文章编号:1000-0887(2011)07-0883-12　　ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887

平均间断有限元的强超收敛性及在 Hamilton 系统的应用*

李灿华，　陈传淼

(湖南师范大学 数学与计算机科学学院,长沙 410081)

摘要：讨论了常微分方程初值问题的 k 次平均间断有限元. 当 k 为偶数时,证明了在节点上的平均通量(间断有限元在节点上的左右极限的平均值)有 $2k+2$ 阶最佳强超收敛性. 对具有动量守恒的非线性 Hamilton 系统(如 Schrödinger 方程和 Kepler 系统),发现此类间断有限元在节点上是动量守恒的. 这些性质被数值试验所证实.

关　键　词：平均间断有限元；　强超收敛；　Hamilton 系统；　动量守恒

中图分类号：O242.21　　**文献标志码**：A

DOI：10.3879/j.issn.1000-0887.2011.07.011

引　　言

常微分方程的数值求解已有很长的历史,出现了很多好算法. 本文涉及有限元法求解常微分方程. 有限元法在科学和工程设计计算已得到广泛应用,特别是在求解椭圆问题及抛物、双曲问题的空间离散化[1-4],取得了巨大的成就. 但对时间变量,人们仍常使用差分法离散,它对解的光滑性要求较高. 近 30 年来用连续和间断有限元法离散时间也作出了重要推进[2,5-9],其高阶的超收敛性更令人关注,可以显著降低解关于时间变量的正则性,简明综述见文献[10-11]. 本文研究一类平均间断有限元法(ADFE),具有特别高阶的强超收敛性[6].

考虑如下线性常微分方程的初值问题：

$$Lu \equiv u_x + a(x)u = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant T,\ u(0) = u_0, \tag{1}$$

这里, $a(x)$, $f(x)$ 是适当光滑函数. 下面记 L 的共轭算子 $L^* v = -v_x + av$.

设对区间 $G=(0,T)$ 已作拟一致剖分 J^h: $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = T$,单元 $K_j = (x_j, x_{j+1}) \in J^h$,中点 $\bar{x}_j = (x_j + x_{j+1})/2$,半步长 $h_j = (x_{j+1} - x_j)/2$. 每个单元上的 $k \geqslant 0$ 次多项式,在区间上构成 k 次间断有限元空间

$$S^h = \{v: v \in P_k, \text{在 } K_j \in J^h \text{ 上}, j = 0,1,2,\cdots,N-1\},$$

这里, P_k 为不超过 k 次的多项式空间. 定义 v 在 x_j 的左右极限 $v_j^- = v(x_j - 0)$, $v_j^+ = v(x_j + 0)$. 一般地,其跃度 $[v_j] = v_j^+ - v_j^- \neq 0$. 由于在单元之间没有连续性约束,在每个单元上的自由度为

* **收稿日期**：2010-10-18；**修订日期**：2011-03-25

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10771063)

作者简介：李灿华(1978—),女,湖南南县人,博士生(联系人. Tel:+86-731-88872852；E-mail:canhuali827@hunnu.edu.cn).

$k+1$.

在区间 $K_j=(x_j,x_{j+1})$ 上用任何函数 v 乘式(1),分部积分得

$$\int_{K_j}(uL^*v-fv)\mathrm{d}x+(uv)_{j+1}^{-}-(uv)_j^{+}=0,\qquad j=0,1,2,\cdots,N-1.\tag{2}$$

为定义间断有限元 $U\in S^h$,在每个节点 x_j 和对应的参数 $s_j\in[0,\infty)$,可定义左右极限的一个加权平均值

$$U_j^{s_j}=s_jU_j^{-}+(1-s_j)U_j^{+},\qquad j=0,1,2,\cdots,N.\tag{3}$$

Delfour 等[6]的论文中考虑了一般的间断有限元法. 他们定义 k 次间断有限元 $U\in S^h$,在每个单元 K_j 上满足方程

$$\int_{K_j}(UL^*v-fv)\mathrm{d}x+(U^{s_{j+1}}v^{-})_{j+1}-(U^{s_j}v^{+})_j=0,$$
$$v\in S^h;\ j=0,1,2,\cdots,N-1.\tag{4}$$

设 u 是问题(1) 的光滑解,故 $u_j^{+}=u_j^{-}$,且 $u_j^{s_j}=u_j$. 记误差 $e=u-U$,$e_j^{s_j}=u(x_j)-U_j^{s_j}$,$e_0^{s_j}=0$. 由式(2) 与式(4),可知 e 满足基本的正交关系

$$B_j(e,v)\equiv(e^{s_{j+1}}v^{-})_{j+1}-(e^{s_j}v^{+})_j+\int_{K_j}e(-v_x+av)\mathrm{d}x=0,$$
$$v\in S^h;\ j=0,1,2,\cdots,N-1.\tag{5}$$

在式(3)中取 $s_j=1$,$U_j^{s_j}=U_j^{-}$,得到常用的间断有限元法. 取 $s_j\neq1$,得到更一般的间断有限元格式. 由于式(4) 中包含了前一单元的 U_j^{-} 和下一单元的 U_{j+1}^{+},在 N 个单元上,v 共有 $N(k+1)$ 个自由度,而 U 将有 $N(k+1)+2$ 个待定的未知数(两端增加了未知数 U_0^{-},U_N^{+}. 为了保证此方程组唯一可解,文献[6]提出了两种计算方案,对其中一种列出了具体计算公式. 我们更清晰地叙述它的计算原理如下:

在第一个单元 K_0 上取 $U_0^{-}=U_0^{+}=u(0)$ 为已知的初值(因而 $U_0^{s_j}=u(0)$,$e_0^{s_j}=0$),然后在每个单元 K_j 上(包括 K_0),设 $U_j^{s_j}$ 已知(于是在 K_j 上 U 只有 k 个自由度),取检验函数 $v=(x_{j+1}-x)^i$,$i=1,2,\cdots,k$,这样 U 由下面的方程决定:

$$\int_{K_j}(UL^*v-fv)\mathrm{d}x-U_j^{s_j}v_j^{+}=0,$$
$$v=(x_{j+1}-x)^i;\ i=1,2,\cdots,k;\ j=0,1,2,\cdots,N-1,\tag{6}$$

可唯一地确定 U. 最后在式(4) 取 $v=1$, 由等式

$$U_{j+1}^{s_{j+1}}-U_j^{s_j}+\int_{K_j}(aU-f)\mathrm{d}x=0,\qquad j=0,1,2,\cdots,N-1,\tag{7}$$

确定 $U_{j+1}^{s_{j+1}}$.

文献[6]利用 Babuska-Brezzi 条件证明了最佳收敛性估计

$$\|u-U\|\leqslant Ch^{k+1}\|u\|_{k+1}\tag{8}$$

和在节点上流通量 $U_j^{s_j}$ 的超收敛性

$$|u(x_j)-U_j^{s_j}|\leqslant Ch^{2k+1}\|u\|_{k+1},\qquad j=0,1,2,\cdots,N.\tag{9}$$

这是非常精彩的超收敛结果. 在文献[6]文末有一段重要的注解指出:在 k 为偶数的情形,若取 $s=s_j=1/2$,即加权平均 $U_j^{s}=(U_j^{-}+U_j^{+})/2$ 就是算术平均时,数值计算发现 U_j^{s} 有更高阶的超收敛性 $O(h^{2k+2})$. 但文献[6]没有证明此结果.

本文将采用单元分析法[10-11]证明此结果.

定理 1　设式(1)的解 $u\in W^{k+2,1}(G)$，则当 $s=1/2$ 时，偶数 $k\geqslant 0$ 次间断有限元 U，在节点上的平均值 $U_j^s=(U_j^-+U_j^+)/2$ 有最高阶超收敛性

$$|e_j^s|=|u(x_j)-U_j^s|\leqslant Ch^{2k+2}\|u\|_{k+2,1},\qquad k\geqslant 0,\tag{10}$$

记 C 为与 u,h 无关的常数。这个结论对非线性方程也成立。

对 Hamilton 系统的数值计算，冯康院士开创了辛几何算法，在国内外有巨大影响[12-14]。近年我们研究有限元法计算 Hamilton 系统，发现连续有限元总是能量守恒的[15-16]。而对很广一类 Hamilton 方程也具有动量守恒，如 Schrödinger 方程和 Kepler 系统，我们发现平均间断有限元也是动量守恒的. 本文用数值试验检验了此特性。

全文将使用 Sobolev 空间 $W^{k,p}(G)$，其范数为

$$\|u\|_{k,p,G}=\left\{\int_G\sum_{0\leqslant j\leqslant k}|D_x^ju(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p},$$

当积分只含最高阶导数 D^ku 时，记为半范数 $|u|_{k,p}$。当不致混淆时可省去下标 G。当 $p=2$ 时也可省略，简记 $H^k=W^{k,2}$，$\|u\|_k=\|u\|_{k,2}$。

1　单元上的 Legendre 正交展开

在标准单元 $K=(-h,h)$ 上引入线性变换 $x=th,t\in E,E=\{-1<t<1\}$，记 $u(x)=u(ht)$ 为 $u(t)$。故有 $\partial_t^iu(t)=D_x^iu(x)h^i=O(h^i)$。在 E 单元上定义 Legendre 正交多项式 $l_j(t)$，它们具有如下两个重要性质：

$$l_j(t)=\gamma_j\partial_t^j(t^2-1)^j\perp P_{j-1}(t),\qquad l_j(\pm1)=(\pm1)^j,\ j>0,$$

任意 u 可以展开为如下正交多项式级数：

$$u(t)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jl_j(t),\qquad b_j=\left(j+\frac{1}{2}\right)(u,l_j)_E,$$

其中 Fourier 系数 b_j 经过多次分部积分后有如下形式[10-11]：

$$b_j=(j+1/2)\gamma_j(-1)^i(\partial_t^iu,\partial^{j-i}(t^2-1)^j)_E=O(h^{i-1/p})\|u\|_{i,p,k},\qquad i\leqslant j.$$

若 u 是 k 次多项式，则所有系数 $b_j=0,\ j>k$，它是使用 Bramble-Hilbert 引理的基础。

现取 k 次部分和 $u_k=\sum_{j=0}^{k}b_jl_j(t)$，它的余项与任何 k 次多项式正交[10-11]

$$R=u-u_k=\sum_{j=k+1}^{\infty}b_jl_j(t)\perp P_k(t).$$

因为余项 $R(u)=u-u_k$ 是 $u\in W^{k+1,p}(E)$ 的线性泛函，当 u 为 k 次多项式时，$R(u)=0$，因此由 Bramble-Hilbert 引理，对任何 $u\in W^{k+1,p}(E)$ 有

$$\|R(u)\|_{0,q,E}\leqslant C|u|_{k+1,p,E}.$$

这里右端是半范数，回到原坐标系，即得到如下误差估计：

$$\|R\|_{0,q,K}\leqslant Ch^{k+1+(1/q-1/p)}\|u\|_{k+1,p,K}.$$

特别地，对偶数 k，$l_{k+1}(\pm1)=\pm1$，有

$$R_{j+1}^-=R(1)=b_{k+1}^j+r_h,\ R_j^+=R(-1)=-b_{k+1}^j+r_h,$$

这里 $r_h=O(h^{k+2-1/p})\|u\|_{k+2,p,K}$ 为高阶量。在相邻两单元 K_j,K_{j-1} 的公共节点 x_j 上左右极之和 $2R_j^s=R_j^++R_j^-$ 有高 1 阶的精度

$$2R_j^s=(-b_{k+1}^j+b_{k+1}^{j-1})+r_h=O(h^{k+2-1/p})\|u\|_{k+2,p,K_j+K_{j-1}},\tag{11}$$

这里使用了以下高阶估计：

$$b_{k+1}^{j}-b_{k+1}^{j-1}=c_k\int_E\partial_t^{k+1}(u(\bar{x}_j+ht)-u(\bar{x}_{j-1}+ht))(t^2-1)^{k+1}\mathrm{d}t=$$
$$c_kh^{k+1}\int_E\int_{\bar{x}_{j-1}}^{\bar{x}_j}D_x^{k+2}u(x+ht)(t^2-1)^{k+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$
$$O(h^{k+1})\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}|D_x^{k+2}u(t)|\mathrm{d}t=$$
$$O(h^{k+2-1/p})\|u\|_{k+2,p,K_j+K_{j-1}},$$

上述估计(11)在本文主要定理1的证明中起了重要作用.

2 节点上 $|e_j^s|$ 的强超收敛估计

在每单元 $K=K_j$ 上,误差 $e=u-U$ 满足式(5).

引理1 设问题(1)的解 $u\in W^{k+2,1}(G)$, $G=(0,T)$ 及 $s=1/2$,则偶数 $k\geqslant 0$ 次间断有限元 U 在节点 x_j 上的误差 $e_j^s=u(x_j)-U_j^s$ 有最高阶估计

$$|e_j^s|\leqslant C(T)h^{k+1}(h^{k+1}\|u\|_{k+2,1}+h\|e\|+\max_j|e_j^-|),\qquad x_j\in G,\tag{12}$$

这里常数 $C(T)$ 与 x_j,h,u 无关.

证明 我们将估计 e_j^s 及 e_j^-. 为使用对偶论证,作辅助共轭问题

$$L^*w=-w_x+aw=0,\qquad 0<x<x_n,\ w_n=w(x_n)=e_n^s.\tag{13}$$

其解为

$$w(x)=w(x_n)\phi(x),\ \phi(x)=\mathrm{e}^{-\int_{x_n}^{x}a(y)\mathrm{d}y}.$$

若 $a(x)$ 适当光滑,对 w 求导数有

$$w_x=-w_n\phi(x)a(x),\ w_{xx}=w_n\phi(x)(a^2-a_x),\cdots.$$

因此,任何指标 m 它有以下正则性估计

$$\|w\|_{m,p,G}\leqslant C(T)|e_n^s|,\qquad 1\leqslant p\leqslant\infty.\tag{14}$$

对式(13)的解 w,将单元 K_j 上的积分 $B_j(e,w)$ 对 j 求和,中间的项相互抵消,并利用 $e_0^s=0$,我们有等式

$$B(e,w)=\sum_{j=0}^{n-1}B_j(e,w)=(e^sw)_n=|e_n^s|^2.\tag{15}$$

另一方面,记 $R=w-v,v\in S^h$, 分部积分,由式(15)得

$$2|e_n^s|^2=2\sum_{j=0}^{n-1}B_j(e,R)=2\sum_{j=0}^{n-1}\{(e^sR^-)_{j+1}-(e^sR^+)_j+(e,L^*R)_{K_j}\}=$$
$$2\sum_{j=0}^{n-1}\{(e^sR^-)_{j+1}-(e^sR^+)_j-(eR)_{j+1}^-+(eR)_j^++(e_x+ae,R)_{K_j}\}=$$
$$2\sum_{j=0}^{n-1}\{[(e^s-e^-)R^-]_{j+1}-[(e^s-e^+)R^+]_j+(e_x+ae,R)_{K_j}\}=I_0+I_1,$$

记跃度 $[e]=e^+-e^-$,这里,$e^s=(e^++e^-)/2$, $2(e^s-e^-)=[e]$, $2(e^s-e^+)=-[e]$,$[e_0]=0$.
记 $R^s=(R^++R^-)/2$,中间项合并后,I_0 和 I_1 重写为

$$I_0=([e]R^-)_n+2\sum_{j=1}^{n-1}([e]R^s)_j,\ I_1=2\sum_{j=0}^{n-1}(e_x+ae,R)_{K_j}.\tag{16}$$

首先取 $v=w_{\mathrm{L}}\in S^h$ 为 w 在此单元 K_j 上的 k 次 Legendre 正交展开,其余项有正交性

$$R=w-w_{\mathrm{L}}=\sum_{j=k+1}^{\infty}b_jl_j(t)\perp P_k(t).$$

在单元积分 $(e_x + ae, R)_{K_j}$ 中，$e_x = u_x - U_x$ 中的 U 可换为 u 的 $k+1$ 次插值多项式 $I_{k+1}u$.

$$|(e_x, R)| = |((u - I_{k+1}u)_x, R)| \leqslant Ch^{k+r}\|u\|_{k+1+r,1} Ch^{k+1}\|w\|_{k+1,\infty}, \qquad r = 0,1.$$

而积分项 (ae, R) 中 $e = u - U$ 的 U 也可用 u 的 k 次插值 $I_k u$ 代替，

$$|(ae,R)| = |((a - a(x_j))e, R) + (a(x_j)(u - I_k u), R)| \leqslant$$
$$(Ch\|e\| + Ch^{k+1})\|R\|_{0,\infty} \leqslant C(h^{k+1} + h\|e\|)h^{k+1}|e_n^s|.$$

于是得到高阶估计

$$|I_1| = 2|(e_x + ae, R)_G| \leqslant Ch^{k+1}(h^{k+r}\|u\|_{k+1+r,1} + h\|e\|)|e_n^s|, \qquad r = 0,1.$$

其次估计 I_0. 前面已知，当 k 为偶数时，有

$$R_j^s = (R_j^+ + R_j^-)/2 = O(h^{k+2})\|w\|_{k+2,\infty,K_j+K_{j-1}} = O(h^{k+2})|e_n^s|.$$

注意 $[e] = e^+ - e^- = (e^+ + e^-) - 2e^- = 2e^s - 2e^-$, 于是可估计

$$|I_0| \leqslant \max_j |[e_j]| \left(|R_n^-| + 2\sum_{j=1}^{n-1}|R_j^s|\right) \leqslant$$
$$C(\max_j |e_j^s| + \max_j |e_j^-|)(1 + t_n)h^{k+1}|e_n^s|, \qquad t_n = nh \leqslant T.$$

设 $B = |e_n^s| = \max_j |e_j^s|$, 综合以上两个不等式有

$$2|e_n^s|^2 = |I_0 + I_1| \leqslant$$
$$Ch^{k+1}(h^{k+1}\|u\|_{k+2,1} + h\|e\| + B + \max_j |e_j^-|)|e_n^s|,$$

约去公因子 $|e_n^s|$后，并消去右边的 B, 由于 $|e_j^s| \leqslant |e_n^s|$, 得到式(12)的估计.

3 误差 $|e_j^-|$, $\|e\|$ 的估计

取 u_L 为 u 的 k 次 Legendre 展开，$R = u - u_L \perp P_k$, 分解 $e = u - U = u - u_L - (U - u_L) = R - \theta$. 由式(5) 知，$\theta = U - u_L$ 满足

$$\int_{K_j}\theta(v_x - av)\mathrm{d}x = -\int_{K_j}Rav\mathrm{d}x - (e^s v^-)_{j+1} + (e^s v^+)_j, \qquad v \in P_k. \tag{17}$$

我们用单元分析法[10-11]证明下面的引理.

引理 2 若 $u \in W^{k+2,1}(G)$, 则对 k 次间断有限元 U, $\theta = U - u_L$ 有估计

$$\max_j |\theta_j^{\pm}| + \|\theta\| \leqslant Ch^{k+1}, \qquad u \in W^{k+1,\infty}(G) \tag{18}$$

及最佳阶误差估计

$$\|e\| + \max_j |(u - U)(x_j \pm 0)| \leqslant Ch^{k+1}\|u\|_{k+1,\infty}. \tag{19}$$

证明 为同时估计两个量式(18), 不失一般性设 $-a = b^2 \geqslant 1$. 采用能量方法，在式(17) 中取 $v = \theta$, 对所有单元求和有

$$\sum_{j=0}^{n-1}\{(v_{j+1}^-)^2 - (v_j^+)^2\} - 2(av, v)_G =$$
$$-2(R, av)_G - \sum_{j=0}^{n-1}\{2(e^s v^-)_{j+1} - 2(e^s v^+)_j\}.$$

改变求和顺序，并注意 $v_0^- = e_0^s = 0$, 有

$$(v_n^-)^2 + 2(b^2 v, v) = 2(b^2 R, v) - 2(e^s v^-)_n + \sum_{j=0}^{n-1}(2e_j^s + v_j^+ + v_j^-)(v_j^+ - v_j^-) =$$
$$2(b^2 R, v) - 2(e^s, v^-)_n + 4\sum_{j=0}^{n-1}R_j^s(R_j^s - e_j^s - v_j^-). \tag{20}$$

注意 $v^+ + v^- = 2v^s = 2R^s - 2e^s$. 由设 $b \geqslant 1$, 利用 Young 不等式[11]可消去右边的 $\|v\|^2$, 得

$$
\begin{aligned}
&|v_n^-|^2 + \|v\|^2 \leqslant \\
&\quad C\|R\|^2 + 2|e_n^s\|v_n^-| + 4\sum_{j=0}^{n-1}|R_j^s|^2 + 4\sum_{j=0}^{n-1}|R_j^s|(|e_j^s| + |v_j^-|),
\end{aligned}
$$

记 $M = |v_n^-| = \max_j |v_j^-|$, $t_n = nh < T$, 利用

$$
|R_j^s| \leqslant Ch^{k+1}\|u\|_{k+1,\infty,K_j+K_{j-1}}, \text{或} |R_j^s| \leqslant Ch^{k+1}\|u\|_{k+2,1,K_j+K_{j-1}}
$$

及嵌入定理 $W^{k+1,\infty} \subset W^{k+2,1}$, 有

$$
\begin{aligned}
M^2 + \|v\|^2 &\leqslant Ch^{2k+2} + 2M|e_n^s| + 4\sum_{j=0}^{n-1}|R_j^s|^2 + 4(\max_j|e_j^s| + M)\sum_{j=0}^{n-1}|R_j^s| \leqslant \\
&\quad Ch^{2k+2} + 2M|e_n^s| + Ch^{2k+2}\sum_{j=0}^{n-1}\|u\|_{k+2,1,K_j}\|u\|_{k+1,\infty,K_j} + \\
&\quad C(\max_j|e_j^s| + M)h^{k+1}\|u\|_{k+2,1},
\end{aligned}
$$

用 Young 不等式消除右边的 M, 得

$$
M^2 + \|v\|^2 \leqslant Ch^{2k+2} + C|e_n^s|^2 + Ch^{k+1}\max_j|e_j^s|. \tag{21}
$$

注意 $|e| \leqslant |R| + |\theta|$, $v = \theta$, 由式(12)有

$$
|e_n^s| \leqslant Ch^{k+1}(h^{k+1} + h\|v\| + M),
$$

因此

$$
M^2 + \|v\|^2 \leqslant Ch^{2k+2} + Ch^{2k+2}(\|v\| + M)^2 + Ch^{2k+2}(\|v\| + M).
$$

再次使用 Young 不等式消除右边的 M 和 $\|v\|$, 得到所需的最佳阶估计

$$
\max_j|\theta_j^-| + \|\theta\| \leqslant Ch^{k+1},
$$

由于 $2\theta_j^s = \theta_j^+ + \theta_j^-$, 上述估计对 θ_j^+ 也成立. 最后利用 $e = R - \theta$ 又可得到式(19). 引理 2 得证.

定理 1 的证明 利用第 3 节引理 2 的误差估计

$$
\max_j|e_j^-| + \|e\| \leqslant Ch^{k+1}
$$

及第 2 节引理 1, 即可推出定理 1 的估计

$$
|e_j^s| \leqslant Ch^{k+1}(h^{k+1}\|u\|_{k+2,1} + h\|e\| + \max_j|e_j^-|) \leqslant Ch^{2k+2}\|u\|_{k+2,1}.
$$

4 平均间断有限元的动量守恒性

4.1 偏微分 Schrödinger 方程

在柱体 $Q = (0, T) \times \Omega$ 上考察 Schrödinger 方程, $\omega = u + \mathrm{i}v$ 满足

$$
\begin{cases}
\mathrm{i}\omega_t = \Delta\omega + |\omega|^2\omega, & \text{在 } Q \text{ 中}, \\
\omega(0, x) = \omega_0(x), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\
\omega = 0, & \text{在 } \Gamma \text{ 上},
\end{cases} \tag{22}
$$

这里 Γ 是 Ω 的边界, 分离实部和虚部写为

$$
u_t = \Delta v + (u^2 + v^2)v, \quad -v_t = \Delta u + (u^2 + v^2)u,
$$

记函数子空间 $S_0 = \{\omega | \omega \in H^1(\Omega), \omega|_\Gamma = 0\}$. 记区域 Ω 上的内积和双线性型

$$
(v, \xi) = \int_\Omega v\xi \mathrm{d}x, \quad a(v, \xi) = (\nabla v, \nabla\xi).
$$

分别用 $\xi, \eta \in S_0$ 乘第 1 和第 2 式, 在 Ω 上积分, 利用 Green 公式和零边界条件有

$$\begin{cases}\int_0^t \{ (u_t,\xi) + a(v,\xi) - (|\omega|^2 v,\xi) \mathrm{d}t = 0, \\ \int_0^t \{ (v_t,\eta) - a(u,\eta) + (|\omega|^2 u,\eta) \} \mathrm{d}t = 0. \end{cases} \tag{23}$$

取 $\xi = u,\eta = v$, 两式相加得

$$\int_0^t \{ (u_t,u) + (v_t,v) \} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_\Omega (u^2 + v^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big|_{t=0}^{t=t} = 0,$$

推出动量守恒 $\int_\Omega |\omega(t,x)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{const}$.

现在转向时空全离散化. 设 S^k 是时间 m 次平均间断有限元空间,S^h 是空间 n 次连续有限元空间,记 $S^{k,h} = S^k \otimes S^h$ 为它们的张量积空间,k,h 是它们的步长,$G = (0,t_j)$. 式(23) 的时空全离散有限元 $W = (U,V) \in S^{k,h}$ 满足

$$\int_G \{ -(U,\xi_t) + a(V,\xi) - (|W|^2 V,\xi) \} \mathrm{d}t + (U^s,\xi^-)_{j+1} - (U^s,\xi^+)_j = 0,$$

$$\int_G \{ -(V,\eta_t) - a(U,\eta) + (|W|^2 U,\eta) \} \mathrm{d}t + (V^s,\eta^-)_{j+1} - (V^s,\eta^+)_j = 0,$$

这里检验函数 $\xi,\eta \in S^{k,h}$. 取 $\xi = U,\eta = V$, 两式相加,得到

$$-\int_G \{ (V,V_t) + (U,U_t) \} \mathrm{d}t + (V^s,V^-)_{j+1} - (V^s,V^+)_j + (U^s,U^-)_{j+1} - (U^s,U^+)_j = 0.$$

并推出

$$(W^+,W^-)|_{t_j} = \int_\Omega (U_j^+ U_j^- + V_j V_j^-) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \| W(0) \|^2 = \mathrm{const}. \tag{24}$$

这里有限元初值 $W^+(0) = W^-(0) = W(0)$ 是初值 $\omega(0,x)$ 的逼近,实际上与空间离散步长 h 有关,因此上述等式只是对时间的守恒性.

4.2 平面上两体问题

两体的位置 q_1,q_2 满足

$$q_1'' = -\frac{q_1}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}} \equiv f_1,\ q_2'' = -\frac{q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}} \equiv f_2.$$

引进速度 $p_j = q_j'$, $j = 1,2$, 则化为一阶组

$$p_1' = f_1,\ q_1' = p_1,\ p_2' = f_2,\ q_2' = p_2. \tag{25}$$

于是有 $p_1'q_2 - q_2'q_1 = 0$ 及 $q_1'p_2 - q_2'p_1 = 0$. 两式相减有

$$p_1'q_2 + q_2'p_1 - p_2'q_1 - q_1'p_2 = (p_1q_2)' - (p_2q_1)' = 0.$$

因此角动量(单位时间扫过的面积)不变:

$$p_1q_2 - p_2q_1 = \mathrm{const}.$$

由平均间断有限元的定义,可得上述 4 个方程的离散等式

$$((P_1^+ + P_1^-)Q_2^-)_{j+1} - ((P_1^+ + P_1^-)Q_2^+)_j - 2\int_{I_j} (P_1Q_{2t} + f_1Q_2) \mathrm{d}t = 0, \tag{a}$$

$$((P_2^+ + P_2^-)Q_1^-)_{j+1} - ((P_2^+ + P_2^-)Q_1^+)_j - 2\int_{I_j} (P_2Q_{1t} + f_2Q_1) \mathrm{d}t = 0, \tag{b}$$

$$((Q_1^+ + Q_1^-)P_2^-)_{j+1} - ((Q_1^+ + Q_1^-)P_2^+)_j - 2\int_{I_j} (Q_1P_{2t} + P_1P_2) \mathrm{d}t = 0, \tag{c}$$

$$((Q_2^+ + Q_2^-)P_1^-)_{j+1} - ((Q_2^+ + Q_2^-)P_1^+)_j - 2\int_{I_j}(Q_2 P_{1t} + P_2 P_1)\mathrm{d}t = 0, \tag{d}$$

将式(a)和式(d)相加,积分其导数,得到方程

$$(P_1^+ Q_2^-)_{j+1} - (P_1^- Q_2^+)_j + (Q_2^+ P_1^-)_{j+1} - (Q_2^- P_1^+)_j = 2\int_{I_j}(P_2 P_1 + f_1 Q_2)\mathrm{d}t,$$

类似地,将式(b)和式(c)相加,有

$$(P_2^+ Q_1^-)_{j+1} - (P_2^- Q_1^+)_j + (Q_1^+ P_2^-)_{j+1} - (Q_1^- P_2^+)_j = 2\int_{I_j}(P_1 P_2 + f_2 Q_1)\mathrm{d}t,$$

两式相减,右端抵消,得到节点上角动量守恒如下:

$$\frac{1}{2}(P_1^- Q_2^+ + P_1^+ Q_2^- - P_2^- Q_1^+ - P_2^+ Q_1^-)(t_j) = \mathrm{const}. \tag{26}$$

5　数 值 试 验

例 1　线性方程

$$u_t' = u,\ u(0) = 1,\qquad t \in [0, 0.8], \tag{27}$$

其精确解是 $u = e^t$,采用平均间断 2 次元在 $N = 4, 8, 16, 32$ 剖分下,得到误差 $e = u - U$ 在节点 t_n 上的流通量误差 $e_n^s = (e_n^- + e_n^+)/2$ 如表 1(括号中的数值为前后两种误差的比,接近理论值 $2^6 = 64$). 用 $N = 32$ 剖分已达到 14 位精度. 然而误差在内节点上的左右极限值(表 2,表 3),发现它们却只有通常的阶 $O(h^3)$.

表 1　平均间断 2 次元的节点流通量误差 e_n^s

Table 1　The flux errors e_n^s at nodes for 2-degree ADFE

N	$t = 0.2$	$t = 0.4$	$t = 0.6$	$t = 0.8$
4	1.051 0E-8	4.761 2E-9	1.604 5E-8	1.278 6E-8
8	3.256 9E-11(323)	7.485 7E-11(63.6)	1.297 6E-10(123.7)	2.009 6E-10(63.6)
16	5.095 9E-13(63.9)	1.171 3E-12(63.9)	2.030 4E-12(63.9)	3.143 3E-12(63.9)
32	7.549 5E-15(67.5)	1.754 2E-14(66.8)	3.064 2E-14(66.3)	4.707 3E-14(66.8)

表 2　平均间断 2 次元节点误差的左极限 e_n^-

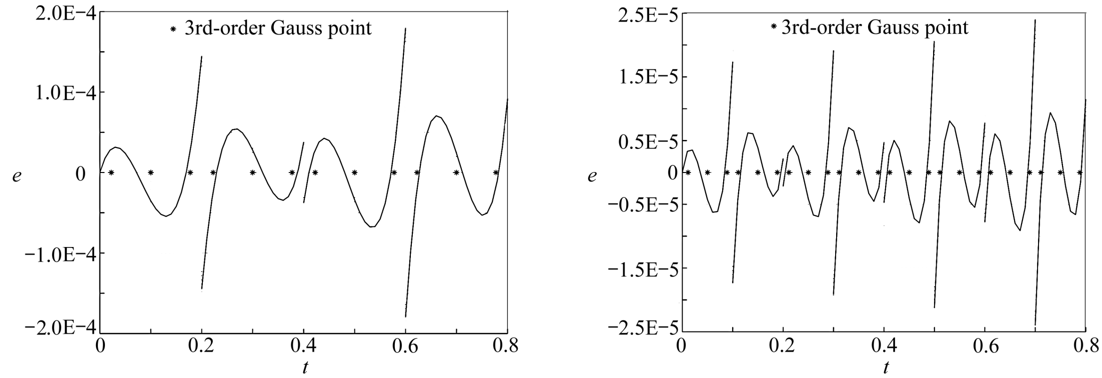
Table 2　The left limit e_n^- of errors for 2-degree ADFE

N	$t = 0.2 - 0$	$t = 0.4 - 0$	$t = 0.6 - 0$	$t = 0.8 - 0$
4	1.446 2E-4	3.769 0E-5	1.795 5E-4	9.102 2E-5
8	2.168 5E-6(66.7)	4.732 1E-6(7.97)	7.781 7E-6(23.1)	1.142 8E-5(7.97)
16	2.713 7E-7(7.99)	5.921 8E-7(7.99)	9.738 0E-7(7.99)	1.430 1E-6(7.99)
32	3.393 1E-8(8.00)	7.404 3E-8(8.00)	1.217 6E-7(8.00)	1.788 1E-7(8.00)

表 3　平均间断 2 次元节点误差的右极限 e_n^+

Table 3　The left limit e_n^+ of errors for 2-degree ADFE

N	$t = +0$	$t = 0.2 + 0$	$t = 0.4 + 0$	$t = 0.6 + 0$
4	0	-1.446 0E-4	-3.768 0E-5	-1.795 1E-4
8	0	-2.168 4E-6(66.7)	-4.732 0E-6(7.96)	-7.781 4E-6(23.1)
16	0	-2.713 7E-7(8.00)	-5.921 8E-7(8.00)	-9.737 9E-7(8.00)
32	0	-3.393 1E-8(8.00)	-7.404 3E-8(8.00)	-1.217 6E-7(8.00)



(a) $N = 4$　　(b) $N = 8$

图 1　平均间断 2 次元的误差图

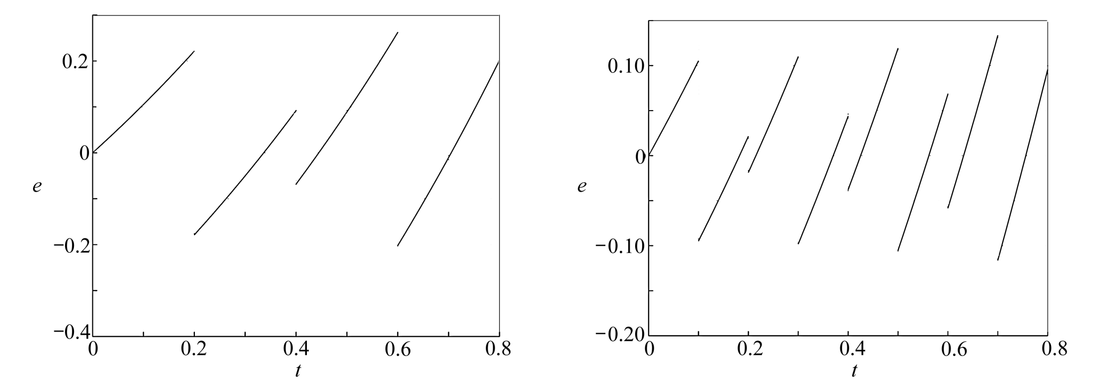
Fig. 1　Error curves for 2-degree ADFE

由图 1 看到,误差曲线在每个单元,除了第一个单元,非常接近 3 次 Legendre 多项式,这表明 3 阶 Gauss 点 * 也是超收敛点. 在内节点上,左右两边的极限值大小几乎相等,但符号相反. 因此其平均值(数值通量)才能变为高阶量. 这就解释了为何偶次元的数值通量可以达到高阶小的原因和机理. 在第一个单元的误差曲线不接近 $l_3(t)$ 的原因是在起点 $t=0$,规定了 $e_0^s=e_0^-=e_0^+=0$.

表 4　平均间断 0 次元的节点流通量误差 e_n^s

Table 4　The flux errors e_n^s at nodes for 0-degree ADFE

N	$t=0.2$	$t=0.4$	$t=0.6$	$t=0.8$
4	2.140 3E−2	1.182 5E−2	3.011 9E−2	2.874 1E−2
8	1.402 8E−3(15.3)	3.024 7E−3(3.91)	4.966 8E−3(6.06)	7.350 8E−3(3.91)
16	3.527 6E−4(3.98)	7.605 9E−4(3.98)	1.248 9E−3(3.98)	1.848 4E−3(3.98)
32	8.832 0E−5(3.99)	1.904 3E−4(4.00)	3.126 8E−4(4.00)	4.627 7E−4(4.00)



(a) $N = 4$　　(b) $N = 8$

图 2　平均间断 0 次元的误差图

Fig. 2　Error curves for 0-degree ADFE

图 2 显示了 4,8 剖分的 0 次平均间断元的误差曲线,流通量误差如表 4 所示. 单元的中点也是超收敛点,除了开始的几个单元.

例 2　常微分 Schrödinger 方程

$$u_t = -|z|^2 v,\ v_t = |z|^2 u,\ u(0) = 1, v(0) = 0, \tag{28}$$

其中，$z = u + \mathrm{i}v$，$|z|^2 = u^2 + v^2$，其精确解是 $u = \cos t$，$v = \sin t$。对步长 $h = 0.2$，采用平均间断 2 次元计算的结果列于表 5（$h = 0.2$），其中动量及其误差为

$$\begin{cases} D_j^- = U_j^{-2} + V_j^{-2},\ D_j^+ = U_j^{+2} + V_j^{+2},\ D_j = U_j^+ U_j^- + V_j^+ V_j^-, \\ E_1 = D_j^- - 1,\ E_2 = D_j^+ - 1,\ E_3 = D_j - 1. \end{cases}$$

从表 5 的数据看到，动量 D 守恒，而 D^+，D^- 都不守恒的。

表 5　平均间断 2 次元节点动量及其误差

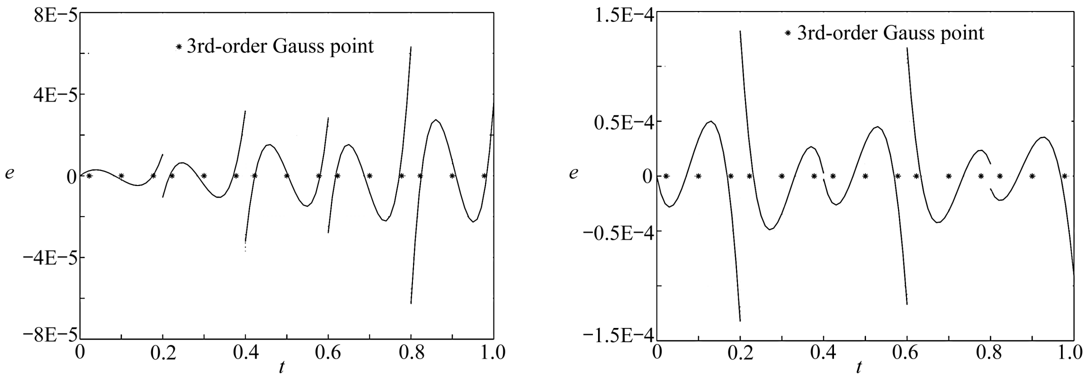
Table 5　The momentums and its errors at node t_j for 2-degree ADFE

j	U_j^-	U_j^+	V_j^-	V_j^+	E_1	E_2	E_3
1	9.800 6E−1	9.800 8E−1	1.988 0E−1	1.985 4E−1	3.191 6E−5	−3.184 5E−5	0
2	9.210 3E−1	9.210 9E−1	3.894 2E−1	3.894 2E−1	−6.132 5E−5	6.132 9E−5	−1.110 2E−16
3	8.253 1E−1	8.253 6E−1	5.647 6E−1	5.645 3E−1	8.612 0E−5	−8.606 2E−5	−2.220 4E−16
4	6.966 4E−1	6.967 7E−1	7.173 4E−1	7.173 7E−1	−1.042 7E−4	1.042 9E−4	−2.220 4E−16
5	5.402 7E−1	5.403 4E−1	8.415 6E−1	8.413 8E−1	1.145 3E−4	−1.144 9E−4	−2.220 4E−16
6	3.622 7E−1	3.624 5E−1	9.320 1E−1	9.320 7E−1	−1.159 8E−4	1.160 2E−4	−2.220 4E−16
7	1.699 3E−1	1.700 0E−1	9.855 1E−1	9.853 9E−1	1.086 4E−4	−1.086 2E−4	−2.220 4E−16
8	−2.930 6E−2	−2.909 3E−2	9.995 2E−1	9.996 2E−1	−9.294 2E−5	9.299 7E−5	−3.330 7E−16
9	−2.272 2E−1	−2.271 8E−1	9.738 8E−1	9.738 2E−1	7.021 3E−5	−7.020 7E−5	−4.440 9E−16
10	−4.162 6E−1	−4.160 4E−1	9.092 2E−1	9.093 7E−1	−4.205 5E−5	4.212 4E−5	−5.551 1E−16

表 6　平均间断 2 次元 U 的节点流通量误差

Table 6　The flux errors at nodes for 2-degree ADFE solution U

h	$t = 0.2$	$t = 0.4$	$t = 0.6$	$t = 0.8$
0.2	−8.698 1E−9	1.078 8E−8	−5.226 8E−9	3.696 6E−8
0.1	4.331 6E−11(201)	1.666 9E−10(64.7)	3.516 8E−10(14.9)	5.714 6E−10(64.7)
0.05	6.750 2E−13(64.2)	2.597 3E−12(64.2)	5.479 9E−12(64.2)	8.904 9E−12(64.2)
0.025	1.021 4E−14(66.1)	4.019 0E−14(64.6)	8.493 2E−14(64.5)	1.388 9E−13(64.1)



（a）平均间断 2 次元 U 的误差图（$h = 0.2$）

（a）Error curve for 2-degree ADFE solution U($h = 0.2$)

（b）平均间断 2 次元 V 的误差图（$h = 0.2$）

（b）Error curve for 2-degree ADFE solution V($h = 0.2$)

图 3　误差图

Fig. 3　Error curves

其次，对不同的步长 $h = 0.2$，0.1，0.05，0.025，我们将平均间断 2 次元 U，V 在节点上的流

通量误差列于表 6 和表 7(括号中的数值为前后两种误差的比,接近 $2^6=64$)。它们都达到最高阶超收敛精度 $O(h^6)$。

由图 3 看到,除了第一个单元,U 和 V 误差曲线也非常接近 3 次 Legendre 多项式,即 3 阶 Gauss 点 * 对 U 和 V 也是超收敛点。

表 7　平均间断 2 次元 V 的节点流通量误差

Table 7　The flux errors at nodes for 2-degree ADFE solution V

h	$t=0.2$	$t=0.4$	$t=0.6$	$t=0.8$
0.2	−1.452 2E−9	−2.685 3E−8	−5.197 6E−9	−3.876 3E−8
0.1	−2.238 0E−10(6.49)	−4.148 8E−10(64.7)	−5.459 1E−10(9.52)	−5.991 4E−10(64.7)
0.05	−3.486 8E−12(64.2)	−6.464 0E−12(64.2)	−8.505 9E−12(64.2)	−9.335 8E−12(64.2)
0.025	−5.442 9E−14(64.1)	−1.011 4E−13(63.9)	−1.333 4E−13(63.8)	−1.466 6E−13(63.7)

6　结　　论

k 次间断有限元一般只能有 $2k+1$ 阶超收敛,但是,当 k 为偶数时,平均通量 $U_j^s=(U_j^-+U_j^+)/2$ 可以达到 $2k+2$ 阶强超收敛性。这是目前所知的所有间断有限元法中最高阶的超收敛结果。1981 年 Delfour 等数值计算发现了这一点,但是没有证明,本文首次证明了最佳阶超收敛估计。此结果不仅用来解决常微问题,而且可用来解决偏微问题,特别是双曲问题。本文还发现此类间断有限元对非线性 Hamilton 系统,总是保持动量守恒的。

参考文献:

[1]　Brenner S, Scott L. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*[M]. Berlin: Springer, 1994.

[2]　Thomee V. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*[M]. Berlin: Springer, 1997.

[3]　王烈衡,许学军. 有限元方法的数学基础[M]. 北京:科学出版社,2004. (WANG Lie-heng, XU Xue-jun. *The Mathematical Foundation of Finite Element Methods*[M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese))

[4]　余德浩,汤华中. 微分方程数值解法[M]. 北京:科学出版社,2003. (YU De-hao, TANG Hua-zhong. *Numerical Solution of Differential Equations*[M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese))

[5]　Reed W H, Hill T R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation[R]. Tech Report LA-UR-73-479. Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.

[6]　Delfour M, Hager W, Trochu F. Discontinuous Galerkin methods for ordinary differential equations[J]. *Math Comp*, 1981, **36**(154): 455-473.

[7]　Aziz A K, Monk P. Continuous finite elements in space and time for the heat equation[J]. *Math Comp*, 1989, **52**(186): 255-274.

[8]　Cockburn B, LIN S Y, Shu C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws 3: one-dimensional systems[J]. *J Comput Phy*, 1989, **84**: 90-113.

[9]　Johnson C, Pitkaranta J. An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation[J]. *Math Comp*, 1986, **46**(173): 1-26.

[10]　陈传淼. 有限元超收敛构造理论[M]. 长沙: 湖南科技出版社, 2001. (CHEN Chuan-miao.

Structure Theory of Superconvergence for Finite Elements[M]. Changsha: Hunan Science and Techniques Press, 2001. (in Chinese))

[11] 陈传森. 科学计算概论[M]. 北京: 科学出版社, 2007. (CHEN Chuan-miao. *Introduction to Science Computations*[M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese))

[12] 冯康. 冯康全集[M]. 第二卷. 北京: 国防工业出版社, 1995. (FENG Kang. *Collection Works of Feng Kang*[M]. Vol **2**. Beijing: National Defence Industry Press, 1995. (in Chinese))

[13] 冯康, 秦孟兆. 哈密尔顿的辛几何算法[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社. 2003. (FENG Kang, QING Meng-zhao. *Sympletic Geometric Algorithms for Hamilton System*[M]. Hangzhou: Zhejiang Science and Techniques Press, 2003. (in Chinese))

[14] Hairer E, Lubich C, Wanner G. *Geometric Numerical Integration, Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*[M]. Berlin: Springer, 2003.

[15] TANG Qiong, CHEN Chuan-miao. Energy conservation and symplectic properties of continuous finite element methods for Hamiltonian systems[J]. *Appl Math Comput*, 2006, **181**(2): 1357-1368.

[16] CHEN Chuan-miao, TANG Qiong, HU Shu-fang. Finite element method with superconvergence for nonlinear Hamilton system[J]. *J Comp Math*, 2011, **29**(2): 167-184.

Ultraconvergence for Averaging Discontinuous Finite Elements and Its Applications in Hamiltonian System

LI Can-hua, CHEN Chuan-miao

(*College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha* 410081, *P. R. China*)

Abstract: The k-degree averaging discontinuous finite element solution for the initial value problem of ordinary differential equations was discussed. When k was even, it was proved that the averaging numerical flux (the average of left and right limits for discontinuous finite element at nodes) had the optimal order ultraconvergence $2k+2$. For nonlinear Hamiltonian systems (e. g., Schrödinger equation and Kepler system) with momentum conservation, it was found that the discontinuous finite element methods preserve momentum at nodes. These properties were confirmed by numerical experiments.

Key words: averaging discontinuous finite element; ultraconvergence; Hamiltonian system; momentum conservation