

# 非定常 Stokes 方程一种基于 POD 方法的 简化有限差分格式\*

罗振东<sup>1</sup>, 欧秋兰<sup>1</sup>, 谢正辉<sup>2</sup>

(1. 华北电力大学 数理学院, 北京 102206;

2. 中国科学院 大气物理研究所 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

**摘要:** 特征正交分解 (proper orthogonal decomposition, 简记为 POD) 方法是一种可对偏微分方程的物理模型 (如流体流动) 做简化的技术, 这种方法已经成功地用于对复杂系统模型降阶. 该文推广应用 POD 方法, 将 POD 方法应用于具有实际应用背景的非定常 Stokes 方程经典的有限差分格式, 建立一种维数较低而精度足够高的简化差分格式, 并给出简化差分格式解与经典差分格式解的误差估计. 数值例子说明数值计算结果与理论结果相吻合. 进一步表明基于 POD 方法的简化差分格式对求解非定常 Stokes 方程数值解是可行和有效的.

**关键词:** 有限差分格式; 特征正交分解; 误差估计; 非定常 Stokes 方程

**中图分类号:** O241.82      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.07.004

## 引 言

设  $\Omega \in R^2$  是有界连通的多角形区域. 考虑下面的非定常 Stokes 方程.

**问题(I)** 求  $\mathbf{u} = (u, v)$  和  $p$  使得对于  $T > 0$  满足

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{0}, & (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}_0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{u}$  表示流体速度向量,  $p$  表示压力,  $Re$  是常数即 Reynolds 数,  $\mathbf{f} = (f, g)$  是已知体积力,  $\mathbf{u}_0(x, y)$  是已知向量函数,  $T$  是总时间.

非定常的 Stokes 方程是流体力学中的一个重要方程组, 已经成功广泛地应用于许多实际工程领域 (参见文献 [1-2]). 然而, 由于计算域通常是不规则的, 因此要求其解析解即精确解是不容易的. 有效的方法是求其数值解. 有限差分方法被认为是最有效的数值方法之一, 已经

\* 收稿日期: 2011-03-24; 修订日期: 2011-04-25

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目 (10871022; 11061009; 40821092); 国家 973 资助项目 (2010CB428403; 2009CB421407; 2010CB951001); 河北省自然科学基金资助项目 (A2010001663)

**作者简介:** 罗振东 (1958—), 男, 广西人, 教授, 博士, 博士生导师 (联系人. E-mail: zhdluo@163.com).

广泛用于求解非定常的 Stokes 方程数值解(参见文献[3]).但是,一些经典的有限差分格式的自由度太多,因此重要的问题是在保证具有足够高精度数值解情况下,如何减少自由度和计算量,节省计算时间和内存要求.

特征正交分解(proper orthogonal decomposition,简记为 POD)方法能提供具有足够高精度而自由度又较少的低维模型,从而简化计算,节省计算时间和内存(参见文献[4]).在信号分析和样本识别中,称该方法为 Karhunen-Loève 展开(参见文献[5]);在统计学中,称该方法为主分量分析(参见文献[6]);在地球物理的流体动力学和气象学中,称该方法为经验正交函数方法(参见文献[6-7]).POD 方法主要提供一种有效逼近大量数据的工具,其实质是在最小二乘意义下寻找能代表已知数据的一组正交基,也就是一种求已知数据的最优逼近方法. POD 方法与某些偏微分方程数值解法相结合,能将无限维的微分方程化简成低维模型,以至能极大地减少计算量和降低内存要求.

虽然 POD 方法已有广泛的应用,但是最初主要是用于统计计算和流体动力学的主分量分析或寻找动力系统的主要特征量(参见文献[4-16]).直到最近十年,基于 POD 方法的抛物方程和更一般的流体力学方程的一些 Galerkin 方法才被提出(参见文献[17-18]),才有将奇值分解(singular value decomposition,简记为 SVD)方法与 POD 方法结合,用于处理 Burgers 方程(参见文献[19])和方腔流问题(参见文献[20])的结果出现.近年来,我们的研究小组提出了赤道太平洋模式,抛物型方程和非定常的 Navier-Stokes 方程的一些基于 POD 方法降维有限差分格式和有限元(或混合有限元)格式及其误差估计(参见文献[21-25]).然而,据我们所知,目前还没有将 POD 方法和 SVD 方法用于对非定常 Stokes 经典有限元差分格式做降维处理并做误差估计的报道.

本文延伸文献[21-22](这两文都没有给出误差分析)的发展,将经典的有限差分格式与 POD 方法和 SVD 方法结合,对具有实际应用背景的非定常 Stokes 方程,建立一种维数较低而精度足够高的简化差分格式,并给出降维 POD 有限差分与经典有限差分分解的误差估计,为应用部门提供科学的理论依据.并用数值例子说明,数值计算结果与理论结果是吻合的.进一步表明基于 POD 方法的简化差分格式对求解非定常 Stokes 方程的数值解是可行和有效的.

本文的安排如下:第 1 节给出非定常 Stokes 方程经典的有限差分格式,并用经典差分格式得到瞬时解生成瞬像(snapshots).第 2 节再由瞬像生成最优正交 POD 基,并由 POD 基建立非定常 Stokes 方程的一种维数很低而精度足够高的简化有限差分格式.第 3 节导出降维 POD 有限差分与经典有限差分分解的误差估计.第 4 节通过一些数值例子说明 POD 方法的可行性和有效性.第 5 节叙述我们的主要结论以及一些展望.

## 1 非定常 Stokes 方程经典的有限差分格式及瞬像生成

设  $\Delta x$  和  $\Delta y$  分别是  $x$  和  $y$  方向的空间步长,  $\Delta t$  是时间步长,  $u_{j+1/2,k}^n, v_{j,k+1/2}^n$  和  $p_{j,k}^n$  分别表示函数  $u, v$  和  $p$  在点  $(x_{j+1/2}, y_k, t_n), (x_j, y_{k+1/2}, t_n)$  和  $(x_j, y_k, t_n)$  ( $0 \leq j \leq J, 0 \leq k \leq K, 0 \leq n \leq N = [T/\Delta t]$ ) 的近似值.那么,问题(I)的有限差分格式表示如下:

$$\left[ \frac{u_{j+1/2,k}^n - u_{j-1/2,k}^n}{\Delta x} + \frac{v_{j,k+1/2}^n - v_{j,k-1/2}^n}{\Delta y} \right]^{n+1} = 0, \quad (2)$$

$$u_{j+1/2,k}^{n+1} = F_{j+1/2,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{j+1,k}^n - p_{j,k}^n) + \Delta t f_{j+1/2,k}^n, \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned}
F_{j+1/2,k}^n &= \frac{\Delta t}{Re} \left[ \frac{u_{j+1/2,k-1} - 2u_{j+1/2,k} + u_{j+1/2,k+1}}{\Delta y^2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{u_{j-1/2,k} - 2u_{j+1/2,k} + u_{j+3/2,k}}{\Delta x^2} \right]^n + u_{j+1/2,k}^n, \\
v_{j,k+1/2}^{n+1} &= G_{j,k+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{j,k+1}^n - p_{j,k}^n) + \Delta t g_{j,k+1/2}^n, \tag{4}
\end{aligned}$$

这里

$$G_{j,k+1/2}^n = \frac{\Delta t}{Re} \left[ \frac{v_{j-1,k+1/2} - 2v_{j,k+1/2} + v_{j+1,k+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{v_{j,k-1/2} - 2v_{j,k+1/2} + v_{j,k+3/2}}{\Delta y^2} \right]^n + v_{j,k+1/2}^n.$$

将式(3)和式(4)代入式(2)可得到关于  $p$  的 Poisson 方程下面差分格式:

$$\left[ \frac{p_{j-1,k} - 2p_{j,k} + p_{j+1,k}}{\Delta x^2} + \frac{p_{j,k-1} - 2p_{j,k} + p_{j,k+1}}{\Delta y^2} \right]^n = R_{HS}, \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}
R_{HS} &= \frac{1}{\Delta t \Delta x} [F_{j+1/2,k} - F_{j-1/2,k} + \Delta t (f_{j+1/2,k} - f_{j-1/2,k})]^n + \\
&\quad \frac{1}{\Delta t \Delta y} [G_{j,k+1/2} - G_{j,k-1/2} + \Delta t (g_{j,k+1/2} - g_{j,k-1/2})]^n.
\end{aligned}$$

当  $\Delta t \leq 0.25 Re \Delta x^2$ ,  $\Delta t \leq 0.25 Re \Delta y^2$  成立时,有限差分格式(3)~(5)是稳定的,而且有下面的误差估计(参见文献[3]).

$$\begin{aligned}
E_n(u_{j+1/2,k}^n, v_{j,k+1/2}^n, p_{j,k}^n) &= \\
&\quad \| (u(x_{j+1/2}, y_k, t_n), v(x_j, y_{k+1/2}, t_n), p(x_j, y_k, t_n)) - (u_{j+1/2,k}^n, v_{j,k+1/2}^n, p_{j,k}^n) \| = \\
&\quad O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2), \tag{6}
\end{aligned}$$

其中  $\| \cdot \|$  表示向量的通常范数.

这样,只要给定体积力函数  $f$ , 初始向量函数  $u_0$ , 时间步长  $\Delta t$ , 空间步长  $\Delta x$  和  $\Delta y$  及  $Re$ , 解(3)~(5)可以得到问题(1)的有限差分近似解  $u_{j+1/2,k}^n, v_{j,k+1/2}^n$  和  $p_{j,k}^n$  ( $0 \leq j \leq J, 0 \leq k \leq K, 0 \leq n \leq N$ ). 分别令  $u_i^n = u_{j+1/2,k}^n, v_i^n = v_{j,k+1/2}^n$  和  $p_i^n = p_{j,k}^n$  ( $i = kJ + j + 1, 1 \leq i \leq m, m = JK, 0 \leq j \leq J - 1, 0 \leq k \leq K - 1$ ). 从包含  $N \times m$  个元素的近似解集合  $\{u_i^n, v_i^n, p_i^n\}_{n=1}^N$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 中选出一含  $L \times m$  个元素的集合  $\{u_i^{n_l}, v_i^{n_l}, p_i^{n_l}\}_{l=1}^L$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_L \leq N$ ), 这些元素称瞬像.

**注1** 虽然本文是从有限差分格式近似解得到瞬像,但是当人们在计算实际问题时,瞬像集合可以从实际物理过程抽取样本点,通过插值(或资料同化)得到.由于大量自然现象未来的发展变化(例如,天气变化)都是与先前的结果密切相关的,如果过去的动力系统对未来的动力系统有很好的代表和涵盖,人们可以用先前的或现存结果去作为瞬像,用下面的 POD 方法生成 POD 基,建立维数很低的降阶动力系统.这样,自然现象未来的发展变化就可以快速有效地模拟和预测,这对实际应用有重要的价值.

## 2 POD 方法及非定常 Stokes 方程基于 POD 方法的简化有限差分格式

本节,用所谓的集合矩阵的 SVD 及数值实现求出 POD 基.特别是,在空间  $C^m$  (有限维情形)中考虑 POD.更多的细节参考文献[19,26-28].

### 2.1 有限维 POD 方法

这里我们首先引用 SVD 的一些理论结果(参见文献[19]).其次,给出 POD 的数值实现.

**定义 1 (奇值和奇值向量)** 对于  $m \geq n$ , 设  $Y \in R^{m \times n}$  是秩  $d \leq n$  的矩阵. 设  $U := \{u_i\}_{i=1}^d$  ( $u_i \in R^n$ ) 和  $V := \{v_i\}_{i=1}^d$  ( $v_i \in R^m$ ) 是成对的标准正交向量集对满足

$$Y u_i = \sigma_i v_i, \quad Y^T v_i = \sigma_i u_i, \quad i = 1, \dots, d.$$

那么,  $\sigma_1, \dots, \sigma_d$  称为奇值, 向量  $u_i \in U$  ( $i = 1, \dots, d$ ) 称为右奇向量而且向量  $v_i \in V$  ( $i = 1, \dots, d$ ) 称为左奇向量.

**命题 1 (SVD 的存在性<sup>[27]</sup>)** 设  $Y = [y_1, \dots, y_n]$  是秩  $d \leq \min\{m, n\}$  的实值  $m \times n$  矩阵. 那么存在  $Y$  的一个 SVD, 即存在实数  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_d > 0$  标准正交矩阵  $U = [u_1, \dots, u_m] \in R^{m \times m}$  和  $V = [v_1, \dots, v_n] \in R^{n \times n}$  满足

$$Y = U \Sigma V^T, \quad \Sigma := \begin{pmatrix} D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in R^{m \times n},$$

其中  $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_d) \in R^{d \times d}$  而且  $\mathbf{0}$  块是适当维零矩阵.

**引理 1 (唯一性<sup>[28]</sup>)** 对于任意的  $Y \in R^{m \times n}$ , 它的奇值是唯一的. 非零奇值对应于左奇向量和右奇向量是唯一的, 而且仅是同时变号下唯一决定.

**定理 1 (最优逼近<sup>[29]</sup>)** 对于  $m \geq n$ , 设  $A \in R^{m \times n}$  是秩  $d \leq n$  的矩阵. 设  $A = U \Sigma V^T$  是一个 SVD, 而且  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  是  $A$  的奇值. 通过令  $\sigma_{l+1} = \sigma_{l+2} = \dots = \sigma_n = 0$  构造一个秩  $l \leq d$  的逼近矩阵  $A^l$ . 那么, 在所有秩为  $l$  的矩阵当中,  $A^l$  是在 Frobenius 范数下  $A$  的最好逼近:

$$\|A - A^l\|_{\text{Fro}} = \min_{\text{rank}(B)=l} \|A - B\|_{\text{Fro}} = \sigma_{l+1}.$$

对于  $\|\cdot\|_2$  范数, 也具有同样最小值  $\sigma_{l+1}$ , 但是  $A^l$  不是  $A$  的唯一逼近.

正交投影在上文中的 POD 方法中起重要的作用. 因此, 给出正交投影及其等同的表述(相关的论证可在文献[29]中找到).

**定义 2** 设  $(X, (\cdot, \cdot)_X)$  是具有由内积诱导出的范数  $\|\cdot\|_X$  的 Hilbert 空间. 设  $X^n$  是  $X$  的可分闭子空间. 称算子  $P$  是在  $X^n$  上的正交投影, 如果对于任意的  $\varphi \in X, P: X \rightarrow X^n$  满足

$$(P\varphi, \psi)_X = (\varphi, \psi)_X, \quad \forall \psi \in X^n.$$

如果  $\dim X^n = n < \infty$  而且  $\{\psi_i\}_{i=1}^n$  是  $X^n$  的一组正交基, 那么可以将投影  $P$  用 Fourier 表达式表示为

$$P: X \rightarrow X^n, \quad P(\varphi) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (\varphi, \psi_i)_X \psi_i, \quad \forall \varphi \in X.$$

## 2.2 对非定常 Stokes 方程离散解的应用

下面首先生成瞬像集合的一组基于 POD 方法最优基. 然后建立一种基于 POD 基的简化有限差分格式.

瞬像集合  $\{u_i^{n_l}, v_i^{n_l}, p_i^{n_l}\}_{l=1}^L$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_L \leq N$ ) 可以表示为下面 3 个  $m \times L$  矩阵:

$$A_u = \begin{pmatrix} u_1^{n_1} & u_1^{n_2} & \cdots & u_1^{n_L} \\ u_2^{n_1} & u_2^{n_2} & \cdots & u_2^{n_L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_m^{n_1} & u_m^{n_2} & \cdots & u_m^{n_L} \end{pmatrix}, \quad A_v = \begin{pmatrix} v_1^{n_1} & v_1^{n_2} & \cdots & v_1^{n_L} \\ v_2^{n_1} & v_2^{n_2} & \cdots & v_2^{n_L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_m^{n_1} & v_m^{n_2} & \cdots & v_m^{n_L} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_p = \begin{pmatrix} p_1^{n_1} & p_1^{n_2} & \cdots & p_1^{n_L} \\ p_2^{n_1} & p_2^{n_2} & \cdots & p_2^{n_L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_m^{n_1} & p_m^{n_2} & \cdots & p_m^{n_L} \end{pmatrix}.$$

将 SVD 用于矩阵  $\mathbf{A}_u, \mathbf{A}_v, \mathbf{A}_p$  得

$$\mathbf{A}_u = \mathbf{U}_u \begin{pmatrix} \mathbf{D}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{V}_u^T, \mathbf{A}_v = \mathbf{U}_v \begin{pmatrix} \mathbf{D}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{V}_v^T, \mathbf{A}_p = \mathbf{U}_p \begin{pmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{V}_p^T,$$

其中,  $\mathbf{U}_u, \mathbf{U}_v, \mathbf{U}_p, \mathbf{V}_u, \mathbf{V}_v$  和  $\mathbf{V}_p$  都是标准正交矩阵,  $\mathbf{D}_u = \text{diag}(\sigma_{u_1}, \sigma_{u_2}, \dots, \sigma_{u_{M_d}})$ ,  $\mathbf{D}_v = \text{diag}(\sigma_{v_1}, \sigma_{v_2}, \dots, \sigma_{v_{M_d}})$ ,  $\mathbf{D}_p = \text{diag}(\sigma_{p_1}, \sigma_{p_2}, \dots, \sigma_{p_{M_d}})$ , 矩阵  $\mathbf{U}_u = (\phi_{u_1}, \phi_{u_2}, \dots, \phi_{u_m})$ ,  $\mathbf{U}_v = (\phi_{v_1}, \phi_{v_2}, \dots, \phi_{v_m})$  和  $\mathbf{U}_p = (\phi_{p_1}, \phi_{p_2}, \dots, \phi_{p_m})$  分别由矩阵  $\mathbf{A}_u \mathbf{A}_u^T, \mathbf{A}_v \mathbf{A}_v^T$  和  $\mathbf{A}_p \mathbf{A}_p^T$  的标准正交特征向量构成, 并分别构成 3 组 POD 基. 而对应的奇值  $\sigma_{u_i}, \sigma_{v_i}, \sigma_{p_i}$  分别按递减顺序排列, 即  $\sigma_{u_1} \geq \sigma_{u_2} \geq \dots \geq \sigma_{u_{M_d}} > 0, \sigma_{v_1} \geq \sigma_{v_2} \geq \dots \geq \sigma_{v_{M_d}} > 0$  和  $\sigma_{p_1} \geq \sigma_{p_2} \geq \dots \geq \sigma_{p_{M_d}} > 0$ . 而且分解的奇值  $\sigma_{u_i}, \sigma_{v_i}$  和  $\sigma_{p_i}$  与矩阵  $\mathbf{A}_u \mathbf{A}_u^T, \mathbf{A}_v \mathbf{A}_v^T$  和  $\mathbf{A}_p \mathbf{A}_p^T$  的特征值  $\lambda_{u_i}, \lambda_{v_i}$  和  $\lambda_{p_i} (i = 1, 2, \dots, M_d)$  分别有下面关系:  $\lambda_{u_i} = \sigma_{u_i}^2, \lambda_{v_i} = \sigma_{v_i}^2, \lambda_{p_i} = \sigma_{p_i}^2 (1 \leq i \leq M_d)$ .

分别用  $\mathbf{a}_u^l = (u_1^{n_l}, u_2^{n_l}, \dots, u_m^{n_l})^T, \mathbf{a}_v^l = (v_1^{n_l}, v_2^{n_l}, \dots, v_m^{n_l})^T, \mathbf{a}_p^l = (p_1^{n_l}, p_2^{n_l}, \dots, p_m^{n_l})^T (l = 1, 2, \dots, L)$  表示  $\mathbf{A}_u, \mathbf{A}_v, \mathbf{A}_p$  的  $L$  个列, 并定义它们的投影  $P_{M_u}^u, P_{M_v}^v, P_{M_p}^p$  如下:

$$P_{M_u}^u \mathbf{a}_u^l = \sum_{j=1}^{M_u} (\phi_j, \mathbf{a}_u^l) \phi_j, P_{M_v}^v \mathbf{a}_v^l = \sum_{j=1}^{M_v} (\phi_j, \mathbf{a}_v^l) \phi_j, P_{M_p}^p \mathbf{a}_p^l = \sum_{j=1}^{M_p} (\phi_j, \mathbf{a}_p^l) \phi_j,$$

其中,  $0 < M_u, M_v, M_p \leq L$ , 而且  $(\cdot, \cdot)$  是向量的内积.

分别取  $\mathbf{U}_u = (\phi_{u_1}, \phi_{u_2}, \dots, \phi_{u_m})$ ,  $\mathbf{U}_v = (\phi_{v_1}, \phi_{v_2}, \dots, \phi_{v_m})$  和  $\mathbf{U}_p = (\phi_{p_1}, \phi_{p_2}, \dots, \phi_{p_m})$  最初的  $M_u, M_v$  和  $M_p$  个列, 构成了 3 组最优标准正交 POD 基:  $\Phi_u = (\phi_{u_1}, \phi_{u_2}, \dots, \phi_{u_{M_u}})$ ,  $\Phi_v = (\phi_{v_1}, \phi_{v_2}, \dots, \phi_{v_{M_v}})$  和  $\Phi_p = (\phi_{p_1}, \phi_{p_2}, \dots, \phi_{p_{M_p}}) (M_u, M_v, M_p \ll L)$ . 记

$$\mathbf{u}_m^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_m^n)^T, \mathbf{v}_m^n = (v_1^n, v_2^n, \dots, v_m^n)^T, \mathbf{p}_m^n = (p_1^n, p_2^n, \dots, p_m^n)^T, \quad (7)$$

其中,  $u_i^n = u_{j+1/2, k}^{n_l}, v_i^n = v_{j, k+1/2}^{n_l}$  和  $p_i^n = p_{j, k}^{n_l} (i = kJ + j + 1, 1 \leq i \leq m, m = JK, 0 \leq j \leq J - 1, 0 \leq k \leq K - 1)$ . 这样, 差分格式 (3) ~ (5) 可以写为下面的向量格式:

$$(\mathbf{u}_m^{n+1}, \mathbf{v}_m^{n+1}, \mathbf{p}_m^{n+1})^T = (\mathbf{u}_m^n, \mathbf{v}_m^n, \mathbf{p}_m^n)^T + \Delta t \tilde{F}(\mathbf{u}_m^n, \mathbf{v}_m^n, \mathbf{p}_m^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

令

$$(\mathbf{u}_m^{*n}, \mathbf{v}_m^{*n}, \mathbf{p}_m^{*n})^T = (\Phi_u \alpha_{M_u}^n, \Phi_v \beta_{M_v}^n, \Phi_p \gamma_{M_p}^n)^T, \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{u}_m^{*n} = (u_1^{*n}, u_2^{*n}, \dots, u_m^{*n})^T, \mathbf{v}_m^{*n} = (v_1^{*n}, v_2^{*n}, \dots, v_m^{*n})^T$  和  $\mathbf{p}_m^{*n} = (p_1^{*n}, p_2^{*n}, \dots, p_m^{*n})^T$  分别是对应于  $u, v$  和  $p$  的 3 个近似解列向量. 如果式 (8) 的  $\mathbf{u}_m^{n+1}, \mathbf{v}_m^{n+1}, \mathbf{p}_m^{n+1}$  和  $\mathbf{u}_m^n, \mathbf{v}_m^n, \mathbf{p}_m^n$  分别用式 (9) 的  $\mathbf{u}_m^{*n+1}, \mathbf{v}_m^{*n+1}, \mathbf{p}_m^{*n+1}$  和  $\mathbf{u}_m^{*n}, \mathbf{v}_m^{*n}, \mathbf{p}_m^{*n}$  近似代替, 并注意到  $\Phi_u, \Phi_v$  和  $\Phi_p$  是 3 个由标准正交向量构成的矩阵, 可以得到只含有  $M_u + M_v + M_p (M_u, M_v, M_p \ll L \ll m)$  个未知量的简化差分格式:

$$(\alpha_{M_u}^{n+1}, \beta_{M_v}^{n+1}, \gamma_{M_p}^{n+1})^T = (\alpha_{M_u}^n, \beta_{M_v}^n, \gamma_{M_p}^n)^T + \tilde{G}(\alpha_{M_u}^n, \beta_{M_v}^n, \gamma_{M_p}^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

它们的初始值是

$$\alpha_{M_u}^0 = \Phi_u^T \mathbf{u}_m^0, \beta_{M_v}^0 = \Phi_v^T \mathbf{v}_m^0, \gamma_{M_p}^0 = \Phi_p^T \mathbf{p}_m^0,$$

而且

$$\tilde{G}(\alpha_{M_u}^n, \beta_{M_v}^n, \gamma_{M_p}^n) = \Delta t (\Phi_u^T, \Phi_v^T, \Phi_p^T)^T \tilde{F}(\Phi_u \alpha_{M_u}^n, \Phi_v \beta_{M_v}^n, \Phi_p \gamma_{M_p}^n).$$

**注2** 由于差分格式(10)及(9)只含有  $(M_u + M_v + M_p) \times N$  个未知量,而差分格式(3)~(5)包含  $3m \times N$  个未知量  $(M_u, M_v, M_p \ll L \ll m)$ ,因此差分格式(10)及(9)是一个简化的差分格式.在从式(10)解出  $\alpha_{M_u}^n, \beta_{M_v}^n, \gamma_{M_p}^n$  后,可以由式(9)得到问题(I)的POD最优解.如果  $n = n_l (0 \leq l \leq L)$ ,那么由下列投影公式

$$P_{M_u}(\mathbf{a}_u^l) = \sum_{j=1}^{M_u} (\phi_{uj}, \mathbf{a}_u^l) \phi_{uj}, P_{M_v}(\mathbf{a}_v^l) = \sum_{j=1}^{M_v} (\phi_{vj}, \mathbf{a}_v^l) \phi_{vj}, P_{M_p}(\mathbf{a}_p^l) = \sum_{j=1}^{M_p} (\phi_{pj}, \mathbf{a}_p^l) \phi_{pj}$$

的解向量是与由式(10)和(9)得到的解是相同的.

### 3 非定常 Stokes 方程的简化有限差分格式解的误差估计

本节致力于讨论基于 POD 方法的简化有限差分格式(10)及(9)的解  $\mathbf{u}^{*n} = (u_1^{*n}, u_2^{*n}, \dots, u_m^{*n})^T, \mathbf{v}^{*n} = (v_1^{*n}, v_2^{*n}, \dots, v_m^{*n})^T$  和  $\mathbf{p}^{*n} = (p_1^{*n}, p_2^{*n}, \dots, p_m^{*n})^T$  与问题(I)的经典差分格式(3)~(5)的解的误差估计.为此,需要引入下面离散的 Gronwall 引理(参见文献[30]).

**引理2**(离散的 Gronwall 引理) 设  $\{a_n\}, \{b_n\}$  和  $\{c_n\}$  是3个正数列,而且  $\{c_n\}$  是单调数列,它们满足

$$a_n + b_n \leq c_n + \kappa \sum_{i=0}^{n-1} a_i, \quad \kappa > 0, a_0 + b_0 \leq c_0,$$

那么,  $a_n + b_n \leq c_n \exp(n\kappa), n \geq 0$ .

设

$$\begin{cases} \chi_u = \text{span} \{ \phi_{u1}, \phi_{u2}, \dots, \phi_{uM_u} \}, \\ \chi_v = \text{span} \{ \phi_{v1}, \phi_{v2}, \dots, \phi_{vM_v} \}, \\ \chi_p = \text{span} \{ \phi_{p1}, \phi_{p2}, \dots, \phi_{pM_p} \}. \end{cases} \quad (11)$$

那么,对于矩阵  $\mathbf{A}_u$  的列向量  $\mathbf{a}_u^l (1 \leq l \leq L)$ ,有  $\mathbf{a}_u^l = \mathbf{u}_m^{n_l}$  和

$$P_{M_u}(\mathbf{u}_m^{n_l}) = P_{M_u}(\mathbf{a}_u^l) = \sum_{j=1}^{M_u} (\phi_{uj}, \mathbf{a}_u^l) \phi_{uj} = \sum_{j=1}^{M_u} (\phi_{uj}, \mathbf{u}_m^{n_l}) \phi_{uj} \in \chi_u$$

满足

$$\| \mathbf{u}_m^{n_l} - P_{M_u}(\mathbf{u}_m^{n_l}) \|_2 \leq \sqrt{\lambda_{u(M_u+1)}}, \quad 1 \leq l \leq L, \quad (12)$$

而且

$$\mathbf{u}_m^{*n} = P_{M_u}(\mathbf{u}_m^n) = \sum_{j=1}^{M_u} (\phi_{uj}, \mathbf{u}_m^n) \phi_{uj}$$

正是简化有限差分格式(10)及(9)的解.从而当  $n \in \{n_1, n_2, \dots, n_L\}$  时,有

$$\| \mathbf{u}_m^{n_l} - \mathbf{u}_m^{*n_l} \|_2 \leq \sqrt{\lambda_{u(M_u+1)}}, \quad 1 \leq l \leq L. \quad (13)$$

类似地,当  $l \in \{1, 2, \dots, L\}$  时,有  $\| \mathbf{v}_m^{n_l} - \mathbf{v}_m^{*n_l} \|_2 \leq \sqrt{\lambda_{v(M_v+1)}}, \| \mathbf{p}_m^{n_l} - \mathbf{p}_m^{*n_l} \|_2 \leq \sqrt{\lambda_{p(M_p+1)}}$ .

当  $n \notin \{n_1, n_2, \dots, n_L\}$  时,不妨假设  $t_n \in (t_{n_l}, t_{n_l+1})$  而且  $t_n$  最靠近  $t_{n_l}$ .

将式(10)及(9)与(8)比较可知,式(9)和(10)可以写出类似于式(2)~(5)的下面形式:

$$\left[ \frac{u_{j+1/2,k}^* - u_{j-1/2,k}^*}{\Delta x} + \frac{v_{j,k+1/2}^* - v_{j,k-1/2}^*}{\Delta y} \right]^{n+1} = 0. \quad (14)$$

$$u_{j+1/2,k}^{*n+1} = F_{j+1/2,k}^{*n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{j+1,k}^{*n} - p_{j,k}^{*n}) + \Delta t f_{j+1/2,k}^n, \quad (15)$$

其中

$$F_{j+1/2,k}^{*n} = u_{j+1/2,k}^{*n} + \frac{\Delta t}{Re} \left[ \frac{u_{j+1/2,k-1}^* - 2u_{j+1/2,k}^* + u_{j+1/2,k+1}^*}{\Delta y^2} + \right.$$

$$\frac{u_{j-1/2,k}^* - 2u_{j+1/2,k}^* + u_{j+3/2,k}^*}{\Delta x^2} \Big]^n,$$

$$v_{j,k+1/2}^{*n+1} = G_{j,k+1/2}^{*n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(p_{j,k+1}^{*n} - p_{j,k}^{*n}) + \Delta t g_{j,k+1/2}^{*n}, \quad (16)$$

这里

$$G_{j,k+1/2}^{*n} = v_{j,k+1/2}^{*n} + \frac{\Delta t}{Re} \left[ \frac{v_{j-1,k+1/2}^* - 2v_{j,k+1/2}^* + v_{j+1,k+1/2}^*}{\Delta x^2} + \frac{v_{j,k-1/2}^* - 2v_{j,k+1/2}^* + v_{j,k+3/2}^*}{\Delta y^2} \right]^n,$$

及关于  $p$  的 Poisson 方程的离散形式:

$$\left[ \frac{p_{j-1,k}^* - 2p_{j,k}^* + p_{j+1,k}^*}{\Delta x^2} + \frac{p_{j,k-1}^* - 2p_{j,k}^* + p_{j,k+1}^*}{\Delta y^2} \right]^n = R_{HS}^*, \quad (17)$$

其中

$$R_{HS}^* = \frac{1}{\Delta t \Delta x} [F_{j+1/2,k}^* - F_{j-1/2,k}^* + \Delta t(f_{j+1/2,k} - f_{j-1/2,k})]^n +$$

$$\frac{1}{\Delta t \Delta y} [G_{j,k+1/2}^* - G_{j,k-1/2}^* + \Delta t(g_{j,k+1/2} - g_{j,k-1/2})]^n.$$

式(3) ~ (5)与式(15) ~ (17)对应相减,并用式(2)和(14)得

$$\| \mathbf{u}_m^{n+1} - \mathbf{u}_m^{*n+1} \|_2 + \| \mathbf{v}_m^{n+1} - \mathbf{v}_m^{*n+1} \|_2 \leq$$

$$M(\| \mathbf{u}_m^n - \mathbf{u}_m^{*n} \|_2 + \| \mathbf{v}_m^n - \mathbf{v}_m^{*n} \|_2) \quad (18)$$

和

$$\| \mathbf{p}_m^n - \mathbf{p}_m^{*n} \|_2 \leq M_0(\| \mathbf{u}_m^n - \mathbf{u}_m^{*n} \|_2 + \| \mathbf{v}_m^n - \mathbf{v}_m^{*n} \|_2), \quad (19)$$

其中,  $M = M_0 + 1$ ,  $M_0 = C\Delta t / \min(\Delta x, \Delta y, Re\Delta x^2, Re\Delta y^2)$ ,  $C$ 是与  $\Delta t, \Delta x^2$  和  $\Delta y^2$  无关的常数. 对式(18)从  $n_l, n_l + 1, n_l + 2, \dots$  到  $n - 1$  求和得

$$\| \mathbf{u}_m^n - \mathbf{u}_m^{*n} \|_2 + \| \mathbf{v}_m^n - \mathbf{v}_m^{*n} \|_2 \leq \| \mathbf{u}_m^{n_l} - \mathbf{u}_m^{*n_l} \|_2 + \| \mathbf{v}_m^{n_l} - \mathbf{v}_m^{*n_l} \|_2 +$$

$$M_0 \sum_{j=n_l}^{n-1} (\| \mathbf{u}_m^j - \mathbf{u}_m^{*j} \|_2 + \| \mathbf{v}_m^j - \mathbf{v}_m^{*j} \|_2). \quad (20)$$

当  $\Delta t = O(\Delta x^2, \Delta y^2)$  和  $Re^{-2} \leq \Delta t$  时,对上式用离散的 Gronwall 引理得

$$\| \mathbf{u}_m^n - \mathbf{u}_m^{*n} \|_2 + \| \mathbf{v}_m^n - \mathbf{v}_m^{*n} \|_2 \leq$$

$$(\| \mathbf{u}_m^{n_l} - \mathbf{u}_m^{*n_l} \|_2 + \| \mathbf{v}_m^{n_l} - \mathbf{v}_m^{*n_l} \|_2) \exp(C\Delta t^{1/2}(n - n_l)). \quad (21)$$

当  $t_{n_l} (1 \leq l \leq L)$  是均匀地从  $t_n (1 \leq n \leq N)$  选取时,有  $(n - n_l) \leq N/(2L)$ . 如果  $L^2 = O(N)$ , 从式(19)和(21)得

$$\| \mathbf{u}_m^n - \mathbf{u}_m^{*n} \|_2 + \| \mathbf{v}_m^n - \mathbf{v}_m^{*n} \|_2 + \| \mathbf{p}_m^n - \mathbf{p}_m^{*n} \|_2 \leq$$

$$C(\sqrt{\lambda_{u(M_u+1)}} + \sqrt{\lambda_{v(M_v+1)}} + \sqrt{\lambda_{p(M_p+1)}}). \quad (22)$$

综合上述讨论得下面的结论.

**定理 2** 设  $\mathbf{u}_m^n, \mathbf{v}_m^n, \mathbf{p}_m^n$  是经典差分格式(3) ~ (5)的解向量而且  $\mathbf{u}_m^{*n}, \mathbf{v}_m^{*n}, \mathbf{p}_m^{*n}$  是简化格式(9) ~ (10)的解. 当  $\Delta t = O(\Delta x^2, \Delta y^2)$ ,  $Re^{-2} \leq \Delta t$ , 而且  $t_{n_l} (1 \leq l \leq L)$  是均匀地从  $t_n (1 \leq n \leq N)$  选取, 以及  $L^2 = O(N)$  时, 有下面的误差估计成立

$$\| \mathbf{u}_m^n - \mathbf{u}_m^{*n} \|_2 + \| \mathbf{v}_m^n - \mathbf{v}_m^{*n} \|_2 + \| \mathbf{p}_m^n - \mathbf{p}_m^{*n} \|_2 \leq$$

$$C(\sqrt{\lambda_{u(M_u+1)}} + \sqrt{\lambda_{v(M_v+1)}} + \sqrt{\lambda_{p(M_p+1)}}).$$

把式(6)与定理 2 结合得下面的结果.

**定理 3** 在定理 2 的条件下, 设  $u(x_{j+1/2}, y_k, t_n), v(x_j, y_{k+1/2}, t_n), p(x_j, y_k, t_n)$  问题(1)的精确



解在参考点的值,那么有下面的误差估计

$$|u(x_{j+1/2}, y_k, t_n) - u_{j+1/2,k}^{*n}| + |v(x_j, y_{k+1/2}, t_n) - v_{j,k+1/2}^{*n}| + |p(x_j, y_k, t_n) - p_{j,k}^{*n}| = O(\sqrt{\lambda_{u(M_u+1)}} + \sqrt{\lambda_{v(M_v+1)}} + \sqrt{\lambda_{p(M_p+1)}}), \Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2), \quad 1 \leq n \leq N.$$

注3 上述的条件  $\Delta t = O(\Delta x^2, \Delta y^2)$  和  $Re^{-2} \leq \Delta t$  是合理的. 定理2 中的条件  $L^2 = O(N)$  表明瞬像数目  $L$  与所有时间节点数目  $N$  之间的关系. 因此不需像文献[17,19]那样取所有时间节点的瞬像作为瞬像,从而减少了求特征值和特征向量的计算量. 定理2 和定理3 分别给出了简化的有限差分格式(10)及(9)的解与经典差分格式(3)~(5)和问题(I)的解之间的误差估计,它们给出了选取 POD 基数目的指南.

### 4 数值例子

本节提供后台阶流物理模型在 Reynolds 数  $Re = 10^3$  时一些数值例子,检验基于 POD 方法的有限差分格式(9)~(10)的可行性和有效性.

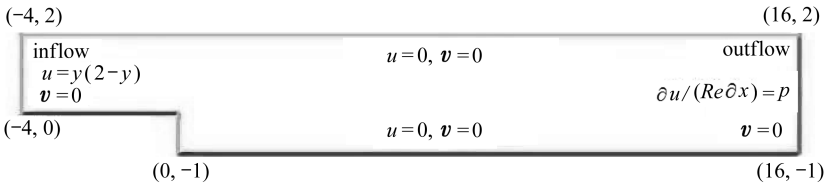


图1 后台阶计算域及其边界条件

Fig. 1 The flow region and boundary conditions of the backward facing step flow

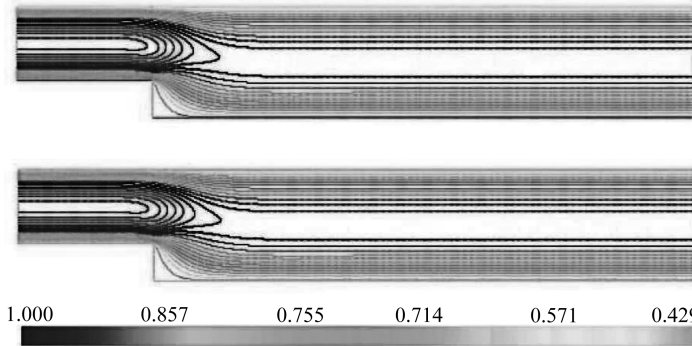


图2 当  $Re = 1\ 000$  时,用经典有限差分格式(上图:在时间  $t = 2$ ) 与简化差分格式(下图:在  $t = 2$  而且用 6 个 POD 基)求得流体速度  $u$  的分量  $u$  比较

Fig. 2 When  $Re = 1\ 000$ , comparison of component  $u$  of the velocity  $u$  between classical FD scheme (top panel: at the time level  $t = 2$ ) and reduced FD scheme (bottom panel: at the time level  $t = 2$  with 6 POD bases)

设后台阶流物理模型的计算域  $\Omega$  如图 1 所示. 除了入流速度  $u = (u, v) = (y(2 - y), 0)$  和流出速度  $u = (u, v)$  满足  $v = 0$  和  $\partial u / (Re \partial x) = p$  外,所有的初始条件和本节条件以及  $f = (f, g)$  都取零向量  $0$ . 取  $\Delta x = \Delta y = 10^{-2}$ . 为了使得  $\Delta t = O(\Delta x^2, \Delta y^2)$  满足,取时间步长  $\Delta t = 10^{-4}$ .

当  $Re = 10^3$  时,用经典有限差分格式(3)~(5) 求出时间  $t = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 2$  的 20 个数值解(即瞬像). 通过计算得到特征值满足  $\sqrt{\lambda_{u7}} + \sqrt{\lambda_{v7}} + \sqrt{\lambda_{p7}} \leq 3 \times 10^{-4}$ . 当  $t = 2$  而且  $Re = 10^3$  时,取前 6 个 POD 基,用基于 POD 方法的有限差分格式(10)及(9)得的解分别画在图 2 至图 4 的底部. 而当  $t = 2$  而且  $Re = 10^3$  时,用经典有限差分格式(3)~(5) 求出解分别画在图 2 至图 4 的顶部. 图 2 至图 4 中各两个图几乎很相似的,而且基于 POD 方法的简化格式的解似



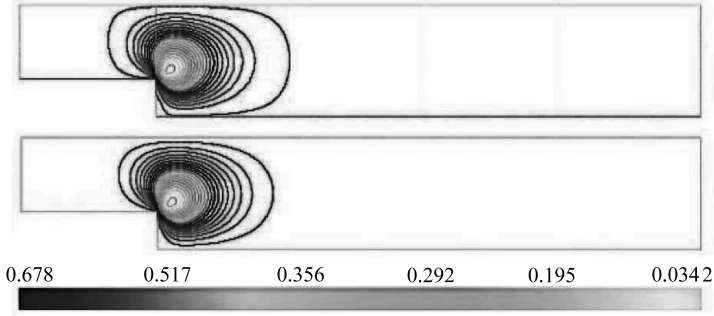


图3 当  $Re = 1\ 000$  时,用经典有限差分格式(上图:在时间  $t = 2$ ) 与简化差分格式(下图:在  $t = 2$  而且用 6 个 POD 基)求得流体速度  $\mathbf{u}$  的分量  $v$  比较  
 Fig.3 When  $Re = 1\ 000$ , comparison of component  $v$  of the velocity  $\mathbf{u}$  between the classical FD scheme (top panel; at the time level  $t = 2$ ) and reduced FD scheme (bottom panel; at the time level  $t = 2$  with 6 POD bases)

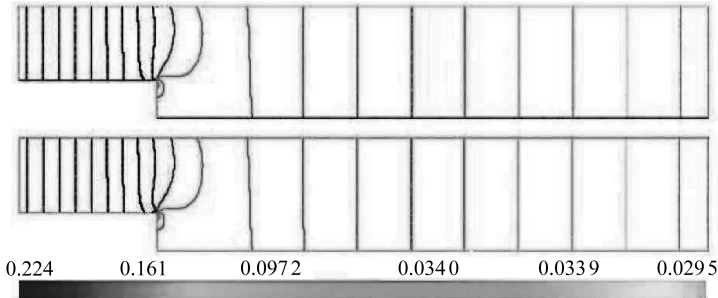


图4 当  $Re = 1\ 000$  时,用经典有限差分格式(上图:在时间  $t = 2$ ) 与简化差分格式(下图:在  $t = 2$  而且用 6 个 POD 基)求得流体压力  $p$  比较  
 Fig.4 When  $Re = 1\ 000$ , comparison of the pressure  $p$  between the classical FD scheme (top panel; at the time level  $t = 2$ ) and reduced FD scheme (bottom panel; at the time level  $t = 2$  with 6 POD bases)

乎更好(似乎归因于用了 6 个初值,即 6 个 POD 基,这是一个尚未解决的问题)。

图 5 是在  $t = 2$  时,用经典的有限差分格式(3) ~ (5)得到的解与分别用不同的 POD 基数时对应的 POD 简化差分格式(10)及(9)得到的解的误差图。当  $Re = 10^3$  时,比较经典有限差分格式(3) ~ (5)与包含 6 个 POD 基的简化差分格式运行  $2 \times 10^4$  次,用经典有限差分格式(3) ~ (5)需要的运行时间是 18 min,而用含有 6 个 POD 基的简化差分格式(10)及(9)仅用 9 s。也就是说,用经典有限差分格式(3) ~ (5)需要运行时间是包含 6 个 POD 基的简化差分格式(10)及(9)所需运行时间的 120 倍,而它们的解之间误差不超过  $3 \times 10^{-4}$ 。虽然我们的数值例子是用由经典的差分格式(3) ~ (5)已经求出的数值解作为瞬像,但是当我们去计算实际问题时,我们可以通过实验抽样,并用插值或资料同化去构造瞬像,再求出 POD 基,而不需去解经典的有限差分格式。这样,计

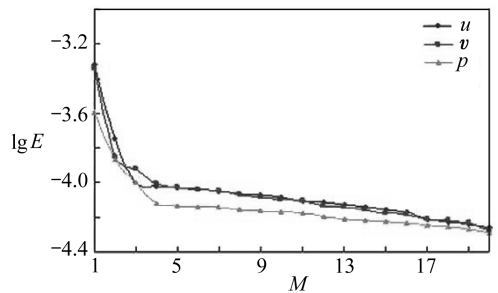


图5 当  $t = 2$  和  $Re = 1\ 000$  时,经典有限差分分解与取不同 POD 基数简化差分格式解之间误差图

Fig.5 Error for  $Re = 1\ 000$  when POD basis is different and at the time level  $t = 2$

算过程中的计算时间及内存要求就能大大地减少。这就表明了用基于 POD 方法的简化差分格式(10)及(9)求解非定常 Stokes 方程的数值解是有效和很可靠的。而且数值例子的结果与理论结果是相吻合的。

## 5 结论和展望

本文利用 SVD 方法和 POD 技术导出了非定常 Stokes 方程的一种简化的有限差分格式。我们首先解由经典的有限差分格式得到方程组求出瞬时解构成瞬像集合,而在实际应用中,人们可以从物理系统的运行轨迹实验中抽取样本,由插值或资料同化得到瞬像集合。接着,用 SVD 处理瞬像集合获得 POD 基。然后,将经典有限差分格式的未知量用 POD 基的线性组合代替导出非定常 Stokes 方程的一个简化有限差分格式。我们导出了与特征值、时间步长及空间步长有关的误差估计,可用于指导我们在实际计算中,对最初 POD 基数目的选取。通过比较理论误差与数值计算的误差表明:理论结果与数值计算的结果是相吻合的,这样,验证了基于 POD 方法的简化有限差分格式的可行性和有效性。未来在这个领域的研究工作是推广简化有限差分格式的应用,把这种方法用于实际空气质量预报和更复杂的偏微分方程的数值模拟中去。

致谢 感谢审稿人提出的宝贵建议。

## 参考文献:

- [1] Brezzi F, Douglas J. Stabilized mixed method for the Stokes problem[J]. *Numer Math*, 1988, **53**(1/2): 225-235.
- [2] Douglas J, Wang J P. An absolutely stabilized finite element method for the Stokes problem [J]. *Math Comp*, 1989, **52**(186): 495-508.
- [3] Chung T. *Computational Fluid Dynamics* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [4] Holmes P, Lumley J L, Berkooz G. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [5] Fukunaga K. *Introduction to Statistical Pattern Recognition* [M]. Boston: Academic Press, 1990.
- [6] Jolliffe I T. *Principal Component Analysis* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
- [7] Crommelin D T, Majda A J. Strategies for model reduction: comparing different optimal bases[J]. *J Atmos Sci*, 2004, **61**(17): 2206-2217.
- [8] Majda A J, Timofeyev I, Vanden-Eijnden E. Systematic strategies for stochastic mode reduction in climate[J]. *J Atmos Sci*, 2003, **60**(14): 1705-1722.
- [9] Selten F. Baroclinic empirical orthogonal functions as basis functions in an atmospheric model[J]. *J Atmos Sci*, 1997, **54**(16): 2099-2114.
- [10] Lumley J L. Coherent structures in turbulence [C]//Meyer R E ed. *Transition and Turbulence*. New York: Academic Press, 1981: 215-242.
- [11] Aubry Y N, Holmes P, Lumley J L, Stone E. The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer[J]. *J Fluid Mech*, 1988, **192**: 115-173.
- [12] Sirovich L. Turbulence and the dynamics of coherent structures: part I - III [J]. *Quart Appl*

- Math*, 1987, **45**(3): 561-590.
- [13] Joslin R D, Gunzburger M D, Nicolaidis R A, Erlebacher G, Hussaini M Y. A self-contained automated methodology for optimal flow control validated for transition delay[J]. *AIAA J*, 1997, **35**(5): 816-824.
- [14] Ly H V, Tran H T. Proper orthogonal decomposition for flow calculations and optimal control in a horizontal CVD reactor[J]. *Quart Appl Math*, 2002, **60**(4): 631-656.
- [15] Moin P, Moser R D. Characteristic-eddy decomposition of turbulence in channel[J]. *J Fluid Mech*, 1989, **200**: 417-509.
- [16] Rajae M, Karlsson S K F, Sirovich L. Low dimensional description of free shear flow coherent structures and their dynamical behavior[J]. *J Fluid Mech*, 1994, **258**: 1401-1402.
- [17] Kunisch K, Volkwein S. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems[J]. *Numer Math*, 2001, **90**(1): 117-148.
- [18] Kunisch K, Volkwein S. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for a general equation in fluid dynamics[J]. *SIAM J Numer Anal*, 2002, **40**(2): 492-515.
- [19] Kunisch K, Volkwein S. Control of Burgers' equation by a reduced order approach using proper orthogonal decomposition[J]. *J Optim Theory Appl*, 1999, **102**(2): 345-371.
- [20] Ahlman D, Södelund F, Jackson J, Kurdila A, Shyy W. Proper orthogonal decomposition for time-dependent lid-driven cavity flows[J]. *Numer Heat Transfer Part B: Fund*, 2002, **42**(4): 285-306.
- [21] Luo Z D, Wang R W, Zhu J. Finite difference scheme based on proper orthogonal decomposition for the non-stationary Navier-Stokes equations[J]. *Sci China, Ser A: Math*, 2007, **50**(8): 1186-1196.
- [22] Luo Z D, Chen J, Zhu J, Wang R, Navan I M. An optimizing reduced order FDS for the tropical Pacific Ocean reduced gravity model[J]. *I J Numer Methods Fluids*, 2007, **55**(2): 143-161.
- [23] Luo Z D, Chen J, Navon I M, Yang X Z. Mixed finite element formulation and error estimates based on proper orthogonal decomposition for the non-stationary Navier-Stokes equations[J]. *SIAM J Numer Anal*, 2008, **47**(1): 1-19.
- [24] Luo Z D, Chen J, Sun P, Yang X Z. Finite element formulation based on proper orthogonal decomposition for parabolic equations[J]. *Sci China, Ser A: Math*, 2009, **52**(3): 585-596.
- [25] Sun P, Luo Z D, Zhou Y J. Some reduced finite difference schemes based on a proper orthogonal decomposition technique for parabolic equations[J]. *Appl Numer Math*, 2010, **60**(1/2): 154-164.
- [26] Volkwein S. Optimal control of a phase-field model using the proper orthogonal decomposition[J]. *ZFA Math Mech*, 2001, **81**(2): 83-97.
- [27] Antoulas A. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [28] Stewart G W. *Introduction to Matrix Computations*[M]. New York: Academic Press, 1973.
- [29] Noble B. *Applied Linear Algebra*[M]. Englewood Clis: Prentice-Hall, 1969.
- [30] Girault V, Raviart P A. *Finite Element Approximations of the Navier-Stokes Equations, Theorem and Algorithms*[M]. New York: Springer-Verlag, 1986.

# A Reduced Finite Difference Scheme and Error Estimates Based on POD Method for the Non-Stationary Stokes Equation

LUO Zhen-dong<sup>1</sup>, OU Qiu-lan<sup>1</sup>, XIE Zheng-hui<sup>2</sup>

(1. *School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, P. R. China;*

2. *ICCES/LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, P. R. China*)

**Abstract:** The proper orthogonal decomposition (POD) was a model reduction technique for the simulation of physical processes governed by partial differential equations, e. g. fluid flows. It was successfully used in the reduced-order modeling of complex systems. The applications of POD method were extended, i. e. , apply POD method to a classical finite difference (FD) scheme for the non-stationary Stokes equation with real practical applied background, establish a reduced FD scheme with lower dimensions and sufficiently high accuracy, and provide the error estimates between the reduced FD solutions and the classical FD solutions. Some numerical examples illustrate the fact that the results of numerical computation are consistent with theoretical conclusions. Moreover, it is shown that the reduced FD scheme based on POD method is feasible and efficient for solving FD scheme for the non-stationary Stokes equation.

**Key words:** finite difference scheme; proper orthogonal decomposition; error estimate; non-stationary Stokes equation