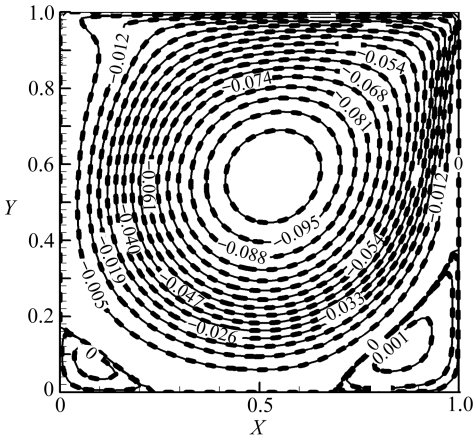


图3 两种方法得到的流函数等值线

(实线;本文的新方法;虚线;抛射法)

Fig.3 Stream function contours by the two methods

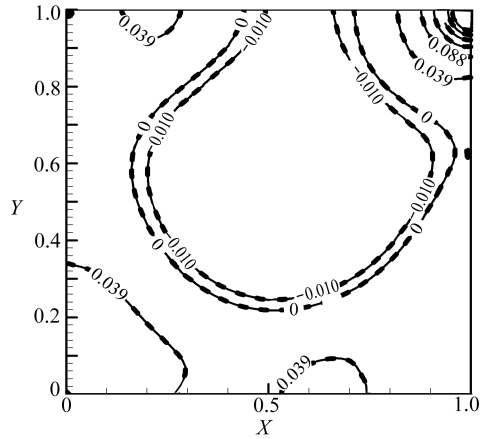
(solid line;the new method in this study;
dashed line;projection method)

图4 两种方法得到的压力等值线

(实线;本文的新方法;虚线;抛射法)

Fig.4 Pressure contours by the two methods

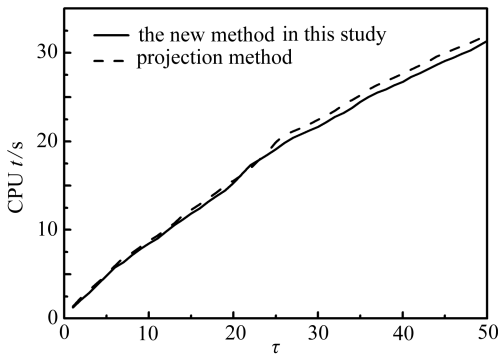
(solid line;the new method in this study;
dashed line;projection method)

图5 两种方法计算时间的比较

Fig.5 Computational time of the two methods

准解进行了比较.可见,新方法的速度与抛射法得到的速度以及基准解均吻合得很好.因此,该方法对特征速度的精度没有影响.

为了进一步比较两种方法得到的流场整体信息,在图3和图4中分别显示了流函数和压力等值线.显然两种方法得到的流函数完全重合,压力也没有差别.

两种方法的计算时间在图5中作了比较.经过了相同的无量纲时间(τ)推进后,两种方法所需的实际CPU时间非常接近.因此,保留了压力Poisson方程粘性项的新方法的计算时间与抛射

法差别不大,并且还略低于抛射法的计算时间.这说明保留压力 Poisson 方程中的粘性项的方法较消去粘性项的方法,更容易满足连续性条件而使计算收敛更快.

3 结 论

基于以上结果分析及讨论,可作出如下结论:

1) 在交错网格上用新方法建立了压力 Poisson 方程,由于其避免了压力边界的处理,相对于传统的压力 Poisson 方程法大大降低了数值处理的难度.

2) 新方法中的压力 Poisson 方程与抛射法中的压力方程具有本质上相同的形式.由这两种方法得到的速度和压力场吻合得很好.

3) 两种方法的 CPU 时间差别很小.

参考文献:

- [1] Abdallah S. Numerical solutions for the pressure Poisson equation with Neumann boundary conditions using a non-staggered grid (I) [J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, **70** (1): 182-192.
- [2] 陶文铨. 数值传热学[M]. 第2版. 西安:西安交通大学出版社,2002. (TAO Wen-quan. *Numerical Heat Transfer*[M]. 2nd ed. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2002. (in Chinese))
- [3] 陶文铨. 计算传热学的近代进展[M]. 北京:科学出版社, 2005. (TAO Wen-quan. *Recent Advances of Numerical Heat Transfer*[M]. Beijing: Science Press, 2005. (in Chinese))
- [4] Harlow F H, Welch J E. Numerical calculations of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface[J]. *Physics of Fluids*, 1965, **8**: 2182-2189.
- [5] Roache P J. *Computational Fluid Dynamics*[M]. Albuquerque: Hermosa, 1976.
- [6] Abdallah S. Numerical solutions for the incompressible Navier-Stokes equations in primitive variables using a non-staggered grid (II) [J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, **70** (1): 193-202.

Essential Consistency of Pressure Poisson Equation Method and Projection Method on Staggered Grid

WANG Yi

(Beijing Key Laboratory of Urban Oil and Gas Distribution Technology,
China University of Petroleum-Beijing, Beijing 102249, P. R. China)

Abstract: A new pressure Poisson equation method was established on staggered grid by keeping the viscous terms in the source of pressure Poisson equation. The derivations show that newly established pressure equation has the identical form of the equation in projection method. The results show that selection between the two methods does not affect velocity and pressure values, and CPU times have slight differences.

Key words: pressure Poisson equation; projection method; numerical analysis; computational fluid dynamics; staggered grid