

计及 Hall 和离子滑移电流的旋转流体 在与时间相关初值条件下的 MHD Couette 流动*

B·K·杰哈, C·A·阿佩雷

(艾哈迈杜贝罗大学 数学系,扎利亚,尼日利亚)

摘要: 考虑 Hall 和离子滑移电流的影响,在旋转系统中研究导电流体非稳定的 MHD Couette 流动.在小数值磁场 Reynolds 数假定下,推导出基本的控制方程,使用著名的 Laplace 变换技术,数值地求解该基本方程.分两种情况:磁场相对于流体或者移动平板固定时,得到速度和表面摩擦力统一的闭式表达式.用图形讨论了问题的不同参数,对速度和表面摩擦力的影响.所得结果显示,主流速度 u 和次生速度 v 随着 Hall 电流而增大.离子滑移电流的增大,也会导致主流速度 u 的增大,但会使次生速度 v 减小.还给出了旋转、Hall 和离子滑移参数的综合影响,确定了次生运动对流体流动的贡献.

关键词: MHD; Couette 流动; 旋转系统; Hall 和离子滑移电流; 加速运动

中图分类号: O357.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.04.001

符号说明

M	Hartmann 数	z	垂直于平板的无量纲坐标
r	Laplace 参数	μ	粘度系数
t'	有量纲时间	ν	动粘度系数
t	无量纲时间	β	Hall 因子
U	常数	β_e	Hall 参数
u', v', w'	速度场 V 的分量	β_i	离子滑移参数
u, v, w	无量纲速度分量	ρ	密度
k	导热率	σ	电导率
x', y', z'	Cartesian 坐标	τ	表面摩擦力
Ω'	沿 z 轴的常角速度	Ω	旋转参数

引 言

在 MHD 流动中, Coriolis 力和电磁力相互作用的研究十分重要.根据 Abo-Eldahab 和 ElAz-

* 收稿日期: 2011-06-06; 修订日期: 2011-12-16

作者简介: Clement A. Apere, 硕士(联系人. E-mail: adeapere@gmail.com).

本文原文为英文,黄锋译,张禄坤校.

$iz^{[1]}$, 计及 Hall 和离子滑移电流的 MHD Couette 流动, 在发电机组、Hall 加速器, 以及通道和管道流动中有着重要的工程应用. 在涡轮机械中、冶金时的凝固过程, 以及在一些天体物理问题中, 都存在旋转的 MHD 问题. Singh 和 Kumar^[2] 就没有旋转时, 对移动平板作脉冲运动和加速运动两种情形, 研究磁场对速度和表面摩擦力的影响, 并得到推论: 相对于移动平板固定的磁场, 上述两种情形的速度场是上升的. Singh 等^[3] 就一块平板作加速运动时, 研究导电流体 Couette 流动的瞬态特征. Seth 等^[4] 就一块平板在其自身平面内作速度随时间而变化的运动, 并在均匀横向磁场作用下, 研究导电粘性不可压缩流体, 在旋转系统中作非稳定的磁流体动力学流动. Guria 等^[5] 在旋转系统中完成了非稳定 Couette 流动的研究, 而 Guria 等^[6] 在一个倾斜磁场中完成了振荡 Couette 流动的研究. Seth 等^[7] 就倾斜磁场存在时, 在一个旋转系统中, 对粘性不可压缩导电流体, 研究稳定的磁流体动力学 Couette 流动. Das 等^[8] 在旋转系统中研究非稳定的 MHD Couette 流动. 在上述这些研究中, 都忽略了 Hall 和离子滑移的影响.

当磁场强度较高或者碰撞频率较低时, Hall 影响十分重要^[9]. 流体中所产生的感应电流, 通常电子占主导地位, 电子在数量上比离子要多得多. 在大多数情况下, 电子的迁移速度, 会导致次生的速度分量, 反过来, 又会导致次生力, 并在流动中引起各向异性的电导率. 由各向异性的电导率产生的电流分量, 被称为 Hall 电流. 无量纲乘积 $\omega_e \tau_e$, 常常被称为 Hall 参数, 在 MHD 设计中是一个重要的特征数值, 其中 ω_e 为电子回旋加速器频率, τ_e 为电子碰撞平均自由时间. 在微观尺度上, Hall 参数表示电子碰撞之间的平均角位移, 而在宏观尺度上, $\omega_e \tau_e$ 值显示 Hall 场和 Hall 电流的相对重要性. 如果电子的 $\omega_e \tau_e$ 和离子的 $\omega_i \tau_i$, 即 Hall 参数同时都很大, 这是某些弱离子气体中常有的事情, 电导率的下降, 应归于所谓的“离子滑移”现象. 尽管 τ_i 通常比 τ_e 大, 但 ω_i 比 ω_e 要小得多, 所以一般情况下, 乘积 $\omega_i \tau_i$ 可以忽略不计^[10].

从上面的论述可知, 当电子回旋加速器频率相对较高时, Hall 的影响不能忽略. 考虑到这个因素, Deka^[11] 就相对旋转流体水平加速的平板, 研究旋转和 Hall 电流对平板流体动力学流动的综合影响. Mazumdar^[12] 就流过振荡多孔平板的流体动力学流动, 研究 Hall 电流和旋转的共同影响. Ghosh^[13] 在一个任意磁场作用下的旋转系统中, 研究 Hall 电流和 Coriolis 力对 MHD Couette 流动的影响. Ghosh 和 Pop^[14], Debnath 等^[15], Mandal 和 Mandal^[16], Tiwari 和 Singh^[17] 及 Ghosh 和 Pop^[18] 在不同的条件下, 各自研究旋转系统中 Hall 电流对 MHD Couette 流动的影响. Attia^[19] 研究了温度随粘度和离子滑移变化的 MHD Couette 流动. 类似地, Attia^[20] 考虑了离子滑移, 检验传热非稳定的 Couette 流动. Ram^[21] 在旋转流体中, 研究 Hall 和离子滑移电流对放热自由对流的影响. 最近, Jha 和 Apere^[22] 在旋转系统中, 两块平行平板之间充满着粘性不可压缩导电流体, 当下面一块平板突然启动时, 研究 Hall 和离子滑移电流对 MHD Couette 流动的影响.

本文拓展了 Jha 和 Apere^[22] 的研究, 在一个旋转的参考^[22] 系统中, 当下面一块平板作均匀加速运动时, 研究旋转及 Hall 和离子滑移电流对 MHD Couette 流动的共同影响. 对旋转系统中的非稳定 MHD Couette 流动, Hall 和离子滑移电流依 Ohm 定律法为准. 得到速度和表面摩擦力的闭式解. 考虑了两种情况: 磁力线相对于移动流体固定, 或者相对于移动平板固定, 讨论了问题的不同参数, 如旋转参数 Ω 和 Hall 参数 β_e 及离子滑移参数 β_i 对流动的影响.

1 问题的公式化

假设在两无限平板之间, 充满着粘性不可压缩的导电流体, 推导流体在其间流动时的控制方程. 两块平板垂直于 z' -轴, 相距为 h , 平板从 $x' = -\infty$ 延伸到 ∞ , 从 $y' = -\infty$ 延伸到 ∞ , 下面

一块平板沿 x' -轴移动. 流体在两块平板之间沿 x' -方向流动, 有一均匀磁场垂直作用于平板. 假定磁场的 Reynolds 数值很小, 感应磁场可以忽略不计, 因此均匀磁场 \mathbf{B} 为一常数 $\mathbf{B} \equiv (0, 0, B_0)$, 并认为它是作用于流体的全部磁场. 但是, 假定它是一个强磁场, 因而电磁力很大, 从而产生 Hall 电流和离子滑移电流. Hall 和离子滑移电流使得 y' -轴向上的速度提高. 假定时间 $t' \leq 0$ 时, 流体、平板和磁力线均处于静止状态. 当 $t' > 0$ 时, 下面一块平板在其自身平面内、以速度 Ut'^n 开始移动, 其中 U 为一常数, 同时上面一块平板保持不动. 假定 z' -轴垂直于平板. 由于平板无限大, 除了压力之外, 所有物理量仅是 z' 和 t' 的函数. 由电量守恒方程 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, 可知 J_z' 为常数, 其中 $\mathbf{J} = (J_x', J_y', J_z')$. 因为假定平板不导电, 取该常数为 0. 因此, 流动中处处有 $J_z' = 0$. 问题的物理模型如图 1 所示. 如果 $\mathbf{V} = (u', v', w')$ 表示流场中的速度分量, 那么, 由连续方程 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, 得到 $w' = 0$. 在上述假定下, 应用有 Hall 和离子滑移电流时的广义 Ohm 定律 (见文献 [9]), 在一个旋转的参考坐标系中, Navier-Stokes 运动方程如下给出:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} - 2\Omega' v' = \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} (\gamma v' - \alpha u'), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + 2\Omega' u' = \nu \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} (\gamma u' + \alpha v'), \tag{2}$$

其中

$$\alpha = \frac{1 + \beta_e \beta_i}{(1 + \beta_e \beta_i)^2 + \beta_e^2},$$

$$\gamma = \frac{\beta_e}{(1 + \beta_e \beta_i)^2 + \beta_e^2}.$$

问题的初始-边界条件为

$$\begin{cases} u' = v' = 0, & 0 \leq z' \leq h, t' \leq 0, \\ u' = Ut'^n, v' = 0, & z' = 0, t' > 0; \\ u' = v' = 0, & z' = h, t' > 0. \end{cases} \tag{3}$$

当磁力线相对于流体固定时, 方程 (1) 和 (2) 是正确的. 如果磁场像平板一样, 以相同的速度加速移动, 那么我们必须改用相对运动速度来处理, 则方程 (1) 和方程 (2) 变成

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} - 2\Omega' v' = \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} [\gamma v' - \alpha (u' - Kut'^n)], \tag{4}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + 2\Omega' u' = \nu \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} [\gamma (u' - Kut'^n) + \alpha v'], \tag{5}$$

其中

$$K = \begin{cases} 0, & B_0 \text{ 相对于流体固定,} \\ 1, & B_0 \text{ 相对于移动平板固定.} \end{cases}$$

在方程 (4) 和 (5) 及初-边值条件 (3) 中, 引入下面无量纲量:

$$z = z'/h, u = \nu u'/(Uh^2), v = \nu v'/(Uh^2), t = \nu t'/h^2,$$

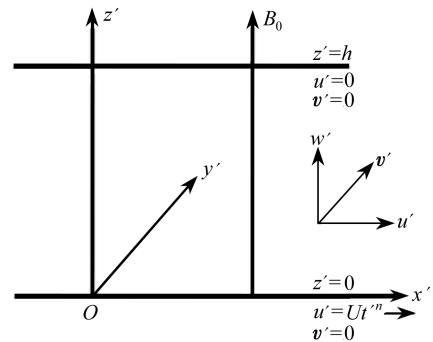


图 1 问题的物理模型

Fig. 1 Physical model of the problem

$$M = B_0 h \sqrt{\sigma / (2\nu\rho)}, \quad \Omega = \Omega' h^2 / \nu,$$

这里的所有物理量已在符号说明中定义,于是得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2v(\Omega + M^2\gamma) - 2M^2\alpha u + 2M^2Kt^n\alpha, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2u(\Omega + M^2\gamma) - 2M^2\alpha v + 2M^2Kt^n\gamma, \quad (7)$$

初-边值条件变为

$$\begin{cases} u = v = 0, & 0 \leq z \leq 1, t \leq 0, \\ u = t^n, v = 0, & \text{在 } z = 0, t > 0; \\ u = v = 0, & \text{在 } z = 1, t > 0. \end{cases} \quad (8)$$

如果定义复速度 $q = u + iv$, 并令 $n = 1$, 相当于本文要研究的加速运动, 则方程(6)和(7)变为

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - 2q[M^2\alpha + i(\Omega + M^2\gamma)] + 2M^2Kt(\alpha + i\gamma), \quad (9)$$

相应复数的无量纲初-边值条件为

$$\begin{cases} q = 0, & 0 \leq z \leq 1, t \leq 0, \\ q = t, & \text{在 } z = 0, t > 0; \\ q = 0, & z = 1, t > 0. \end{cases} \quad (10)$$

2 问题的解

对方程(9)及其相应的初-边值条件(10)作 Laplace 转换, 由此得到下面的常微分方程:

$$\frac{d^2 \bar{q}}{dz^2} - (m + r)\bar{q} = -\frac{2M^2K(\alpha + i\gamma)}{r^2}, \quad (11)$$

其中

$$\bar{q}(z, r) = \int_0^\infty q(z, t) e^{-rt} dt \quad (r > 0),$$

$$m = 2M^2\alpha + 2i(\Omega + M^2\gamma).$$

初-边值条件变为

$$\begin{cases} \bar{q} = r^{-2}, & \text{在 } z = 0, \\ \bar{q} = 0, & \text{在 } z = 1. \end{cases} \quad (12)$$

方程(11)及其变换后的初-边值条件(12)的解为

$$\bar{q}(z, r) = \frac{1}{r^2} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-a\delta} - e^{-b\delta}) + \frac{2M^2K(\alpha + i\gamma)}{r^2\delta^2} \left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [e^{-c\delta} + e^{-d\delta}] \right], \quad (13)$$

其中

$$\delta = \sqrt{m + r}, \quad a = 2k + z, \quad b = 2k + 2 - z, \quad c = k + z, \quad d = k + 1 - z.$$

对方程(13)进行逆变换, 得到速度分布 $q(z, t)$:

$$q(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} [f_1(t, a, m) - f_1(t, b, m)] - \lambda_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [f_1(t, c, m) + f_1(t, d, m)] + \lambda_2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [f_2(t, c, m) + f_2(t, d, m)] -$$

$$\lambda_2 e^{-mt} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [f_3(t, c, m) + f_3(t, d, m)] + \lambda_2 (mt - 1 + e^{-mt}), \quad (14)$$

其中, λ_1, λ_2 和函数 f_1, f_2 和 f_3 , 详见附录. 应用 MATLAB 7.2, 分离复数方程(14)的实部和虚部, 得到主流速度 u 和次生速度 v .

有趣地发现, 方程(9)中量 $\Omega + M^2\gamma$ 对 $q(=u + iv)$ 确定 v 的贡献十分重要, 尤其是当磁场相对于流体固定时, 这时候次生速度 v 完全依赖于该量, 因此, 次生速度 v 完全可以由增大或减小旋转参数、Hall 和离子滑移参数来加以控制.

当 Hall 和离子滑移参数都为 0 时, 发现方程(9)简化为文献[3]的结果. 此外, 如果 $\Omega \rightarrow 0$, 则结果简化为文献[2]的结果.

表面摩擦力 表面摩擦力 τ 定义为 $\partial q / \partial z$, 方程(14)对 z 求导, 得到

$$\begin{aligned} \tau = & \sum_{k=0}^{\infty} [f_4(t, a, m) - f_4(t, b, m)] - \lambda_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [f_4(t, c, m) + f_4(t, d, m)] + \\ & \lambda_2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [f_5(t, c, m) + f_5(t, d, m)] - \\ & \lambda_2 e^{-mt} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [f_6(t, c, m) + f_6(t, d, m)]. \end{aligned} \quad (15)$$

应用 MATLAB 7.2, 方程(15)分离为实部和虚部, 分别得到轴向表面摩擦力 τ_x 和横向表面摩擦力 τ_y :

$$\tau = \tau_x + i\tau_y. \quad (16)$$

方程(15)表示通道中不同流层间, 表面摩擦力的一般表达式. 得到下面一块平板 ($z = 0$) 上的表面摩擦力为

$$\begin{aligned} \tau_0 = & \left. \frac{\partial q}{\partial z} \right|_{z=0} = \\ & \sum_{k=0}^{\infty} [f_4(t, a_1, m) - f_4(t, b_1, m)] - \\ & \lambda_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [f_4(t, c_1, m) + f_4(t, d_1, m)] + \\ & \lambda_2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [f_5(t, c_1, m) + f_5(t, d_1, m)] - \\ & \lambda_2 e^{-mt} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [f_6(t, c_1, m) + f_6(t, d_1, m)], \end{aligned} \quad (17)$$

其中, $a_1 = 2k, b_1 = 2k + 2, c_1 = k$ 和 $d_1 = k + 1$. 函数 f_4, f_5 和 f_6 , 详见附录.

而上面一块平板 ($z = 1$) 上的表面摩擦力为

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \left. \frac{\partial q}{\partial z} \right|_{z=1} = \\ & \sum_{k=0}^{\infty} [f_4(t, a_2, m) - f_4(t, b_2, m)] - \\ & \lambda_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [f_4(t, c_2, m) + f_4(t, d_2, m)] + \\ & \lambda_2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [f_5(t, c_2, m) + f_5(t, d_2, m)] - \end{aligned}$$

$$\lambda_2 e^{-mt} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [f_6(t, c_2, m) + f_6(t, d_2, m)], \tag{18}$$

其中, $a_2 = 2k + 1$, $b_2 = 2k + 1$, $c_2 = k + 1$, $d_2 = k$.

由轴向表面摩擦力 τ_x 和横向表面摩擦力 τ_y 的绝对值合成, 计算出表面摩擦力结果在第 3 节中列出.

3 结果及讨论

为了研究无量纲参数取不同数值时, 旋转以及 Hall 和离子滑移电流对流动的影响, 图 2 至图 7 绘出了主流速度 u 和次生速度 v 随 z 的变化曲线. 在下面各小节中, 讨论这些参数的影响.

3.1 旋转的影响

图 2 表明, 对于 $K = 0$ 和 $K = 1$ 两种情况, 主流速度 u 都随着旋转参数的增大而减小. 图 3(a) 显示, 当 $K = 0$ 时, 次生速度 v 的数值先是随着旋转参数的增大而减小, 直至通道中部附近, 然后随着旋转参数的增大而增大. 图 3(b) 可以发现, 次生速度 v 的量值随着旋转参数的增大而增大. 这正是熟知的 Coriolis 力对次生流动的影响.

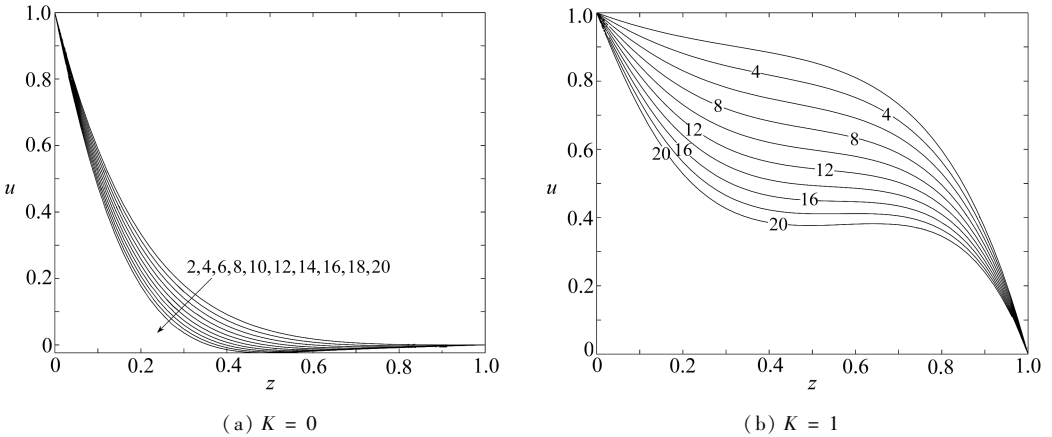


图 2 旋转对主流速度 u 的影响 ($M = 10.0$, $t = 1$, $\beta_e = 5.0$, $\beta_i = 1.0$)

Fig. 2 Effect of rotation on primary velocity profile u ($M = 10.0$, $t = 1$, $\beta_e = 5.0$, $\beta_i = 1.0$)

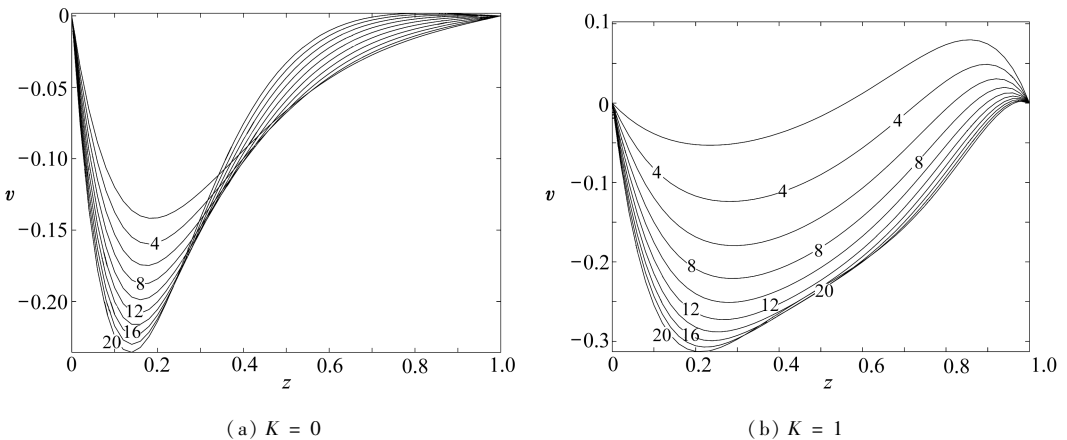


图 3 旋转对次生速度 v 的影响 ($M = 10.0$, $t = 1$, $\beta_e = 5.0$, $\beta_i = 1.0$)

Fig. 3 Effect of rotation on secondary velocity profile v ($M = 10.0$, $t = 1$, $\beta_e = 5.0$, $\beta_i = 1.0$)

3.2 Hall 电流的影响

由图 4(a) 可以发现, 当 $K = 0$ 时, 主流速度 u 随着 Hall 电流的增大而增大。但是, 当 $K = 1$ 时, 情况正相反, 见图 4(b), 这正是磁场相对于移动平板固定的结果。紧接着研究图 5(a) 发现, 靠近下面一块均匀加速平板处, 随着 Hall 参数的增大, 对次生速度 v 的影响很小, 或者基本没有影响, 但是当 $z > 0.1$ 以后, 随着 Hall 参数的增大, 导致次生速度 v 量值的增大。由图 5(b) 可见, 在通道的前半部分, 次生速度 v 的量值随着 Hall 电流的增大而增大, 以后反而减小, 直至静止的上壁面, 这时候 Hall 电流对次生流动就无关紧要了。

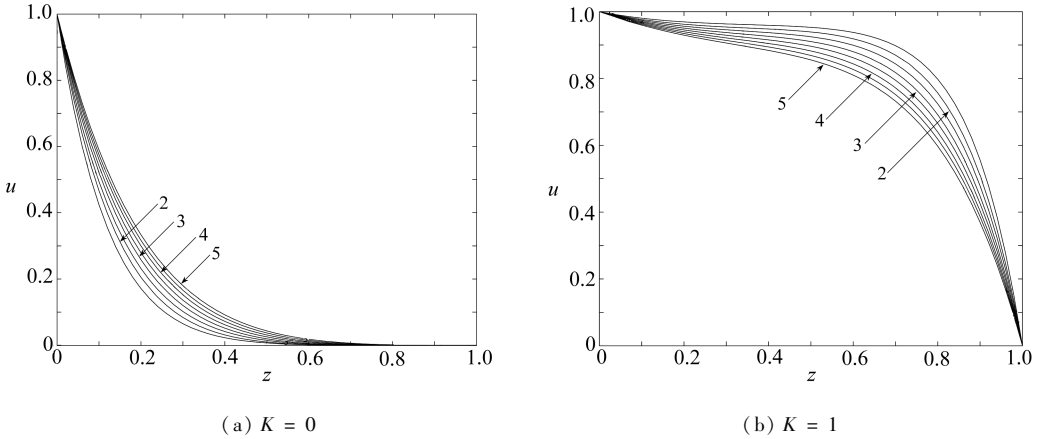


图 4 有离子滑移时, Hall 电流对主流速度 u 的影响 ($M = 10.0, \Omega = 2.0, t = 1.0, \beta_i = 1.0$)

Fig. 4 Effect of Hall current in the presence of ion-slip on primary velocity profile u
($M = 10.0, \Omega = 2.0, t = 1.0, \beta_i = 1.0$)

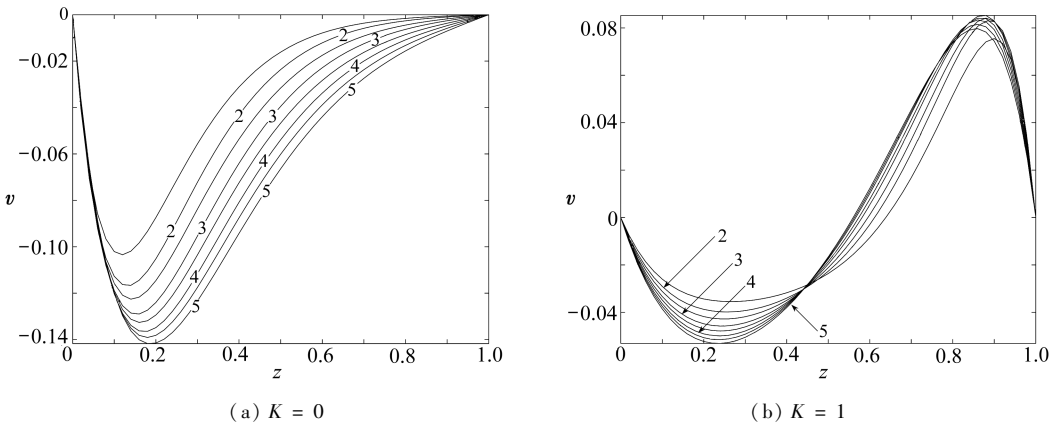
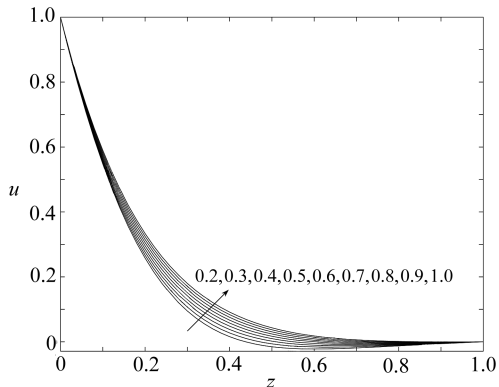


图 5 有离子滑移时, Hall 电流对次生速度 v 的影响 ($M = 10.0, \Omega = 2.0, t = 1.0, \beta_i = 1.0$)

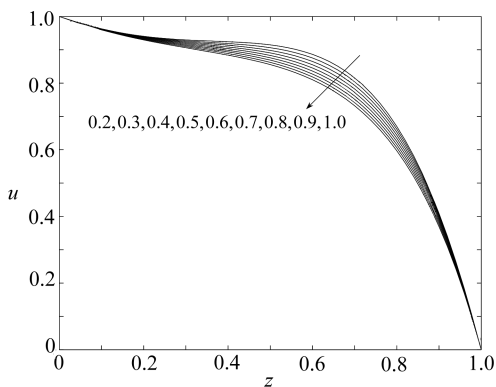
Fig. 5 Effect of Hall current in the presence of ion-slip on secondary velocity profile v
($M = 10.0, \Omega = 2.0, t = 1.0, \beta_i = 1.0$)

3.3 离子滑移的影响

离子滑移参数的影响如图 6 和图 7 所示。由图 6 可以发现, 当磁场相对于流体固定时, 主流速度 u 随离子滑移参数的增大而增大 (见图 6(a)); 当磁场相对于移动平板固定时, 主流速度 u 随离子滑移参数的增大而减小 (见图 6(b))。由图 7(a) 可以发现, 当 $K = 0$ 时, 在通道的前半段, 次生速度 v 的量值随着离子参数的增大而减小, 在通道后半段, 次生速度 v 的量值随着离子参数的增大而增大。图 7(b) 可以发现, 当 $K = 1$ 时, 离子参数的增大, 会导致次生速度 v 的减小。



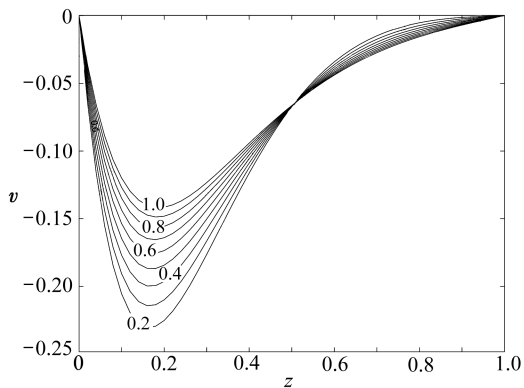
(a) $K = 0$



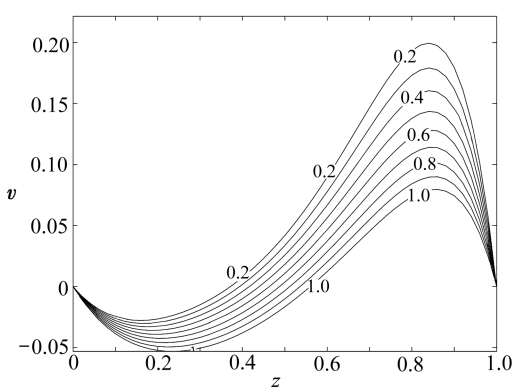
(b) $K = 1$

图6 离子滑移对主流速度 u 的影响 ($M = 10.0, \Omega = 2.0, t = 1.0, \beta_e = 5.0$)

Fig.6 Effect of ion-slip on primary velocity profile u ($M = 10.0, \Omega = 2.0, t = 1.0, \beta_e = 5.0$)



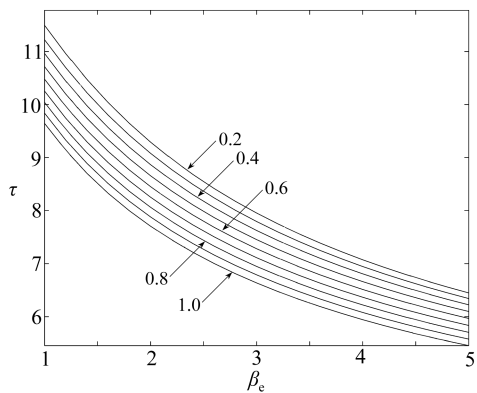
(a) $K = 0$



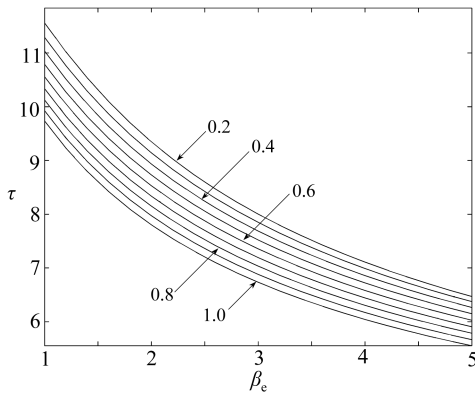
(b) $K = 1$

图7 离子滑移对次生速度 v 的影响 ($M = 10.0, \Omega = 2.0, t = 1.0, \beta_e = 5.0$)

Fig.7 Effect of ion-slip on secondary velocity profile v ($M = 10.0, \Omega = 2.0, t = 1.0, \beta_e = 5.0$)



(a) $K = 0$



(b) $K = 1$

图8 Hall 和离子滑移电流,对 $z = 0$ 处表面摩擦力合力的影响 ($\Omega = 2.0, M = 10.0, t = 1.0$)

Fig.8 Effect of Hall and ion-slip currents on the resultant skin friction at $z = 0$ ($\Omega = 2.0, M = 10.0, t = 1.0$)

3.4 对表面摩擦力的影响

图8 就 $K = 0$ 和 $K = 1$ 两种情形,给出 $z = 0$ 处的表面摩擦力,随着 Hall 和离子滑移电流的

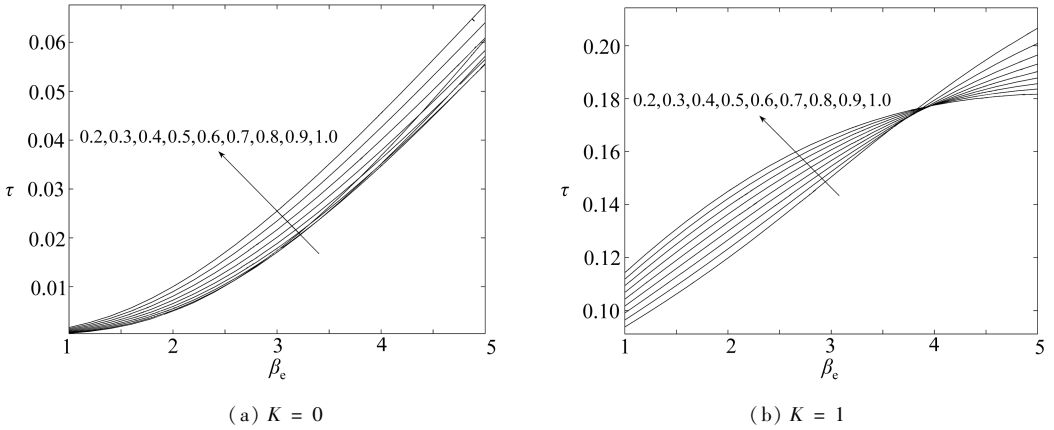


图9 Hall 和离子滑移电流,对 $z = 1$ 处表面摩擦力合力的影响 ($\Omega = 2.0, M = 10.0, t = 1.0$)

Fig. 9 Effect of Hall and ion-slip currents on the resultant skin friction at $z = 1$ ($\Omega = 2.0, M = 10.0, t = 1.0$)

增大,表面摩擦力都在减小.但是图 9 给出 $z = 1$ 处的表面摩擦力发现,当磁场相对于流体固定时(见图 9(a)),摩擦力随着 Hall 和离子滑移电流的增大而增大;当磁场相对于移动平板固定时(见图 9(b)),在紧靠移动平板一侧可以观察到与图 9(a) 同样的变化,值得注意的是,有一有助于离子滑移的逆转.令人感兴趣的是,当 $K = 1$ 时,移动平板上的表面摩擦力,与早期 Jha 和 Apere^[22] 研究脉冲运动时的表面摩擦力,在行为上正相反.

4 结 论

在一个旋转系统中,考虑下面一块平板作加速运动,计及 Hall 和离子滑移电流的作用时,对导电流体 MHD 的 Couette 流动给出其解析表达式.讨论了旋转参数、Hall 参数和离子滑移参数,对通道中速度和表面摩擦力的影响.引入的 Hall 和离子滑移项,使 y - 方向次生速度 v 分量上升,还影响到 x - 方向的主流速度 u . 得到的结果表明,主流速度 u 和次生速度 v 都随着 Hall 电流的增大而增大.离子滑移参数的增大,也会使主流速度 u 增大,但会使次生速度 v 减小.还给出了旋转参数、Hall 和离子滑移参数,对流体流动中次生运动的贡献.还发现,当磁场相对于移动平板固定时,表面摩擦力的行为,与早期 Jha 和 Apere^[22] 研究脉冲运动时的表面摩擦力行为正相反.

附 录

用于定义速度和表面摩擦力的常数:

$$\lambda_1 = \frac{2M^2K(\alpha + i\gamma)}{m},$$

$$\lambda_2 = \frac{2M^2K(\alpha + i\gamma)}{m^2},$$

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \left[\left(x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_3}} \right) \exp(x_2 \sqrt{x_3}) \operatorname{erfc} \left(\frac{x_2}{2\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_1 x_3} \right) + \left(x_1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_3}} \right) \exp(-x_2 \sqrt{x_3}) \operatorname{erfc} \left(\frac{x_2}{2\sqrt{x_1}} - \sqrt{x_1 x_3} \right) \right],$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \left[\exp(x_2 \sqrt{x_3}) \operatorname{erfc} \left(\frac{x_2}{2\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_1 x_3} \right) + \right.$$

$$\exp(-x_2 \sqrt{x_3}) \operatorname{erfc}\left(\frac{x_2}{2\sqrt{x_1}} - \sqrt{x_1 x_3}\right) \Big],$$

$$f_3(x_1, x_2) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x_2}{2\sqrt{x_1}}\right),$$

$$f_4(x_1, x_2, x_3) = \pm \frac{1}{2} \left[\exp(x_2 \sqrt{x_3}) \operatorname{erfc}\left(\frac{x_2}{2\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_1 x_3}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{x_3}} + x_1 \sqrt{x_3} + x_2\right) - \sqrt{x_3} \exp(-x_2 \sqrt{x_3}) \operatorname{erfc}\left(\frac{x_2}{2\sqrt{x_1}} - \sqrt{x_1 x_3}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{x_3}} + x_1 \sqrt{x_3} - x_2\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi x_1}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{4} - x_1 x_3\right) \right],$$

$$f_5(x_1, x_2, x_3) = \pm \frac{1}{2} \left[\sqrt{x_3} \exp(x_2 \sqrt{x_3}) \operatorname{erfc}\left(\frac{x_2}{2\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_1 x_3}\right) - \sqrt{x_3} \exp(-x_2 \sqrt{x_3}) \operatorname{erfc}\left(\frac{x_2}{2\sqrt{x_1}} - \sqrt{x_1 x_3}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi x_1}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{4} - x_1 x_3\right) \right],$$

$$f_6(x_1, x_2) = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi x_1}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{4x_1}\right).$$

参考文献 (References) :

- [1] Abo-Eldahab E M, El Aziz M A. Viscous dissipation and Joule heating effects on MHD-free convection from a vertical plate with power-law variation in surface temperature in the presence of Hall and ion-slip currents[J]. *Appl Math Modelling*, 2005, **29**(6) : 579-595.
- [2] Singh A K, Kumar N. Unsteady hydromagnetic Couette flow[J]. *Wear*, 1983, **89**: 125-129.
- [3] Singh A K, Sacheti N C, Chandran P. Transient effects on magnetohydrodynamics Couette flow with rotation: accelerated motion[J]. *Int J Engng Sci*, 1994, **32**(1) : 133-139.
- [4] Seth G S, Jana R N, Maiti M K. Unsteady hydromagnetic Couette flow in a rotating system [J]. *Int J Engng Sci*, 1982, **20**(9) : 989-999.
- [5] Guria M, Jana R N, Ghosh S K. Unsteady Couette flow in a rotating system[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 2006, **41**(7/8) : 838-843.
- [6] Guria M, Jana R N, Ghosh S K. Oscillatory Couette flow in the presence of an inclined magnetic field[J]. *Meccanica*, 2009, **44**(5) : 555-564.
- [7] Seth G S, Nandkeolyar R, Mahto N, Singh S K. MHD Couette flow in a rotating system in the presence of an inclined magnetic field[J]. *Appl Math Sci*, 2009, **3**(59) : 2919-2932.
- [8] Das S, Maji S L, Guria M, Jana R N. Unsteady MHD Couette flow in a rotating system[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2009, **50**(7/8) : 1211-1217.
- [9] Sutton G, Sherman A. *Engineering Magnetohydrodynamics*[M]. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [10] Tillack M S, Morley N B. *Standard Handbook for Electrical Engineers: Magnetodynamics* [M]. New York: McGraw-Hill, 1998.
- [11] Deka R K. Hall effects on MHD flow past an accelerated plate[J]. *Theoret Appl Mech*, 2008, **35**(4) : 333-346.
- [12] Mazumdar B S. Combined effect of Hall current and rotation on hydromagnetic flow over an oscillating porous plate[J]. *Int J Engng Sci*, 1977, **15**(9/10) : 601-606.
- [13] Ghosh S K. Effect of Hall current on MHD Couette flow in a rotating system with arbitrary

- magnetic field[J]. *Czechoslov J Phys*, 2002, **52**(1): 51-63.
- [14] Ghosh S K, Pop I. Hall effects on MHD Couette flow in a rotating environment[J]. *Int J Appl Mech Eng*, 2004, **9**: 293-304.
- [15] Debnath L, Ray S C, Chatterjee A K. Effect of hall current and rotation on unsteady hydro-magnetic flow past a porous plate in a rotating system[J]. *ZAMM*, 1979, **59**: 469-471.
- [16] Mandal G, Mandal K K. Effect of Hall current on MHD Couette flow between thick arbitrarily conducting plate in a rotating system[J]. *J Phys Soc Japan*, 1983, **52**(2): 470-477.
- [17] Tiwari R, Singh K. Effect of Hall current on unsteady hydromagnetic boundary layers in rotating dusty fluid[J]. *Indian J Pure Appl Math*, 1983, **14**(1): 159-165.
- [18] Ghosh S K, Pop I. Hall effects on unsteady hydromagnetic flow in a rotating system with oscillatory pressure gradient[J]. *Int J Appl Mech Eng*, 2003, **8**: 43-56.
- [19] Attia H A. MHD Couette flow with temperature dependent viscosity and the ion-slip[J]. *Tamkang J of Sci and Engng*, 2005, **8**(1): 11-16.
- [20] Attia H A. Unsteady Couette flow with heat transfer considering ion-slip[J]. *Turk J Phys*, 2005, **29**(6): 379-388.
- [21] Ram P C. Effects of Hall and ion-slip currents on free convective heat generating flow in a rotating fluid[J]. *Int J of Energy Research*, 1995, **19**(5): 371-376.
- [22] Jha B K, Apere C A. Combined effect of Hall and ion-slip currents on unsteady MHD Couette flow in a rotating system[J]. *J Phys Soc Japan*, 2010, **79**(10): 104401/1-9.

Time-Dependent MHD Couette Flow of a Rotating Fluid With Hall and Ion-Slip Currents

Basant K. Jha, Clement A. Apere

(Department of Mathematics, Ahmadu Bello University, Zaria, Nigeria)

Abstract: The unsteady MHD Couette flow of an electrically conducting fluid in a rotating system was investigated taking Hall and ion-slip currents into consideration. The derived fundamental equations on the assumption of small magnetic Reynolds number were solved analytically by employing the well known Laplace transform technique. A unified closed form expressions for the velocity and the skin friction for the two different cases of the magnetic field being fixed to either the fluid or to the moving plate were obtained. The effects of the various parameters of the problem on the velocity and the skin friction were discussed through graphs. The result obtained revealed that the primary and the secondary velocities increases with Hall current. An increase in the ion-slip also led to an increase in the primary velocity but decreases the secondary velocity. It has also been shown that the combined effect of the rotation, Hall and ion-slip parameters determine the contribution of the secondary motion in the fluid flow.

Key words: MHD; Couette flow; rotating system; Hall and ion-slip currents; accelerated motion