

静脉壁的力学特性及负压失稳问题*

任九生

(上海市力学在能源工程中的应用重点实验室,上海大学 力学系,上海 200444)

摘要: 应用一类超弹性应变能函数,通过非线性弹性理论,研究了静脉壁在跨壁压及轴向拉伸联合作用下的变形和应力分布等力学特性,并分析了静脉壁的负压失稳问题.首先利用超弹性材料薄壁圆筒模型,得到了静脉壁在跨壁压及轴向拉伸联合作用下的变形方程,给出了正常静脉压下静脉壁的变形曲线和应力分布曲线,讨论了静脉壁的变形和应力分布规律.然后给出了负跨壁压下静脉壁的变形曲线,并由能量比较讨论了静脉壁的负压失稳问题.

关键词: 静脉壁; 超弹性应变能函数; 变形和应力; 负压失稳

中图分类号: O343 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.07.009

引言

静脉是人类和动物心血管系统的重要组成部分,是血液回到心脏的通道,其血容量占人体总血容量的75%以上,起着血液储存库的作用,还有调节血液分配的功能^[1].总之,静脉参加复杂的心血管活动并影响着血液循环.当其所受血管跨壁压(血管壁内外的压力差)为负,即内压小于外压时,静脉壁往往发生负压失稳,并有可能引起静脉血流发生异常现象而引起严重的心血管疾病^[2-3].常见的静脉疾病有深静脉血栓及深静脉功能不全,患者可能并发静脉血栓栓塞或致命性肺梗塞.静脉疾病和其他心血管疾病的发病率逐年上升,已成为人口死亡或残疾的主要原因^[1-3].

正常静脉壁由内膜、中膜和外膜3层组成,但内弹性层不完整,中膜和外膜层分界不明显^[4].和正常动脉壁相比,静脉管壁较薄,管壁的弹性模量很小^[4-5].目前关于静脉壁力学特性的国内外文献非常稀少,且已有文献多分析作为动脉的静脉移植问题^[1,6-7].静脉壁一般简化为均匀材料单层圆筒模型,其应变能函数形式上主要有指数型及对数型^[8-11],但这些应变能函数均不能描述静脉壁的负压失稳问题.

本文应用 Desch 等提出的一类超弹性应变能函数^[1],通过非线性弹性理论研究了正常静脉压下静脉壁的变形和应力分布等力学特性,并通过能量曲线分析了静脉壁的负压失稳问题.首先利用超弹性材料薄壁圆筒模型得到了静脉壁在跨壁压及轴向拉伸联合作用下的变形方程,经过数值计算给出了正常静脉压下静脉壁的变形曲线和应力分布曲线,讨论了正常静脉压

* 收稿日期: 2010-12-24; 修订日期: 2011-04-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772104;10872045);上海市教委科研创新项目(09YZ12);上海市重点学科建设资助项目(S30106)

作者简介: 任九生(1970—),男,副教授,博士(E-mail:jsren@shu.edu.cn).

下静脉壁的变形和应力分布规律,结果表明正常静脉压下静脉壁的变形是均匀单调的,然后给出负跨壁压下静脉壁的变形曲线,结果表明静脉壁的变形不再是单调的,存在稳定性问题,并由能量曲线讨论了静脉壁的负压失稳问题.

1 数学描述和求解

由于管壁中残余应力的存在,从身体中切除下来处于无载荷状态的静脉壁并不处于零应力状态,张开状态才是零应力状态(如图1所示).假定静脉壁零应力状态的参考构型、无载荷状态构型、变形后构型分别由柱坐标系 (R, Θ, Z) , (ρ, ϕ, ξ) 和 (r, θ, z) 描述.

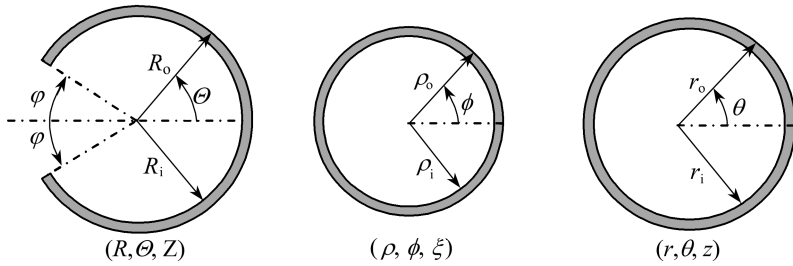


图1 静脉壁零应力状态的参考构型 (R, Θ, Z) 、无载荷状态构型 (ρ, ϕ, ξ) 和变形后构型 (r, θ, z) 示意图

Fig.1 Kinematics of the venous wall relative to the stress-free reference configuration (R, Θ, Z) , the load-free configuration (ρ, ϕ, ξ) and the current deformed configuration (r, θ, z) , respectively

零应力状态构型中静脉壁所占几何区域为

$$R_i \leq R \leq R_o, 0 \leq \Theta \leq 2(\pi - \varphi), 0 \leq Z \leq L, \quad (1)$$

式中, R_i, R_o, φ, L 分别表示变形前静脉壁的内外半径、张开角和长度. 变形后构型中静脉壁所占几何区域为

$$r_i \leq r \leq r_o, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq l, \quad (2)$$

式中, r_i, r_o, l 分别表示变形后静脉壁的内外半径和长度. 静脉壁受跨壁压和轴向拉伸作用的变形模式为

$$r = r(R) > 0, \theta = k\Theta, z = \lambda_z Z, \quad (3)$$

式中, $r(R)$ 为待定函数, $k = \pi / (\pi - \varphi)$ 为静脉壁张开角的度量, λ_z 为静脉壁的轴向伸长比. 静脉壁相应于式(3)的变形主伸长比分别为

$$\lambda_r = \frac{\partial r}{\partial R}, \lambda_\theta = \frac{r}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} = k \frac{r}{R}, \lambda_z = \frac{l}{L}. \quad (4)$$

对静脉壁采用由 Desch 和 Weizsacker 提出的如下形式的应变能函数^[11]:

$$W = \frac{C_{el}}{\lambda_{el,max} - \lambda_z - C_{inel}(\lambda_{\theta,max} - \lambda_\theta)^{-1}}, \quad (5)$$

式中, $C_{el}, \lambda_{el,max}, \lambda_{\theta,max}, C_{inel}$ 为材料参数. 相应的非零 Cauchy 应力分量分别为

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta}(R) = -p_0 + \frac{C_{el}\lambda_\theta}{(\lambda_{el,max} - \lambda_z - C_{inel}(\lambda_{\theta,max} - \lambda_\theta)^{-1})^2}, \\ \sigma_{zz}(R) = -p_0 + \frac{C_{el}C_{inel}\lambda_z}{(\lambda_{el,max} - \lambda_z - C_{inel}(\lambda_{\theta,max} - \lambda_\theta)^{-1})^2(\lambda_{\theta,max} - \lambda_\theta)^2}, \end{cases} \quad (6)$$

式中 p_0 为静水压力常数, 径向应力分量忽略不计. 管壁无体积力作用下的平衡方程为

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dR} + \frac{\dot{r}(R)}{r(R)}[\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}] = 0, \quad (7)$$

式中 $\dot{r}(R) = dr(R)/dR$. 管壁受跨壁压作用的边界条件为(考虑血管的管壁力学问题时, 血液流动的作用可简化为管壁受到的跨壁压^[12-13])

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -p_1, & R = R_i, \\ \sigma_{rr} = -p_2, & R = R_o, \end{cases} \quad (8)$$

式中, p_1 为管壁内压, p_2 为管壁外压.

由于含有大量的水分, 血管在许多条件下均表现出不可压的特性, 通常可假定为不可压材料^[12-13]. 由材料的不可压缩条件 $\lambda_r \lambda_\theta \lambda_z = 1$, 有

$$r(R) = \left(\frac{1}{k\lambda_z} (R^2 - R_i^2) + r_i^2 \right)^{1/2}, \quad (9)$$

于是

$$\lambda_\theta = k \left(\frac{1}{k\lambda_z} \left(1 - \frac{R_i^2}{R^2} \right) + \frac{r_i^2}{R^2} \right)^{1/2}. \quad (10)$$

由式(9)可得

$$\dot{r}(R) = \frac{R}{k\lambda_z r(R)}. \quad (11)$$

将应力分量(6)和式(11)代入方程(7), 并利用条件(8)对半径 R 从内壁 R_i 开始积分, 可得

$$p_1 - p_2 = \int_{R_i}^{R_o} \frac{R}{k\lambda_z r^2(R)} \sigma_{\theta\theta} dR. \quad (12)$$

对给定的跨壁压 $p_1 - p_2$, 由式(12)可得对应的变形后的管壁内径, 于是就可描述管壁的变形情况, 并由式(6)和(10)可得管壁中应力分布情况.

2 正常静脉压下的变形和应力

由式(12)给出的正常静脉压下, 对应不同轴向拉伸的静脉壁的变形曲线如图2所示; 由

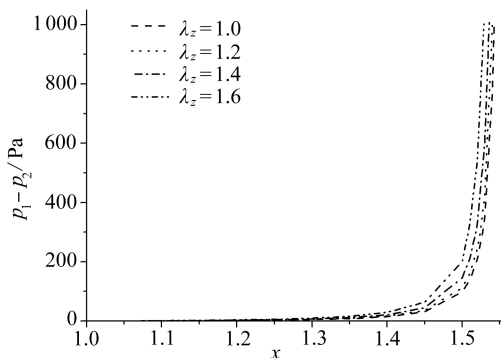


图2 静脉壁的变形曲线

Fig. 2 Deformation curves for the venous wall

式(6)和(10)给出的在给定状态($\lambda_z = 1.0$, $q = 0.3$ kPa 及 $\lambda_z = 1.6$, $q = 0.3$ kPa) 下静脉壁中的应力分布如图3所示; 静脉壁内壁处应力随跨壁压(可能的血压波动)的变化如图4所示. 图中, $x = r_i/R_i$ 描述管壁内径的变化. 计算中用到的几何参数和材料常数分别为^[1]

$$\begin{aligned} R_i &= 2.35189 \text{ mm}, & R_o &= 2.43189 \text{ mm}, \\ C_{el} &= 2099.5 \text{ Pa}, & \lambda_{el, \max} &= 2.2479, \\ \lambda_{\theta, \max} &= 1.5657, & C_{inel} &= 0.00796, \\ \varphi &= 60^\circ. \end{aligned}$$

如图2所示, 正常静脉压下静脉壁的变形曲线是单调的, 表明静脉壁的变形是均匀的, 静脉壁的口径随跨壁压的增大而增加, 并具有明显的材料强化效应. 且由图可见, 在同一跨壁压作用下静脉壁的变形随轴向拉伸的增大而减小, 表明轴向拉伸有抑制静脉壁变形的作用.

由图3和图4可见, 环向应力和轴向应力分量均随静脉壁半径的增加而减小, 它们均随

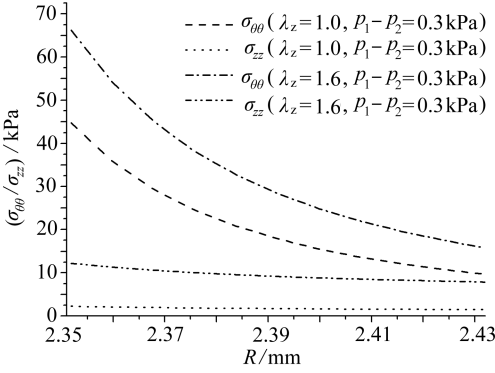


图3 静脉壁中的应力分布曲线

Fig.3 Stress distribution curves for the venous wall

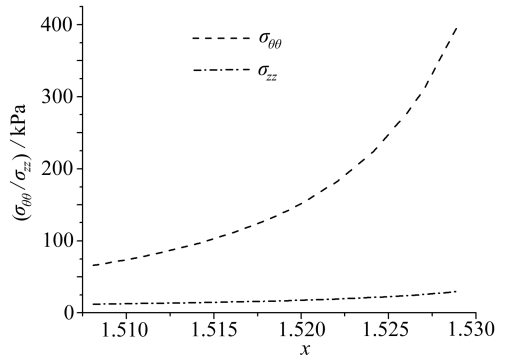


图4 内壁处的应力变化曲线 (λ_z = 1.6)

Fig.4 Variety of stresses for the venous internal wall (λ_z = 1.6)

轴向拉伸的增大而增加。同时,两个应力分量均随跨壁压的增大而增加,表明血压增高时静脉壁中应力负担增大。另外环向应力分量一般大于轴向应力分量,可见静脉壁强度决定于环向应力分量。

3 负压失稳问题

由式(12)给出的跨壁压为负,即外压大于内压情况下对应不同轴向拉伸的静脉壁的变形曲线如图5所示。由图可见,静脉壁的变形曲线不再是单调的,存在一个临界跨壁压 p_{cr} ,当跨壁压 $|p_1 - p_2| < |p_{cr}|$ 时,静脉壁的变形量随负跨壁压绝对值的增大而增加;但当跨壁压 $|p_1 - p_2| \geq |p_{cr}|$ 时,即便负跨壁压绝对值减小,静脉壁的变形量仍继续增加。此时对应于同一跨壁压值可能有两个变形值,表明在静脉壁的变形过程中存在稳定性问题。

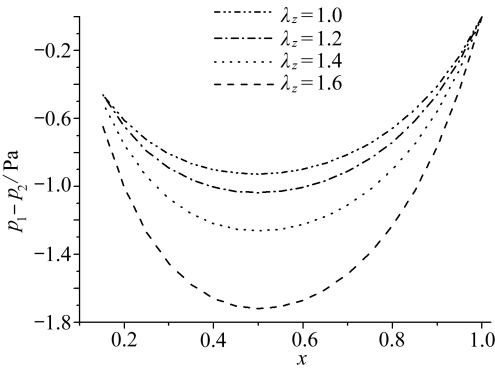


图5 静脉壁负压变形曲线

Fig.5 Deformation curves under the negative pressure for the venous wall

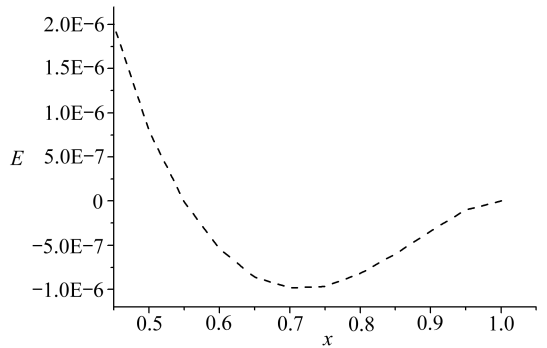


图6 静脉壁能量曲线

Fig.6 Energy curve for the venous wall

为了确定解的稳定性,需要讨论静脉壁的能量。跨壁压作用下静脉壁的总势能可写为

$$E = \int_V W dV - \int_A (p_1 - p_2) (r_i - R_i) dA = 2\pi \int_{R_i}^{R_o} R W dR - 2\pi R_i (p_1 - p_2) (r_i - R_i) . \tag{13}$$

将式(5)代入式(13),经过数值计算可得跨壁压作用下静脉壁变形后的能量曲线,跨壁压

为负, $\lambda_z = 1.0$ 时的能量曲线示于图 6. 由图可见, 当变形小于对应于临界跨壁压值 p_{cr} 的临界变形时, 即当 $|p_1 - p_2| < |p_{cr}|$ 时, 静脉壁的总势能随其变形的增长而减小, 即这个阶段的变形是稳定的, 静脉壁的变形是随着跨壁压绝对值的增大而均匀收缩; 当变形大于对应于临界跨壁压值 p_{cr} 的临界变形时, 即当 $|p_1 - p_2| \geq |p_{cr}|$ 时, 静脉壁的总势能随其变形的增长而增加, 即这个阶段的变形是不稳定的, 静脉壁塌陷, 发生失稳变形.

同时, 由图 5 可见, 静脉壁的临界跨壁压的绝对值随轴向拉伸的增大而增加, 表明在负压变形情况下, 轴向拉伸有增加静脉壁稳定性的作用. 另外, 静脉壁变形发生失稳时临界跨壁压的绝对值, 如 $p_{cr} = 0.928 \text{ Pa} (\lambda_z = 1.0)$, $p_{cr} = 1.037 \text{ Pa} (\lambda_z = 1.2)$, $p_{cr} = 1.262 \text{ Pa} (\lambda_z = 1.4)$, $p_{cr} = 1.720 \text{ Pa} (\lambda_z = 1.6)$ 均远小于正常的静脉压 $p_1 - p_2 = 0.3 \sim 1.0 \text{ kPa}$, 即在负压变形情况下, 即使负跨壁压很小, 静脉壁也很容易发生失稳变形.

静脉壁一旦发生失稳变形, 即塌陷, 就可能引起静脉壁的损伤或静脉中血流的改变, 从而形成静脉血栓, 并进而可能引起静脉功能不全或引起静脉血栓栓塞及肺梗塞等心血管疾病, 最后可能导致死亡或残疾^[1-3].

4 结 论

本文应用一类超弹性应变能函数研究了静脉壁的变形和应力等力学特性, 并分析了静脉壁的负压失稳问题. 正常静脉压下静脉壁的变形曲线和应力分布曲线表明, 正常静脉压下静脉壁的变形是均匀单调的, 静脉壁的口径随跨壁压的增大而增加, 壁中以环向应力分量为最大, 且环向和轴向应力分量均随管壁半径的增加而降低. 负跨壁压下即外压大于内压情况下, 静脉壁的变形曲线表明静脉壁的变形不再是单调的, 存在稳定性问题. 能量曲线表明管壁可以发生失稳变形, 且静脉壁变形发生失稳时临界跨壁压的绝对值远小于正常的静脉压, 即在负压变形情况下静脉壁很容易发生失稳变形.

参考文献:

- [1] Desch G W, Weizsacker H W. A model for passive elastic properties of rat vena cava[J]. *Journal of Biomechanics*, 2007, **40**(14): 3130-3145.
- [2] 卢峰, 张成军, 张吉平, 戎志君, 周华真, 李增华, 钟立国. 下肢深静脉血栓形成的综合治疗[J]. 中国心血管病研究杂志, 2003, **1**(2): 138-139. (LU Feng, ZHANG Cheng-jun, ZHANG Ji-ping, RONG Zhi-jun, ZHOU Hua-zhen, LI Zeng-hua, ZHONG Li-guo. Comprehensive treatment of deep venous thrombosis[J]. *Chinese Journal of Cardiovascular Review*, 2003, **1**(2): 138-139. (in Chinese))
- [3] Hayashi K, Naiki T. Adaptation and remodeling of vascular wall; biomechanical response to hypertension[J]. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2009, **2**(1): 3-19.
- [4] 廖东华, 韩海潮, 赵俊, 黄民, 匡震邦. 自体静脉移植血管的应力应变关系及其相互组织形态学研究[J]. 中国生物医学工程学报, 2000, **19**(3): 261-266. (LIAO Dong-hua, HAN Hai-chao, ZHAO Jun, HUANG Min, KUANG Zhen-bang. Stresses-strain relation of autogenous vein graft with histomorphology correlation[J]. *Chinese Journal of Biomedical Engineering*, 2000, **19**(3): 261-266 (in Chinese))
- [5] Chlup H, Horny L, Zitry R. Constitutive equations for human saphenous vein coronary artery bypass graft[J]. *International Journal of Biological and Life Sciences*, 2010, **6**(4): 200-

- 203.
- [6] Liao D H, Han H C, Huang M, Kuang Z, Zhao L. A study of stress-strain relation of autogenous vein grafts: circumferential versus longitudinal[J]. *J Med Biomech*, 1997, **12**(3): 134-137.
- [7] Liu S Q, Fung Y C. Changes in the organization of the smooth muscle cell in rat vein grafts [J]. *Journal of Biomechanical Engineering*, 1998, **122**(1): 31-38.
- [8] Azuma T, Hagegawa M. Distensibility of the vein; from the architectural point of view[J]. *Biocheology*, 1973, **10**(3): 469-479.
- [9] Sahanishi A, Hagegawa M, Dobashi T. Distensibility characteristics of caval veins and empirical exponential formulae[J]. *Biocheology*, 1988, **25**(1/2): 165-172.
- [10] Gusic R J, Petho M, Myung R, Gagner J W, Gooch K J. Mechanical properties of native and ex vivo remodeled porcine saphenous veins[J]. *Journal of Biomechanics*, 2005, **38**(9): 1770-1779.
- [11] Alastue V, Penn E, Martinez M A, Doblaré M. Experimental study and constitutive modeling of the passive mechanical properties of the vine infrarenal vena cava tissue[J]. *Journal of Biomechanics*, 2008, **41**(14): 3038-3045.
- [12] Humphrey J D. *Cardiovascular Solid Mechanics, Cells, Tissures and Organs* [M]. New York; Springer-Verlag, 2002.
- [13] Holzapfel G A, Ogden R W. Constitutive modeling of arteries[J]. *Proc R Soc A*, 2010, **466**(2118): 1551-1597.

Mechanical Performance and Negative Pressure Instability for Venous Walls

REN Jiu-sheng

(*Shanghai Key Laboratory of Mechanics in Energy and Environment Engineering, Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China*)

Abstract: Mechanical properties, such as the deformation and stress distributions for venous walls under the combined loadings of transmural pressure and axial stretch were examined within the framework of nonlinear elasticity with one kind of hyper-elastic strain energy function. The negative pressure instability problem of the venous wall was explained through energy comparison. The deformation equation of the venous wall under the combined loads was obtained with a thin-walled circular cylindrical tube at first. The deformation curves and the stress distributions for the venous wall were given under the normal transmural pressure, and the regulations were discussed. Then, the deformation curves of the venous wall under negative transmural pressure, or when the internal pressure was less than the external pressure, were given. Finally, the negative pressure instability problem was discussed through energy comparison.

Key words: venous wall; hyper-elastic strain energy function; deformation and stress distribution; negative pressure instability