文章编号:1000-0887(2011)07-0821-05

扩展形式的修正的 Kadomtsev-Petviashvili 方程的多重峰波*

A·M·瓦日瓦日

(圣·泽维尔大学 数学系,芝加哥,IL 60655,美国)

摘要: 研究修正的 Kadomtsev-Petviashvili(mKP)方程的一个扩展形式. 使用由 Hereman 和 Nuseir 提出的、一个可以信赖的、Hirota 双线性法的简化形式. 由该方程(这里称为 mKP 方程)直接导出多重峰波解. 研究还表明,扩展项并不会破坏 mKP 方程的可积性.

关 键 词: 修正的 Kadomtsev-Petviashvili(mKP)方程; 扩展的 mKP 方程; 多重峰波

中图分类号: O175.29 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.07.006

1 引言和预备知识

孤立波是由非线性和线性色散平衡引起的、一个重要的非线性特征. 对各种可积的非线性发展方程[1-7],孤立波的相互作用完全是弹性的,即在发生非线性碰撞后,孤立波在某种意义上仍能保留其原来的波幅、波速和波形. 然而,对另一些可积方程,可能出现非弹性波的相互作用,可能发生波的分裂和融合,Burgers 方程正是这样一类方程. 这就是说,波在相互作用期间[1-7],几个孤立波能够融合成一个孤立波,相反,一个孤立波也能够分裂成几个孤立波. 当峰波解能够表达为一个指数的有理函数时,这样两个非弹性相互作用模型都可能出现.

可用很多有效的方法[8-14],来检查非线性发展方程的完全可积性,并由此导出多重孤立波解. 在该领域中惯常使用的方法有,代数几何法、逆散射法、Bäcklund 变换法、Painlevé 解析法、Darboux 变换法、Hirota 双线性法以及其他方法. Hirota 的双线性法是颇具启发式的研究,并有着显著的特点,它能为一大类非线性发展方程,使用直接法确定多重孤立波解[3-11]. Hereman 等[11]提出了一种双线性法的简化形式,为计算工作带来了方便. 计算机符号系统,如像 Maple 和 Mathematica,可以用来克服冗长乏味的计算.

修正的 Kadomtsev-Petviashvili(mKP)方程[1-7]为

$$4v_t + v_{xxx} - 6v^2 v_x + 6v_x \partial_x^{-1} v_y + 3\partial_x^{-1} v_{yy} = 0. \tag{1}$$

在一个非等温电子的等离子体中,研究离子声波传播方程[1-7],导出本文的 mKP 方程(1). 该方程可以描述多种温度电子等离子体中不同孤立波的发展,将其中存在碰撞较少的多元等离子体称为冷离子,同时,两种温度的电子以两种 Boltzmann 关系的形式,呈现出不同的

* 收稿日期: 2010-12-31; 修订日期: 2011-04-14
作者简介: A. M. Wazwaz,教授,博士(E-mail: wazwaz@sxu.edu).
本文原文为英文,由吴承平 译,张禄坤 校.

Maxwell 分布[7]. 此外,当非线性程度高于 KP 方程[2]时,mKP 方程(1)描述 (x,y) 平面中的水波方程. 注意到,当 $v_y=0$ 时,方程(1)归并为修正的 KdV 方程.

目前有相当数量的研究工作属于扩展形式的非线性发展方程. 研究的重点集中在,附加项对色散关系的影响、可积性、孤立波的波幅,以及其它现有的现象,这些现象对所得到解的结构和性质,显示出某些影响.

在这些工作的基础上,我们将研究如下定义的 mKP 方程(1)的一个扩展形式:

$$4v_t+v_{xxx}-6v^2v_x+6v_x\partial_x^{-1}v_y+3\partial_x^{-1}v_{yy}+4\alpha v_y+4\beta v_x=0, \tag{2}$$

其中, α,β 为任意常数. 该 mKP 方程的扩展形式,是由 mKP 方程(1)附加 $4\alpha v_x$ 和 $4\beta v_y$ 项后得到,其中 v_x 和 v_y 分别为 x 和 y 方向的势.

本研究有着双重目的. 首先,目的是导出多重孤立波解,只要确定扩展模型(2)的可积性. 其次,表明附加项并不会影响 mKP 方程(1)的可积性,但是会改变 mKP 方程的色散关系. Hereman 等[11]将 Cole-Hopf 变换与 Hirota 法的简化形式相结合, 达到了本研究所设置的上述两个目标. 本文的目的是, 研究这些附加项对该方程可积性的影响, 对所得到孤立波色散关系的影响.

我们分析的主要工具是,Hereman 和 Nuseir [11]提出的简化形式的 Hirota 双线性法. 该方法的显著优点在于,需要使用 Hirota 直接法时,可以直接应用,无需过问所设置双线性的形式. 还有一些其他方法,如逆散射法、Hirota 法等等,都需要做一些冗长乏味的工作. 该简化形式可以直接应用,没有任何其他的特别要求. 文献[11-14]证明了该方法是可靠的、有效的,而且是高效的. 利用非线性方程的线性项也可以导出色散关系. 此外,应用该简化形式,我们很容易直接地导出标准的孤立波解和奇异的孤立波解.

2 修正 Kadomtsev-Petviashvili 方程的扩展形式

本节将研究由式(2)定义的 mKP 方程的一个扩展形式. 取势

$$v=u_x, \tag{3}$$

式(2)可改写为

$$4u_{xt}+u_{xxxx}-6(u_x^2-u_y)u_{xx}+3u_{yy}+4\alpha u_{xy}+4\beta u_{xx}=0. \tag{4}$$

将

$$u(x,y,t)=e^{\theta_i},\ \theta_i=k_ix+r_iy-c_it \tag{5}$$

代入式(4)的线性项,得到色散关系:

$$c_i=\frac{k_i^4+3r_i^2+4\alpha k_ir_i+4\beta k_i^2}{4k_i}, \tag{6}$$

结果,得到

$$\theta_i=k_ix+r_iy-\frac{k_i^4+3r_i^2+4\alpha k_ir_i+4\beta k_i^2}{4k_i}t. \tag{7}$$

由 Cole-Hopf 变换法,假设式(2)的多重峰波解为

$$v(x,y,t)=R(\ln f)_x=Rf_x/f, \tag{8}$$

由此得到

$$u(x,y,t)=R\ln f(x,y,t), \tag{9}$$

其中单个峰波解[11]的辅助函数 $f(x,y,z)$ 由下式给出:

$$f(x,y,t)=1+e^{\theta_1}=1+e^{k_1x+r_1y-(k_1^4+3r_1^2+4\alpha k_1r_1+4\beta k_1^2)t/(4k_1)}. \tag{10}$$

将式(9)代入式(4),并解出 R 和 r_1,得到

$$R = 1,\ r_1 = k_1^2. \tag{11}$$

立即给出

$$\begin{cases} R = 1, \\ r_i = k_i^2, \\ c_i = k_i^3 + \alpha k_i^2 + \beta k_i, \\ \theta_i(x,y,t) = k_i x + k_i^2 y - (k_i^3 + \alpha k_i^2 + \beta k_i)t, \end{cases} \tag{12}$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant N$. 意味着单峰波解的辅助函数为

$$f(x,y,t) = 1 + e^{\theta_1} = 1 + e^{k_1x+k_1^2y-(k_1^3+\alpha k_1^2+\beta k_1)t}. \tag{13}$$

将式(13)代入式(9),得到

$$u(x,y,t) = \ln(1 + e^{k_1x+k_1^2y-(k_1^3+\alpha k_1^2+\beta k_1)t}), \tag{14}$$

因此,由式(3),得到单峰波解

$$v(x,y,t) = \frac{k_1 e^{k_1x+k_1^2y-(k_1^3+\alpha k_1^2+\beta k_1)t}}{1 + e^{k_1x+k_1^2y-(k_1^3+\alpha k_1^2+\beta k_1)t}}. \tag{15}$$

假设双峰波解的辅助函数为

$$f(x,y,t) = 1 + e^{k_1x+k_1^2y-(k_1^3+\alpha k_1^2+\beta k_1)t} + e^{k_2x+k_2^2y-(k_2^3+\alpha k_2^2+\beta k_2)t} + a_{12}e^{(k_1+k_2)x+(k_1^2+k_2^2)y-(k_1^3+k_2^3+\alpha(k_1^2+k_2^2)+\beta(k_1+k_2))t}. \tag{16}$$

将式(16)代入式(8),并将所得到的结果代入式(4),出现相移

$$a_{12} = 0, \tag{17}$$

因此,假设

$$a_{ij} = 0, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant 3. \tag{18}$$

将式(17)和(16)代入式(8),得到

$$u(x,y,t) = \ln(1 + e^{k_1x+k_1^2y-(k_1^3+\alpha k_1^2+\beta k_1)t} + e^{k_2x+k_2^2y-(k_2^3+\alpha k_2^2+\beta k_2)t}), \tag{19}$$

依次,由式(3),得到双峰波解为

$$v(x,y,t) = \frac{k_1 e^{k_1x+k_1^2y-(k_1^3+\alpha k_1^2+\beta k_1)t} + k_2 e^{k_2x+k_2^2y-(k_2^3+\alpha k_2^2)}}{1 + e^{k_1x+k_1^2y-(k_1^3+\alpha k_1^2+\beta k_1)t} + e^{k_2x+k_2^2y-(k_2^3+\alpha k_2^2+\beta k_2)t}}. \tag{20}$$

假设 3 峰波解的辅助函数为

$$f(x,y,t) = 1 + e^{k_1x+k_1^2y-(k_1^3+\alpha k_1^2+\beta k_1)t} + e^{k_2x+k_2^2y-(k_2^3+\alpha k_2^2+\beta k_2)t} + e^{k_3x+k_3^2y-(k_3^3+\alpha k_3^2+\beta k_3)t}. \tag{21}$$

与前面一样,找到

$$u(x,y,t) = \ln(1 + e^{k_1x+k_1^2y-k_1^3t} + e^{k_2x+k_2^2y-k_2^3t} + e^{k_3x+k_3^2y-k_3^3t}), \tag{22}$$

结果,由式(3),得到 3 峰波解为

$$u(x,y,t) = \frac{k_1e^{K_1} + k_2e^{K_2} + k_3e^{K_3}}{1 + e^{K_1} + e^{K_2} + e^{K_3}}, \tag{23}$$

其中

$$K_i = k_ix + k_i^2y - (k_i^3 + \alpha k_i^2 + \beta k_i)t, \qquad i = 1,\ 2,3.$$

这说明,mKP 系列方程的扩展形式是完全可积的,且对有限的 $N(N \geqslant 1)$,根据 $v(x,y,t)$,可以确定 N 个孤立波解. 附加的扩展项,不会破坏 mKP 系列方程的可积性. 因此,附加项对色散关系的影响,由附加项 $\alpha k_i^2 + \beta k_i$ 对 mKP 方程(1)的标准色散关系反映.

在上面所得结果的基础上，可以设定全部峰波解为

$$v(x,y,t)=\sum_{i=1}^{N}k_i e^{K_i}\Big/\left(1+\sum_{i=1}^{N}e^{K_i}\right). \tag{24}$$

因此，若设 $\alpha=0,\beta=0$，即可以得到 mKP 系列方程(1)的全部峰波解：

$$v(x,y,t)=\sum_{i=1}^{N}k_i e^{k_i x+k_i^2 y-k_i^3 t}\Big/\left(1+\sum_{i=1}^{N}e^{k_i x+k_i^2 y-k_i^3 t}\right). \tag{25}$$

该结果与文献[1]的结果相一致.

2.1 多重的单个峰波解

如前所述，我们可以很容易地得到单个峰波解. 为简便起见，本文仅讨论单个峰波解.

单个单峰波解为

$$v(x,y,t)=-\frac{k_1 e^{K_1}}{1-e^{K_1}}. \tag{26}$$

两个单峰波解为

$$v(x,y,t)=-\frac{k_1 e^{K_1}+k_2 e^{K_2}}{1-e^{K_1}-e^{K_2}}. \tag{27}$$

对 3 个单峰波解，有

$$f(x,y,t)=1-e^{k_1x+k_1^2y-k_1^3t}-e^{k_2x+k_2^2y-k_2^3t}-e^{k_3x+k_3^2y-k_3^3t}. \tag{28}$$

和前面一样，我们找到

$$u(x,y,t)=\ln(1-e^{k_1x+k_1^2y-k_1^3t}-e^{k_2x+k_2^2y-k_2^3t}-e^{k_3x+k_3^2y-k_3^3t}), \tag{29}$$

结果，3 个单峰波解为

$$u(x,y,t)=-\frac{k_1 e^{K_1}+k_2 e^{K_2}+k_3 e^{K_3}}{1-e^{K_1}-e^{K_2}-e^{K_3}}. \tag{30}$$

可以设置全部单峰波解为

$$v(x,y,t)=-\sum_{i=1}^{N}k_i e^{K_i}\Big/\left(1-\sum_{i=1}^{N}e^{K_i}\right). \tag{31}$$

若设 $\alpha=0,\beta=0$，由 mKP 方程(1)的单孤立波解，得到全部单峰波解

$$v(x,y,t)=-\sum_{i=1}^{N}k_i e^{k_i x+k_i^2 y-k_i^3 t}\Big/\left(1-\sum_{i=1}^{N}e^{k_i x+k_i^2 y-k_i^3 t}\right). \tag{32}$$

3 讨　　论

本文研究了 mKP 系列方程的一个扩展形式，直接导出了多重峰波解和多重奇异峰波解. 解析地确定了该方程的可积性，还清楚地表明，扩展项并不影响 mKP 方程的可积性. 不过，扩展项对色散关系有影响，并造成该峰波解结构的改变. 分析表明，由于自相似的对称性，所研究的 mKP 方程，给出了 N-峰波解和 N-奇异的峰波解.

感谢　作者感谢审稿人提出的有益意见.

参考文献：

[1] SUN Zhi-yuan, GAO Yi-tian, YU Xin, MENG Xiang-hua, LIU Ying. Inelastic interactions of the multiple-front waves for the modified Kadomtsev-Petviashvili equation in fluid dynamics, plasma physics and electrodynamics[J]. *Wave Motion*, 2009, **46**(8): 511-521.

[2] Bo1 R, JI Lin. A new (2+1)-dimensional integrable equation[J]. *Communications in Theo-*

retical Physics, 2009, **51**(1): 13-16.

[3] Mulase M. Solvability of the super KP equation and a generalization of the Birkhoff decomposition[J]. *Inventiones Mathematicae*, 1988, **92**(1): 1-46.

[4] Ablowitz M J, Clarkson P A. *Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[5] Clarkson P A. The Painlevé property, a modified Boussinesq equation and a modified Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. *Physica D: Nolinear Phenomena*, 1986, **19**(3): 447-450.

[6] WANG Song, TANG Xiao-yan, LOU Sen-yue. Soliton fission and fusion: Burgers equation and Sharma-Tasso-Olver equation[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, **21**(1): 231-239.

[7] Das G C, Sarma J. Evolution of solitary waves in multicomponent plasmas[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1998, **9**(6): 901-911.

[8] Hirota R, Ito M. Resonance of solitons in one dimension[J]. *Journal of Physical Society of Japan*, 1983, **52**(3): 744-748.

[9] Hirota R. *The Direct Method in Soliton Theory*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[10] Hietarinta J. A search for bilinear equations passing Hirota's three-soliton condition—Ⅱ: mKdV-type bilinear equations[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1987, **28**(9): 2094-2101.

[11] Hereman W, Nuseir A. Symbolic methods to construct exact solutions of nonlinear partial differential equations[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 1997, **43**(1): 13-27.

[12] Wazwaz A M. Multiple kink solutions and multiple singular kink solutions for the (2+1)-dimensional Burgers equations[J]. *Applied Mathematics Computation*, 2008, **204**(2): 817-823.

[13] Wazwaz A M. Multiple soliton solutions and multiple singular soliton solutions for the (3+1)-dimensional Burgers equations[J]. *Applied Mathematics Computation*, 2008, **204**(2): 942-948.

[14] Wazwaz A M. Multiple kink solutions and multiple singular kink solutions for two systems of coupled Burgers' type equations[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 2009, **14**(7): 2962-2970.

Multiple-Front Waves for Extended Form of Modified Kadomtsev-Petviashvili Equation

Abdul-Majid Wazwaz

(*Department of Mathematics, Saint Xavier University, Chicago, IL* 60655, *USA*)

Abstract: An extended form of the modified Kadomtsev-Petviashvili (mKP) equation was investigated. The simplified form of Hirota's bilinear method established by Hereman and Nuseir was employed for a reliable study. Multiple-front waves solutions were formally derived for this equation, and hence to the mKP equation. That also shows that the extension terms do not kill the integrability of the mKP equation.

Key words: modified Kadomtsev-Petviashvili equation; extended mKP; multiple-front waves