

# Helbing 流体力学交通流模型的守恒形式\*

李书峰<sup>1,3</sup>, 张鹏<sup>1,3</sup>, 黄仕进<sup>2</sup>

(1. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所,上海 200072;

2. 香港大学 土木工程系,香港;

3. 上海大学 上海市力学在工程中的应用重点实验室,上海 200072)

**摘要:** 得到了 Helbing 交通流流体力学模型的标准守恒形式,并证明了模型的双曲性,这对研究模型的解析性质和数值格式至关重要.基于给出的守恒形式,设计了高效求解模型方程的 LDG (local discontinuous Galerkin) 格式,并模拟了由不稳定平衡态到稳定的时停时走波的演化.数值模拟也表明,通过扩散系数校正确实使模型得到改进,避免了车辆碰撞和出现极端高密度.

**关键词:** 守恒形式; 双曲性; LDG 格式; 时走时停波

**中图分类号:** TB126 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.09.003

## 引言

Lighthill 和 Whitham<sup>[1]</sup>与 Richards<sup>[2]</sup>分别首先提出了交通流流体力学模型,即 LWR 模型.其理论依据是将交通流比拟为连续介质,从而使交通流满足质量守恒方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

其中,  $\rho(x, t)$  为密度,  $V(x, t)$  为平均速度.为使方程(1)封闭, LWR 模型假设存在所谓的平衡速度-密度关系  $V = V_e(\rho)$ , 对应速度-密度相平面内的一条固定曲线.然而,这样的假定与多数实测的经验数据并不相符.

为改进 LWR 模型,许多学者引入了交通加速度方程,其中大多数方程可以写为如下统一的形式:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e(\rho) - V}{\tau} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (2)$$

上式中,左边第 1 项及第 2 项分别描述松弛及期望效应,  $\tau$  和  $P$  分别为松弛时间和交通压力.松弛项表明车辆在速度  $V$  小于平衡速度  $V_e(\rho)$  时应该加速,反之则需减速.压力  $P = P(\rho)$  被假定为密度的增函数,即  $P'(\rho) > 0$ ,说明下游的密度较小即  $\rho_x < 0$  时,车辆可以加速,反之则需减速.车辆实际的加速或减速依赖于松弛项和交通压力项之间的相互作用.

由 Payne<sup>[3]</sup>和 Whitham<sup>[4]</sup>首次给出的高阶模型(PW 模型)将压力函数取为  $P = c_0^2 \rho$ ,其中常

\* 收稿日期: 2011-03-23; 修订日期: 2011-06-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11072141)

作者简介: 李书峰(1981—),男,河南洛阳人,硕士生(E-mail: shufengli1981@gmail.com);

张鹏(1963—),男,云南个旧人,教授,博士(联系人.E-mail: pzhang@mail.shu.edu.cn).

数  $c_0 > 0$  为声速, Kerner 和 Konhäuser<sup>[5]</sup> (KK) 将压力函数修正为  $P = c_0^2 \rho - \eta_0 V_x$ , 其中常数  $\eta_0 > 0$  为扩散系数. 更重要的是, 他们通过引入非凸的基本图  $Q_e(\rho) \equiv \rho V_e(\rho)$ , 明显改进了 PW 模型, 使在松弛和压力项的相互作用下, KK 模型能够描述时停时走波, 也即交通流中最重要的非线性波. 关于高阶模型及其研究, 还可参考文献[6-11].

为简化类 Boltzmann 交通流模型<sup>[12-16]</sup> (相关讨论还可参考后续的研究<sup>[17-20]</sup>), 文献[21]仍以气体运动学为基础, 提出了如下的交通压力函数:

$$P = \frac{\rho \Theta}{1 - \rho s(V)} - \frac{\eta_0}{1 - \rho s(V)} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (3)$$

其中速度方差  $\Theta(x, t)$  为求解变量, 可由与热传导类似的方程确定:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + V \frac{\partial \Theta}{\partial x} = - \frac{2P}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{2}{\tau} (\Theta_e(\rho) - \Theta), \quad (4)$$

上式中

$$J = - \frac{\kappa_0}{1 - \rho s(V)} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \quad (5)$$

表示“速度方差的流量”,  $\Theta_e(\rho)$  为期望或平衡态下的速度方差,  $\kappa_0$  为正常数. 类似于方程(2), 方程(4)包含对流、扩散及松弛效应; 由方程(1)、(2)和(4)即构成其交通流流体力学模型. Helbing<sup>[21]</sup> 假定  $s(V) = 0$ , 我们称相对应的模型为“原模型”. 然而, 他认为将  $s(V)$  修正为

$$s(V) = l + V \Delta T \quad (6)$$

将更加合理, 其中  $l$  为平均车长,  $\Delta T$  可以视为驾驶员的平均反应时间, 从而  $V \Delta T$  为安全距离. 我们将对应于(6)的模型称为“改进模型”. 由于可通过移除方程(4)和(5), 并取  $\Theta = c_0^2$  和  $s(V) = 0$  得到 KK 模型, Helbing 模型可以视为对 KK 模型的改进.

本文定义了 Helbing 模型的标准守恒形式, 并证明了模型的双曲性质. 守恒形式的意义是保证能给出弱解的定义, 双曲性质则保证模型具有交通流描述所要求的有限传播速度. 虽然交通流不存在“动量”和“能量”守恒, 但确定的守恒形式是数学上所要求的. 读者可参考文献[8], 该文献通过给出 PW 模型的两种守恒形式, 说明不同的守恒形式会得到不同的激波. 然而, 迄今为止我们没有看到关于 Helbing 流体力学模型双曲性质或守恒形式的讨论. 相关内容见本文第 1 节.

基于守恒律方程弱解理论, 确定守恒形式更是为了设计合理的数值格式<sup>[22]</sup>. 通过处理扩散系数矩阵, 本文将 LDG 格式<sup>[23-25]</sup> 应用于 Helbing 模型. 虽然模型方程包含松弛项, 该项与对流项和扩散项相互作用产生复杂的非线性效应, 从而使标准 LDG 格式所具有的非线性稳定性<sup>[23-24]</sup> 在这里不能得到保证, 不过数值模拟说明本文所设计的 LDG 格式对足够小的扩散系数仍能给出稳定和收敛的数值解. 相关讨论见第 2 节. 最后, 我们通过第 3 节总结全文.

## 1 模型方程的守恒形式和基本性质

为方便表达, 通过下面的替换将变量进行无量纲化:

$$x \rightarrow Lx, \quad t \rightarrow Lt/V_f, \quad \rho \rightarrow \rho_{\text{jam}} \rho, \quad V \rightarrow V_f V, \quad V_e(\rho) \rightarrow V_f V_e(\rho), \quad \Theta \rightarrow \Theta_0 \Theta, \\ \Theta_e(\rho) \rightarrow \Theta_0 \Theta_e(\rho), \quad \eta_0 \rightarrow L \rho_{\text{jam}} V_f \eta_0, \quad \kappa_0 \rightarrow L \rho_{\text{jam}} V_f \kappa_0, \quad \tau \rightarrow L \tau / V_f,$$

其中  $L$  为计算区域  $[0, L]$  的长度,  $V_f$  为畅行速度,  $\rho_{\text{jam}} (\equiv l^{-1})$  为最大密度,  $\Theta_0$  为最大速度方差, 具体值将随函数  $V_e(\rho)$  和  $\Theta_e(\rho)$  在第 2 节给出. 此外, 我们定义  $c_0 = \sqrt{\Theta_0} / V_f$  和  $s_0 = \rho_{\text{jam}} V_f \Delta T$ . 尽管无量纲化可能改变方程的形式, 但在下面的方程变换中, 我们仍采用相同的编号(1) ~

(6) 标记所对应的无量纲化方程.

### 1.1 守恒形式

方程(1)描述了质量守恒. 类似对流体力学方程所作的守恒变换, 可通过组合 (1)  $\times V$  + (2)  $\times \rho$  得到:

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V^2 + P)}{\partial x} = \frac{\rho}{\tau} (V_e(\rho) - V), \quad (7)$$

这类似于“动量守恒”方程. 然而, 另一守恒方程需通过较复杂的变换得到, 即通过组合 (1)  $\times (V^2 + c_0^2 \Theta)$  + (2)  $\times 2\rho V$  + (4)  $\times \rho$  给出:

$$\frac{\partial(\rho V^2 + c_0^2 \rho \Theta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V^3 + c_0^2 \rho V \Theta + 2PV)}{\partial x} = \frac{2\rho V (V_e(\rho) - V)}{\tau} - \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{2c_0^2 \rho}{\tau} (\Theta_e(\rho) - \Theta). \quad (8)$$

方程(8)类似于“能量守恒”. 将方程(3)、(5)和(6)代入方程(7)和(8), 则方程(1)、(7)和(8)构成如下的守恒方程组:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V^2 + c_0^2 \rho \Theta / (1 - \rho s(V)))}{\partial x} = \\ \quad \frac{\rho}{\tau} (V_e(\rho) - V) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta_0}{1 - \rho s(V)} \frac{\partial V}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial(\rho V^2 + c_0^2 \rho \Theta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V^3 + c_0^2 \rho V \Theta + 2c_0^2 \rho V \Theta / (1 - \rho s(V)))}{\partial x} = \\ \quad \frac{2\rho V}{\tau} (V_e(\rho) - V) + \frac{2c_0^2 \rho}{\tau} (\Theta_e(\rho) - \Theta) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2\eta_0 V}{1 - \rho s(V)} \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \\ \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c_0^2 \kappa_0}{1 - \rho s(V)} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right). \end{array} \right. \quad (9)$$

方程组(9)可与流体力学中的 Navier-Stokes 方程类比. 然而, 我们需明确证明方程组对流项部分的双曲性质.

### 1.2 双曲性

将守恒变量表示为  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T = (\rho, \rho V, \rho V^2 + c_0^2 \rho \Theta)^T$ , 则可将方程组(9)写为下面的向量形式:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x(\mathbf{u}) = \mathbf{S}(\mathbf{u}) + (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{u}_x)_x, \quad (10)$$

其中, 流量

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (f_1(\mathbf{u}), f_2(\mathbf{u}), f_3(\mathbf{u}))^T = \left( u_2, \frac{u_2^2}{u_1} + \frac{u_1 u_3 - u_2^2}{u_1(1 - u_1 - s_0 u_2)}, \frac{u_2 u_3}{u_1} + \frac{2(u_1 u_2 u_3 - u_2^3)}{u_1^2(1 - u_1 - s_0 u_2)} \right)^T,$$

源项

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \left( 0, \frac{u_1 V_e(u_1) - u_2}{\tau}, \frac{2[u_2 V_e(u_1) + c_0^2 u_1 \Theta_e(u_1) - u_3]}{\tau} \right)^T,$$

以及扩散系数矩阵

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\eta_0 u_2}{u_1^2(1-u_1-s_0 u_2)} & \frac{\eta_0}{u_1(1-u_1-s_0 u_2)} & 0 \\ \frac{-\kappa_0 u_1 u_3 + 2(\kappa_0 - \eta_0) u_2^2}{u_1^3(1-u_1-s_0 u_2)} & \frac{2(\eta_0 - \kappa_0)}{u_1^2(1-u_1-s_0 u_2)} & \frac{\kappa_0}{u_1(1-u_1-s_0 u_2)} \end{pmatrix}.$$

以上为包含扩散项双曲守恒方程的标准形式<sup>[22]</sup>.

通过求解特征多项式  $|\partial f(\mathbf{u})/\partial \mathbf{u} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ , 其中  $\partial f(\mathbf{u})/\partial \mathbf{u}$  表示  $f(\mathbf{u})$  的 Jacobi 矩阵,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵, 可以得到 3 个特征值:

$$\begin{cases} \lambda_1(\rho, V, \Theta) = V + \frac{s_0 c_0^2 \rho \Theta - \sqrt{(s_0 c_0^2 \rho \Theta)^2 + 12 c_0^2 \Theta (1 - \rho s(V))^2}}{2(1 - \rho s(V))^2}, \\ \lambda_2(\rho, V, \Theta) = V, \\ \lambda_3(\rho, V, \Theta) = V + \frac{s_0 c_0^2 \rho \Theta + \sqrt{(s_0 c_0^2 \rho \Theta)^2 + 12 c_0^2 \Theta (1 - \rho s(V))^2}}{2(1 - \rho s(V))^2}. \end{cases}$$

由于  $\{\lambda_i\}_{i=1}^3$  互不相同, 且满足  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ , 因而方程组(9)是严格双曲的.

## 2 数值模拟

只有基于标准守恒形式(10)来设计数值格式, 才能得到模型方程的弱解. LDG 方法能较好地处理扩散项, 从而较好地保障得到稳定和收敛的物理解. 其基本思想是将扩散项并入对流项, 使方程组看起来具有标准的守恒形式, 同时使对流和扩散效应能得到平衡, 取得较好的迎风效果. 可参考文献[23-25].

对本文所讨论的模型, 我们同时将松弛项并入对流项, 以期得到类似的、协调各项相互作用的效果.

### 2.1 数值格式

引入新向量  $\mathbf{q} = \mathbf{u}_x$  和  $\mathbf{p} = \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{u}(\xi, t)) d\xi$ , 从而将方程组(10)改写为

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{F}_x(\mathbf{u}, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{q} - \mathbf{u}_x = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{p} - \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{q}.$$

给定初值  $\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x)$  以及适当的边界条件, 可运用 LDG 方法得到方程组(11)的数值解  $\mathbf{u}_h(x, t)$ . 具体步骤可简述如下:

1) 将计算区间  $[0, L]$  (或无量化区间  $[0, 1]$ ) 分割为:  $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ , 在每一区间  $I_j$  上运用函数  $\mathbf{u}_h(x, t) \in \mathbf{u}(I_j)$  逼近解函数  $\mathbf{u}(x, t)$ . 其中  $\mathbf{u}(I_j)$  表示  $I_j$  上次数不超过  $k$  的多项式空间.

2) 在每一区间  $I_j$  上, 给出方程组(11) (及其初值  $\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x)$ ) 的弱形式, 由其导出半离散格式, 简记为如下常微分方程组:

$$\frac{d\mathbf{u}_h}{dt} = L(\mathbf{u}_h), \quad x \in I_j. \quad (12)$$

3) 运用 TVD Runge-Kutta 时间离散求解常微分方程组(12).

上述步骤 2) 所涉及的边界值  $F(\mathbf{u}(x_{j+1/2}, t), \mathbf{q}(x_{j+1/2}, t), \mathbf{p}(x_{j+1/2}, t))$  和  $\mathbf{u}(x_{j+1/2}, t)$  需由数值流通量  $\hat{F}$  和  $\hat{\mathbf{u}}$  逼近. 本文将这些数值流通量定义为

$$\hat{F}(\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^+; \mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+; \mathbf{p}) = \hat{f}(\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^+) - \frac{\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^-) \mathbf{q}^- + \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^+) \mathbf{q}^+}{2} - \mathbf{p},$$

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^+) = \frac{\mathbf{u}^- + \mathbf{u}^+}{2},$$

并将  $\hat{f}(\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^+)$  取为 Lax-Friedrichs 数值流通量:

$$\hat{f}(\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^+) = \frac{1}{2}[\mathbf{f}(\mathbf{u}^-) + \mathbf{f}(\mathbf{u}^+) - \alpha(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-)], \quad \alpha = \max_{\mathbf{u}} \max_{i \in \{1, 2, 3\}} |\lambda_i(\mathbf{u})|.$$

其中, 上标“-”和“+”分别表示对应向量在边界  $x = x_{j+1/2}$  左侧和右侧的间断解值. 此外, 在步骤 3) 中需对  $\mathbf{u}_b$  使用斜率限制器. 以下数值模拟在步骤 1) 和 2) 中取  $k = 1$ , 在步骤 3) 中采用三阶精度的时间离散.

## 2.2 数值模拟

取如下的参数值:

$$\tau = 0.5 \text{ min}, \quad \eta_0 = 600 \text{ km/h}, \quad \kappa_0 = 600 \text{ km/h}, \quad l = 5 \text{ m}, \quad \Delta T = 0.75 \text{ s}, \quad L = 10 \text{ km}.$$

同时, 将方程 (2) ~ (5) 中的函数  $V_e(\rho)$  和  $\Theta_e(\rho)$  取为

$$V_e(\rho) = V_f \left\{ \left[ 1 + \exp\left(\frac{\rho/\rho_{\text{jam}} - 0.25}{0.06}\right) \right]^{-1} - 3.72 \times 10^{-6} \right\},$$

$$\Theta_e(\rho) = \Theta_0 \left\{ \left[ 1 + \exp\left(\frac{\rho/\rho_{\text{jam}} - 0.25}{0.06}\right) \right]^{-1} - 3.72 \times 10^{-6} \right\},$$

其中,  $V_f = 120 \text{ km/h}$ ,  $\rho_{\text{jam}} = 200 \text{ km}^{-1}$  和  $\Theta_0 = (45 \text{ km/h})^2$ . 采用周期边界和假定如下的初值:

$$\begin{cases} \rho(x, 0) = 0.3\rho_{\text{jam}}, \\ V(x, 0) = V_e(\rho(x, 0))(1 + 0.01\sin(2\pi x/L)), \\ \Theta(x, 0) = \Theta_e(\rho(x, 0)). \end{cases} \quad (13)$$

上述设定与文献[21]完全一致.

若移除  $0.01\sin(2\pi x/L)$ , 初值(13)显然可以给出模型的一个平衡解. 换言之, 初值是对平衡解的扰动. 线性稳定性分析表明原模型和改进模型的以上平衡解是不稳定的<sup>[21]</sup>, 因此可以预期交通演化将远离上述平衡态. 图 1 显示了  $t \leq 1 \text{ h}$  的密度演化情况. 图 2 则显示交通状态最终可以演化为稳定的、几乎不改变形状的行波, 即我们所熟知的时停时走波.

通过对图 1 和图 2 的比较, 可以看出由改进模型能够得到较小的最大密度值和较光滑的波形. 这些差别缘于守恒方程组 (9) 中扩散系数的不同. 由物理要求, 这些系数必须非负以保证模型的稳定性. 这一要求对原模型显而易见, 对改进模型却隐含

$$1 - \rho s(V) \geq 0 \text{ 或 } \rho \leq \frac{\rho_{\text{jam}}}{1 + V\Delta T\rho_{\text{jam}}},$$

由此可得小于  $\rho_{\text{jam}}$  的密度上界. 从上面的不等式还可看出, 驾驶员对交通变化反应越快, 上述密度上界越小, 因此可避免出现极端高密度和车辆碰撞. 这说明通过对扩散系数校正确实改进了原模型.

通过设定相同参数, 图 1(b) 得到与文献[21]几乎完全相同的数值结果, 不过文献[21]的结果是基于非守恒格式并采用了经典的 Lax-Wendroff (LW). 我们认为上述的相同或相似缘于较大的扩散系数  $\eta_0 = \kappa_0 = 600 \text{ km/h}$ , 这些系数也可以理解为扩散效应传播速度. 众所周知, 较

大的扩散效应可以增强经典数值格式如 LW 格式的数值稳定性. 此外, 较大的扩散效应还会使解函数足够光滑, 从而极大减小由守恒和非守恒模型方程得到的数值解之间的差别. 然而, 同样众所周知的是, 随扩散系数 ( $\eta_0$  和  $\kappa_0$ ) 越来越小, 类似 LW 的经典有限差分格式将导致非物理震荡, 直至完全失去数值稳定性.

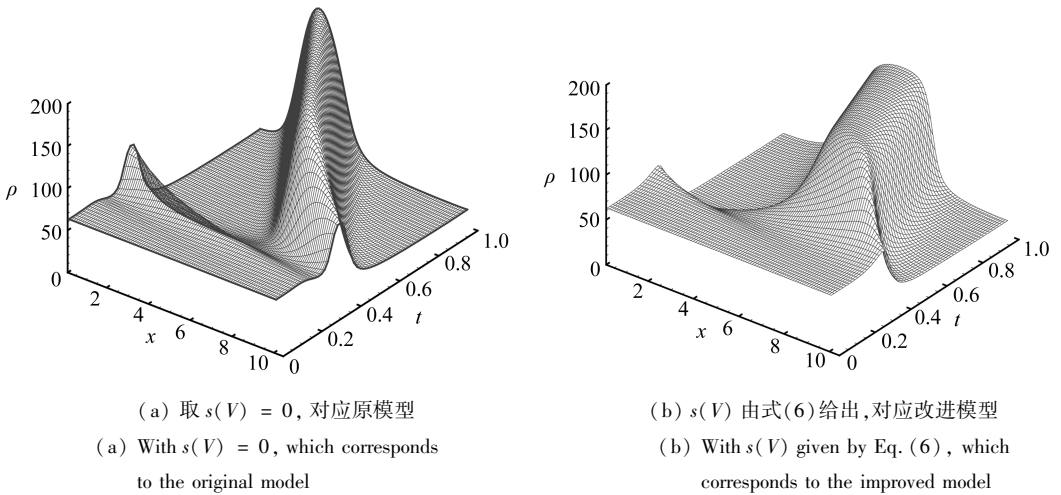


图1 由对初始平衡解状态扰动(13)所引起的交通演化

Fig. 1 Evolution of traffic flow under the perturbed equilibrium initial state Eq. (13)

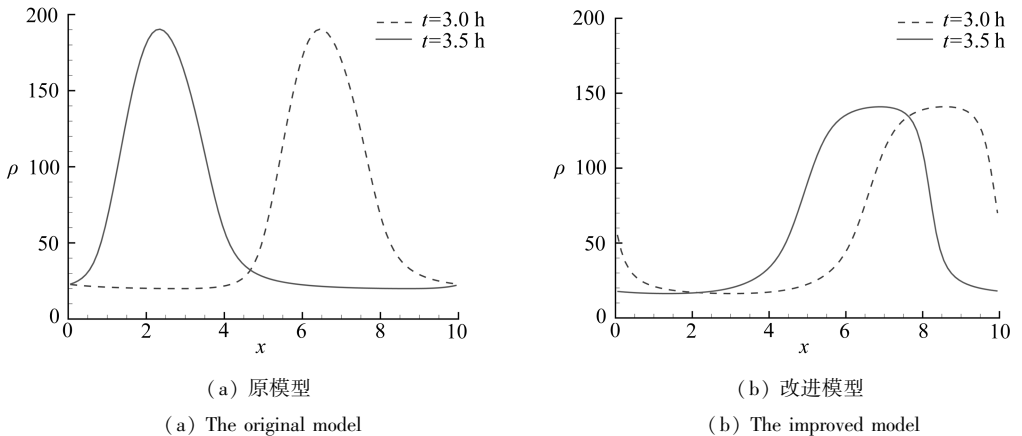


图2 模拟的时停时走波密度波形

Fig. 2 Density profiles indicating a stop-and-go traveling wave

注意到扩散系数  $\eta_0$  和  $\kappa_0$  仅仅是理论参数, 其取值应允许足够的范围以便与实测数据比较. 因此, 数值格式也应允许  $\eta_0$  和  $\kappa_0$  的取值变化, 尤其是当  $\eta_0$  和  $\kappa_0$  较小时仍然适用. 对标准的对流-扩散方程, LDG 格式对足够小的扩散系数可以保证某些非线性稳定性 (如  $L_1$  和 TV 稳定)<sup>[23-24]</sup>. 然而, 本文所讨论的模型还包含松弛项, 因此类似的稳定性不能从理论上得到保证.

我们取扩散系数  $\eta_0 = \kappa_0$  的 3 组较小的值, 而其它参数取值不变, 所得数值结果如图 3 所示. 对原模型和改进模型, 可以看到最大密度随扩散系数减小而增大这一合理变化. 同时, 还可以观察到由改进模型所产生的时停时走波的下游波阵面变陡, 非常接近于激波; 而由原模型产生的下游波阵面无明显变化.

注意到其对扩散系数变化的敏感性以及向上游传播的特性, 上述波阵面 (尤其是对改进

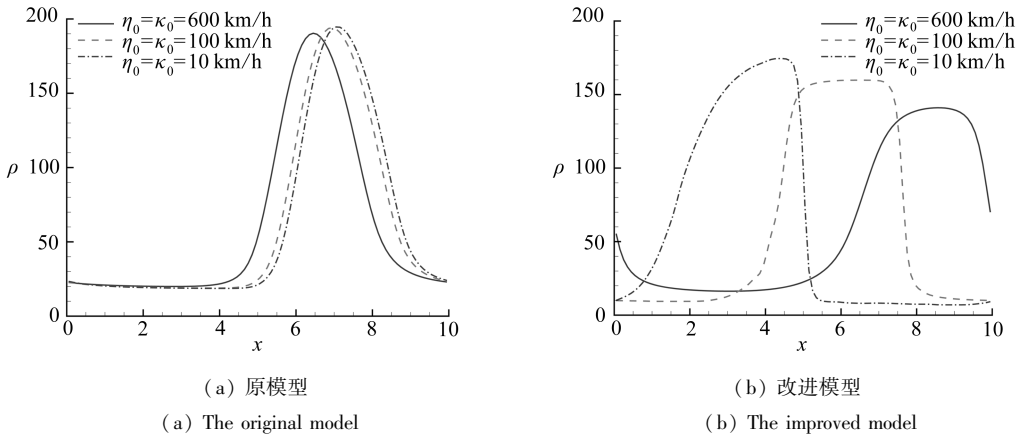


图3  $t = 3$  h 时的密度分布,其中取较小的扩散项系数  $\eta_0 = \kappa_0$

Fig.3 Density profiles at  $t = 3$  h, with smaller diffusion coefficients  $\eta_0 = \kappa_0$

模型而言)主要与  $\lambda_1$ -特征场有关,其中,声速  $c_1 \equiv V - \lambda_1$  关于  $s(V)$  单调递增.而我们指出,较大声速对应较强的非线性效应,因此对这一特征场而言,改进模型(对应  $s(V) > 0$ )具有比原始模型(对应  $s(V) = 0$ )更强的非线性效应.这解释了图3(a)和(b)中下游波阵面的不同变化趋势.

与经验数据比较,以上取值  $\eta_0 = \kappa_0 = 10$  km/h 已经足够小.然而,当我们为检验数值格式的稳定性而取  $\eta_0 = \kappa_0 = 5$  km/h 或更小时,则得到失真或不稳定的解.进一步的改进同样应基于方程组(11),通过引入“迎风”限制器,其作用是使松弛效应与对流和扩散效应能得到较好的耦合.

### 3 结 论

本文推导了 Helbing 交通流动力学模型的标准守恒形式并证明其双曲性.通过合理处理扩散和松弛项,设计了适于求解这一模型的 LDG 方法.通过数值模拟再现了从不稳定平衡态到时停时走波的演化.与原始模型比较,由改进模型模拟所得到的时停时走行波具有较光滑的波形和较小的最大密度值.通过比较扩散系数,可以看出改进模型具有更小的密度上界,由此可确保模型不会产生车辆相撞的结果.基于以上守恒形式及其相应的数值格式,在进一步的研究中还可得到这一模型更多的性质.

本文所设计的 LDG 格式保证了取足够小扩散系数时的数值稳定性,但仍需改进以处理扩散系数更小或消失的情形.

**致谢** 作者感谢上海高校创新团队建设项目、香港大学研究会 SPACE 研究基金和香港大学工学院配套基金(201007176059)的资助.

### 参考文献:

- [1] Lighthill M J, Whitham G B. On kinematic waves II: a theory of traffic flow on long crowded roads[J]. *Proc Roy Soc A*, 1955, **229**(1178): 317-345.
- [2] Richards P I. Shock waves on the highway[J]. *Operations Research*, 1956, **4**(1): 42-51.
- [3] Payne H J. Models of freeway traffic and control[C]//Bekey A G. *Mathematical Models of Public Systems*. Simulation Council Proc, La Jolla, 1971, **1**: 51-61.

- [4] Whitham G B. *Linear and Nonlinear Waves*[M]. New York: John Wiley and Sons, 1974.
- [5] Kerner B S, Konhäuser P. Structure and parameters of clusters in traffic flow[J]. *Phys Rev E*, 1994, **50**(1): 54-83.
- [6] Siebel F, Mauser W. On the fundamental diagram of traffic flow[J]. *SIAM J Appl Math*, 2006, **66**(4): 1150-1162.
- [7] Zhang P, Wong S C, Dai S Q. Characteristic parameters of a wide cluster in a higher-order traffic flow model[J]. *Chin Phys Lett*, 2006, **23**(2): 516-519.
- [8] Zhang P, Wong S C. Essence of conservation forms in the traveling wave solutions of higher-order traffic flow models[J]. *Phys Rev E*, 2006, **74**(2): 026109.
- [9] Xu R Y, Zhang P, Dai S Q, Wong S C. Admissibility of a wide cluster solution in anisotropic higher-order traffic flow models. [J]. *SIAM J Appl Math*, 2007, **68**(2): 562-573.
- [10] Zhang P, Wong S C, Dai S Q. A conserved higher-order anisotropic traffic flow model: description of equilibrium and non-equilibrium flows[J]. *Transpn Res Part B*, 2009, **43**(5): 562-574.
- [11] Tang T Q, Huang H J, Shang H Y. A new macro model for traffic flow with the consideration of the driver's forecast effect[J]. *Physics Letters A*, 2010, **374**(15/16): 1668-1672.
- [12] Prigogine I, Herman R. *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*[M]. New York: American Elsevier Publishing Co, 1971.
- [13] Pavari-Fontana S L. On Boltzmann-like treatments for traffic flow; a critical review of the basic model and an alternative proposal for dilute traffic analysis[J]. *Transpn Res*, 1975, **9**(4): 225-235.
- [14] Phillips W. *Kinetic Model for Traffic Flow*[M]. Springfield, VA: National Technical Information Service, 1977.
- [15] Helbing D. A fluid-dynamic model for the movement of pedestrians[J]. *Complex Systems*, 1992, **6**(5): 391-415.
- [16] Helbing D, Hennecke A, Shvetsov V, Treiber M. Master; macroscopic traffic simulation based on a gas-kinetic, non-local traffic model[J]. *Transpn Res Part B*, 2001, **35**(2): 183-211.
- [17] Hoogendoorn S P, Bovy P H L. Continuum modeling of multiclass traffic flow[J]. *Transpn Res Part B*, 2000, **34**(2): 123-146.
- [18] Hoogendoorn S P, Bovy P H L. Generic gas-kinetic traffic systems modeling with applications to vehicular traffic flow[J]. *Transpn Res Part B*, 2001, **35**(4): 317-336.
- [19] Ngoduy D. Derivation of continuum traffic model for weaving sections on freeways[J]. *Transportmetrica*, 2006, **2**(3): 199-222.
- [20] Ngoduy D. Application of gas-kinetic theory to modeling mixed traffic of manual and ACC vehicles[J]. *Transportmetrica*, doi:10.1080/18128600903578843.
- [21] Helbing D. Improved fluid-dynamic model for vehicular traffic[J]. *Phys Rev E*, 1995, **51**(4): 3164-3169.
- [22] Liu T P. Hyperbolic and viscous conservation laws[C]//*CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 72*, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [23] Cockburn B, Lin S Y, Shu C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: one dimensional systems[J]. *J Comput Phys*, 1989, **84**(1): 90-113.
- [24] Cockburn B, Shu C W. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convec-



- tion-diffusion systems[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1998, **35**(6): 2440-2463.
- [25] Bassi F, Rebay S. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations[J]. *J Comput Phys*, 1997, **131**(2): 267-279.

## Conservation Form of Helbing's Fluid Dynamic Traffic Flow Model

LI Shu-feng<sup>1,3</sup>, ZHANG Peng<sup>1,3</sup>, Wong S C<sup>2</sup>

(1. *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;*

2. *Department of Civil Engineering, The University of Hong Kong, Pokfulam Road, Hong Kong SAR, P. R. China;*

3. *Shanghai Key Laboratory of Mechanics in Energy Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China*)

**Abstract:** A standard conservation form was derived, the hyperbolicity of Helbing's fluid dynamic traffic flow model was proved, which was essential for general analytical and numerical study of this model. On the basis of this conservation form, a local discontinuous Galerkin scheme is designed to solve the resulting model efficiently. The evolution of an unstable equilibrium traffic state leading to a stable stop-and-go traveling wave was simulated. This simulation also verifies that the model has been truly improved through the introduction of modified diffusion coefficients, thereby helping to protect vehicles from collisions and avoiding the appearance of extremely large density.

**Key words:** conservation form; hyperbolicity; local discontinuous Galerkin method; stop-and-go wave