

边界为三角形或四边形时反平面弹性或 Laplace 方程中的退化尺寸问题*

陈宜周

(江苏大学 工程力学研究所, 江苏 镇江 212013)

摘要: 对于反平面弹性或 Laplace 方程的外部边值问题, 给出了三角形或四边形周界时一系列退化尺寸问题的解, 并利用了 Schwarz-Christoffel 保角映象. 证实当某一尺寸“ R ”等于它的临界值或一个单位值时, 一个形式上简明的复位函数满足单位圆上位移为 0 的条件, 或 $w = 0$. 这就意味着在实际平面上的退化尺寸已经得到. 最后, 退化尺寸可从某些特殊积分得出, 这些积分依赖于保角映象中的诸参数, 给出了三角形或四边形周界时一系列退化尺寸问题的数值结果.

关键词: 退化尺寸; 保角映象方法; 三角形或四边形周界; 反平面弹性

中图分类号: O34; O241.85; O174.5 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.04.010

引 言

对于一个位势问题而言, 特别在反平面弹性或 Laplace 方程的外部边界值问题中, 一旦所采用的尺寸达到它的临界值, 业已证明边界积分方程存在着非唯一解^[1-2]. 事实上, 此非唯一解是由相应影响矩阵的零特征值引起的^[1]. 对于 Laplace 方程外边界值问题的圆形边界, 可以定义一个作用在边界上的算子 U . 相关运算 Ut (t - 向量) 可写为矩阵运算表示式 Ut . 从而可以研究矩阵 U 的特征值. 研究表明, 当圆形周界半径 $a = 1$ 时, 存在着等于 0 的一个特征值. 这意味着, 当 $a = 1$ 时代数方程式 $Ut = 0$ 有一个非平凡解. 在较早年代, Petrovsky, Jaswon, Symm 等研究者已指出了这一现象^[3-5].

Laplace 方程的边值问题可用偶合边界元方法来求解^[6]. 若使用常规的边界元方法, 会遇到退化尺寸问题. 此时, 相关影响矩阵是降秩的, 计算结果是不稳定的. 从而, 退化尺寸便成为边值问题中的一个病态条件. 对于矩形截面扭转杆, 曾做过专门的计算和校核. 计算表明, 若用退化尺寸作为实际尺寸, 抗扭刚度可达 75.21% 的误差^[6]. 曾有一些著作^[7-8] 研究了多连通区域边界积分方程中的退化尺寸问题.

许多研究者研究了平面弹性力学中的退化尺寸问题^[9-14]. 总体而言, 平面弹性力学中退化尺寸的概念和 Laplace 方程中的对应概念是同样的. 对于重调和方程, 圆形板的退化尺寸问题得到了研究. 圆形板的非唯一解用分析方法得到研究, 又求得了退化尺寸^[15].

* 收稿日期: 2011-11-24; 修订日期: 2012-01-20

作者简介: 陈宜周(1933—), 男, 浙江余姚人, 教授(Tel: +86-511-88780780; E-mail: chens@ ujs. edu. cn).

在反平面弹性的外边值问题中,对于一些三角形或四边形形状,本文提供了退化尺寸的一些解答.作为第一步,必须推导出保角映象函数,它把三角形或四边形形状的外部区域映象到单位圆的外部区域.自始至终,本文中利用了 Schwarz-Christoffel 保角映象^[16].

业已证明,一旦一个尺寸“ R ”达到它的临界值(或 $R = R_{cr} = 1$),一个形式上简明又定义在映象平面上的复位函数满足在圆周边界上的 0 位移条件(或 $w = 0$).这就意味着在实际平面上的退化尺寸已经得到.在这个得到的解中,沿着边界的位移取 0 值.然而,在外部区域中位移并不是 0 值.从而,当实际尺寸达到退化尺寸时,外部边值问题的 Dirichlet 问题中的解的唯一性定理不再立.

对于一系列三角形或四边形,基于 Schwarz-Christoffel 映象,文中导出了相关的保角映象^[16].进一步,退化尺寸的求出变成成为某些积分的求积.这些积分可以数值积出并具有较高精度.从而,退化尺寸也可以数值积出并具有较高精度.文中给出了众多关于三角形或四边形的退化尺寸的数值结果.

1 三角形边界时的退化尺寸问题

1.1 反平面弹性中边值问题退化尺寸推导的一般结果

退化尺寸的定义为:即使 0 位移假定在周界上,反平面弹性的边值问题仍存在着非平凡解.为了导出反平面弹性或 Laplace 方程中的退化尺寸问题,一已知结果介绍如下^[14].今假设有下列保角映象函数:

$$z = \omega(\zeta) = Rf(\zeta) \quad \left(R\text{-实值}; f(\zeta) = \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\zeta^k} \right). \quad (1)$$

它把单位圆外部(在 ζ 平面)映象到某一周界外部(在 z -平面)(图 1(a)).经过一系列推导后证明:“ R ”的临界值永远是一个单位值,或 $R = R_{cr} = 1$,其中下标“cr”表示临界值.此外,下列映象关系式

$$z = \omega(\zeta) \Big|_{R=1, \zeta = \exp(i\theta)} = f(\zeta) \Big|_{\zeta = \exp(i\theta)} \quad (2)$$

把 ζ 平面上的单位圆映象到 z 平面上的一个临界尺寸的周界.

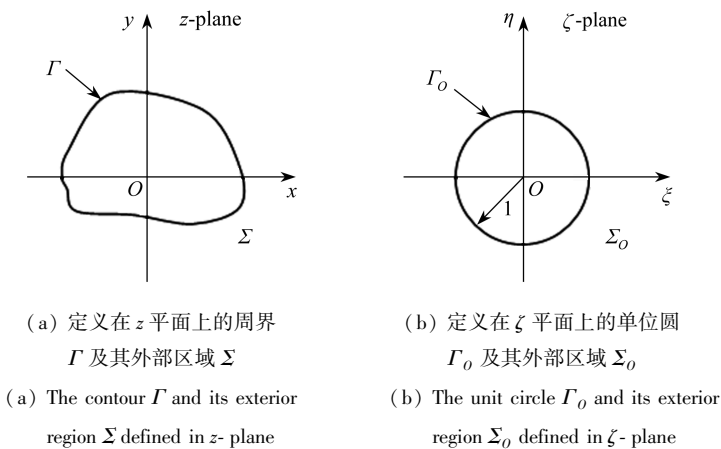


图 1 保角映象关系

Fig. 1 Mapping relation

上述结论可证明如下.当应用反平面弹性的一个复位函数 $\phi_1(z)$ 后,诸物理量可表示为^[17]

$$\phi_1(z) = Gw(x, y) + if(x, y),$$

$$\text{或 } Gw(x, y) = \frac{1}{2}(\phi_1(z) + \overline{\phi_1(z)}), f(x, y) = \frac{1}{2i}(\phi_1(z) - \overline{\phi_1(z)}) \quad (3)$$

$$f(x, y) = \int_{z_0}^z (\sigma_{x\bar{z}} dy - \sigma_{y\bar{z}} dx), \quad (4)$$

$$G \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma_{x\bar{z}} - i\sigma_{y\bar{z}} = \Phi_1(z) = \phi_1'(z), \quad (5)$$

式中, G 为剪切弹性模量, “ w ” 为纵向位移, “ f ” 为纵向合力函数, $\sigma_{x\bar{z}}$ 和 $\sigma_{y\bar{z}}$ 为应力分量, \bar{z} 为坐标, 又 $z = x + iy$. 在式(4)中, 积分是从固定点 z_0 开始而止于动点“ z ”.

显然, 位移分量满足下列 Laplace 方程:

$$\nabla^2 w(x, y) = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (6)$$

今考虑以周界 Γ 为界的外部区域 Σ 上的一个特殊边值问题(图 1(a)). 在此问题中, 设边界条件如下:

$$Gw|_{\Gamma} = \text{Re } \phi_1(z)|_{\Gamma} = 0. \quad (7)$$

今定义映象函数 $z = \omega(\zeta)$ 的反函数如下:

$$\zeta = \Omega(z). \quad (8)$$

当利用式(1)所示保角映象函数后, 由 $\phi_1(z)$ 导出的复位函数 $\phi(\zeta)$ 如下:

$$\phi(\zeta) = \phi_1(z)|_{z=\omega(\zeta)}, \quad (9)$$

或者, 有下列等式:

$$\phi_1(z) = \phi(\zeta)|_{\zeta=\Omega(z)}. \quad (10)$$

显然, $\phi_1(z)$ 和 $\phi(\zeta)$ 代表了弹性力学解.

利用式(1)所示保角映象后, 边界条件可改写为

$$Gw|_{\Gamma_0} = \text{Re } \phi(\zeta)|_{\Gamma_0} = 0. \quad (11)$$

今考虑一个特殊的复位函数如下:

$$\phi(\zeta) = \ln(R\zeta), \quad (12)$$

它定义在 ζ 平面上单位圆 Γ_0 以外的区域(图 1). 从而, 相应的复位函数 $\phi_1(z) = \phi(\zeta)|_{\zeta=\Omega(z)}$ 定义在 z 平面上周界 Γ 以外的区域.

显然, 由式(3)和(9)及(12)诸式, 沿着单位圆 Γ_0 (或 $\zeta = e^{i\theta}$) 有下式成立:

$$Gw|_{\zeta \in \Gamma_0} = Gw|_{\zeta = e^{i\theta}} = \text{Re } \phi(\zeta)|_{\zeta = e^{i\theta}} = \text{Re } \{ \ln R + \ln \zeta \}|_{\zeta = e^{i\theta}} = \ln R. \quad (13)$$

进一步, 令“ R ”取下列特殊值:

$$R = R_{cr} = 1. \quad (14)$$

把式(14)代入式(13), 便得

$$w|_{\zeta \in \Gamma_0} = 0 \quad (\text{在条件 } R = R_{cr} = 1 \text{ 下}). \quad (15)$$

在这里, 称 $R_{cr} = 1$ 为长度参量“ R ”的临界值, 或退化尺寸.

最后, 在条件 $R = R_{cr} = 1$, 一个非平凡解 $\phi(\zeta) = \ln(R\zeta)$ 便得到了, 它满足条件 $w|_{\zeta \in \Gamma_0} = 0$. 换言之, 在同样条件 $R = R_{cr} = 1$, 相应的非平凡解 $\phi_1(z) = \phi(\zeta)|_{\zeta=\Omega(z)}$ 也得到了. 值得指出,

在映象函数 $f(\zeta) = \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\zeta^k}$ 中的 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\zeta^k}$ 部分不会影响到临界值条件, 即 $R = R_{cr} = 1$.

1.2 三角形周界时的分析

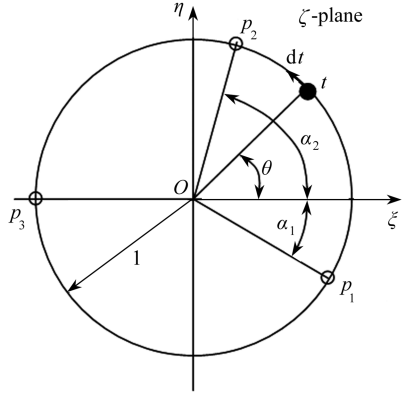
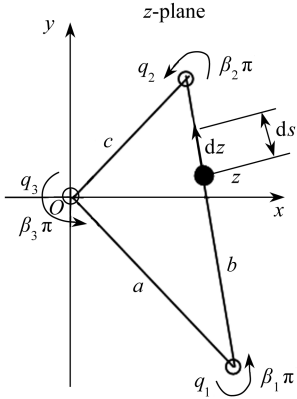
今假定保角映象函数取如下形式^[16](见图 2):

$$z = \omega(\zeta) =$$

$$R \int_1^\zeta \left(1 - \frac{p_1}{t}\right)^{\beta_1-1} \left(1 - \frac{p_2}{t}\right)^{\beta_2-1} \left(1 - \frac{p_3}{t}\right)^{\beta_3-1} dt + \text{const} \quad (R \text{ 实值}), \quad (16)$$

它把单位圆外部(在 ζ 平面上) 映象到三角形周界外部(在 z -平面上)。此外,3 个点 p_1, p_2, p_3 映象到三角形的3 个顶点 q_1, q_2, q_3 上。在式(16) 中, $\beta_1\pi, \beta_2\pi, \beta_3\pi$ 为3 个顶点 q_1, q_2, q_3 处相应的角度(图2)。显然,这些角度应满足下列等式:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 5. \quad (17)$$



$$a = \overline{q_3 q_1}, \quad b = \overline{q_1 q_2}, \quad c = \overline{q_2 q_3}$$

(a) 定义在 z 平面上的三角形及其外部区域映象

(b) 定义在 ζ 平面上的单位圆及其外部区域

(a) The triangle configuration and its exterior region (on z -plane)

(b) The unit circle and its exterior region (on ζ -plane)

图2 保角映象关系

Fig.2 Mapping relation

对于足够大的 $|t|$, 式(16) 中的积分项可改写为

$$h(t) = \left(1 - \frac{p_1}{t}\right)^{\beta_1-1} \left(1 - \frac{p_2}{t}\right)^{\beta_2-1} \left(1 - \frac{p_3}{t}\right)^{\beta_3-1} = 1 - \{(\beta_1 - 1)p_1 + (\beta_2 - 1)p_2 + (\beta_3 - 1)p_3\} \frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right). \quad (18)$$

在式(18) 中, $dt/t = d \ln t$ 积分后会出现 $\ln \zeta$ 那样的项。然而,这一项,或 $\ln \zeta$, 会破坏保角映象的单值条件。由于保角映象必须为一一对应的单值函数,则 $(1/t)$ 项前的系数定为0 值, 乃得

$$(\beta_1 - 1)p_1 + (\beta_2 - 1)p_2 + (\beta_3 - 1)p_3 = 0. \quad (19)$$

在式(18) 和(19) 中, 可令 $p_3 = -1$ 而不失一般性。此外, 在单位圆上, 可令 $p_1 = e^{i\alpha_1}$ 和 $p_2 = e^{i\alpha_2}$ 。于是, 式(19) 可改写为

$$(\beta_1 - 1) \cos \alpha_1 + (\beta_2 - 1) \cos \alpha_2 - (\beta_3 - 1) = 0, \quad (20)$$

$$(\beta_1 - 1) \sin \alpha_1 + (\beta_2 - 1) \sin \alpha_2 = 0. \quad (21)$$

当 $(\beta_1 - 1)$ 和 $(\beta_2 - 1)$ 取正值时, 由映象关系及式(21) 可知, α_2 定为正值而 α_1 为负值。由式(20) 和(21), 可得 α_2 和 α_1 的解如下:

$$\cos \alpha_2 = \frac{(\beta_2 - 1)^2 + (\beta_3 - 1)^2 - (\beta_1 - 1)^2}{2(\beta_2 - 1)(\beta_3 - 1)}, \quad (22)$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{(\beta_3 - 1) - (\beta_2 - 1) \cos \alpha_2}{\beta_1 - 1}. \quad (23)$$

最后,若 β_1 和 β_2 事先给定(注: $\beta_3 = 5 - \beta_1 - \beta_2$), 2 点 $p_1 (= \exp(i\alpha_1))$ 和 $p_2 (= \exp(i\alpha_2))$ 的位置也可决定. 换言之,除了长度“ R ”, 式(16)中一切参量已被定出.

此外,由于 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 5$, 保角映象式(16)可改写为

$$z = \omega(\zeta) = R \int_1^\zeta \frac{(t - p_1)^{\beta_1 - 1} (t - p_2)^{\beta_2 - 1} (t - p_3)^{\beta_3 - 1}}{t^2} dt + \text{const}. \quad (24)$$

由式(24),可得下列微分表示式:

$$dz/R = \frac{(t - p_1)^{\beta_1 - 1} (t - p_2)^{\beta_2 - 1} (t - p_3)^{\beta_3 - 1}}{t^2} dt. \quad (25)$$

假设“ t ”和微分“ dt ”均位于单位圆的圆弧 $p_1 p_2$ 上,乃得

$$t = \exp(i\theta), \quad dt = itd\theta. \quad (26)$$

同时,由图 2 可知

$$t - p_1 = f_1 \exp\left\{i \frac{\theta + \alpha_1 + \pi}{2}\right\}, \quad f_1 = 2 \sin \frac{|\theta - \alpha_1|}{2}, \quad (27)$$

$$(t - p_1)^{\beta_1 - 1} = f_1^{\beta_1 - 1} \exp\left\{\frac{i(\beta_1 - 1)(\theta + \alpha_1 + \pi)}{2}\right\}, \quad (28)$$

与上类同,可得

$$(t - p_2)^{\beta_2 - 1} = f_2^{\beta_2 - 1} \exp\left\{\frac{i(\beta_2 - 1)(\theta + \alpha_2 - \pi)}{2}\right\}, \quad f_2 = 2 \sin \frac{|\theta - \alpha_2|}{2}, \quad (29)$$

$$(t - p_3)^{\beta_3 - 1} = f_3^{\beta_3 - 1} \exp\left\{\frac{i(\beta_3 - 1)\theta}{2}\right\}, \quad f_3 = 2 \sin \frac{|\theta - \pi|}{2}. \quad (30)$$

把式(26)至(30)代入到式(25)中,又利用 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 5$, 便得下式(见图 2):

$$dz/R = f_1^{\beta_1 - 1} f_2^{\beta_2 - 1} f_3^{\beta_3 - 1} \exp(i\delta) d\theta, \quad (31)$$

其中

$$\delta = \frac{(\beta_1 - 1)(\alpha_1 + \pi) + (\beta_2 - 1)(\alpha_2 - \pi)}{2}. \quad (32)$$

由于 δ 的值不依赖于变量 θ 的值,因而当“ t ”沿着单位圆上的弧 $p_1 p_2$ 前进时,点“ z ”沿着直线 $q_1 q_2$ 前进. 此外,由式(31)可得弧长 ds (ds 实值)的表示式(见图 2)

$$ds/R = |dz/R| = f_1^{\beta_1 - 1} f_2^{\beta_2 - 1} f_3^{\beta_3 - 1} d\theta. \quad (33)$$

如上所述,只要取 $R = R_{cr} = 1$, 便得到退化尺寸. 从而,对式(33)沿着单位圆上圆弧 $p_1 p_2$ 进行积分,便得边长“ b ”的临界值如下:

$$b_{cr} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} g(\theta) d\theta, \quad (34)$$

其中

$$g(\theta) = \prod_{j=1}^3 \left(2 \sin \frac{|\theta - \alpha_j|}{2}\right)^{\beta_j - 1}. \quad (35)$$

与上类同,可以导出

$$c_{cr} = \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} g(\theta) d\theta \quad (\text{取 } \alpha_3 = \pi), \quad (36)$$

$$a_{cr} = \int_{\alpha_3}^{\alpha_1} g(\theta) d\theta \quad (\text{取 } \alpha_3 = -\pi). \quad (37)$$

1.3 三角形周界时的若干例子

如上所述,为了求出退化尺寸,全部工作归结为对式(34)和(36)及(37)那样的积分进行数值求积.为了求出式(34)所示的积分,要作下列代换:

$$\begin{cases} \theta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + u, h = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}, g\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + u\right) = g_1(u), \\ G(u) = g_1(u) \sqrt{h^2 - u^2}. \end{cases} \quad (38)$$

此外,要利用下列求积公式:

$$I = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} g(\theta) d\theta = \int_{-h}^h g\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + u\right) du = \int_{-h}^h g_1(u) du = \int_{-h}^h \frac{G(u)}{\sqrt{h^2 - u^2}} du = \frac{\pi}{M} \sum_{j=1}^M G(u_j) \quad (M \text{ 为整数}, u_j = h \cos((j - 0.5)\pi); j = 1, 2, \dots, M), \quad (39)$$

在计算时取 $M = 100$, 这可提供足够高的精度.

算例 1 在第 1 个例子中,考虑一个等角三角形,它有 2 个相等的角 $\gamma\pi$ (见图 3(a)). 3 条边的边长记成“a”,“b”和“a”. 当 $\gamma\pi$ 从 $\pi/36$ 变到 $17\pi/36$,边长“a”和“b”的退化尺寸分别列在表 1 中. 已经知道,当 $\gamma\pi \rightarrow 0$ 时,有 $a_{cr} = 2$ 和 $b_{cr} = 4$. 由列出的数据看出,当 $\gamma\pi = \pi/36$, 有 $a_{cr} = 1.9675$ 和 $b_{cr} = 3.9201$. 这一结果部分地证明了本方法取得了合理的结果. 其次,当 $\gamma\pi = 9\pi/36$, 有退化尺寸 $a_{cr} = 2.1025$, 而过去得到的结果也是 $a_{cr} = 2.1025^*$. 再者,当 $\gamma\pi = 12\pi/36$, 有退化尺寸 $a_{cr} = b_{cr} = 2.3711$, 而过去得到的结果是 $a_{cr} = b_{cr} = 2.3710^*$.

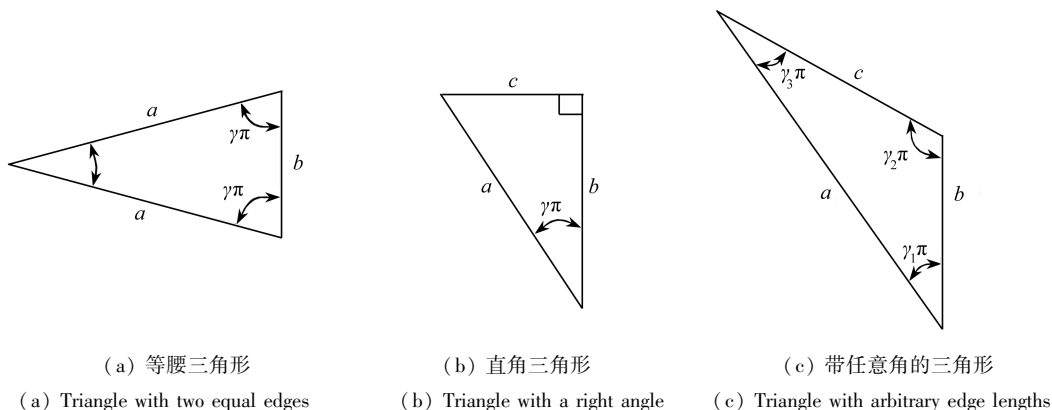


图 3 三角形周界的几种形状
Fig. 3 Configurations for triangles

算例 2 在第 2 个算例中,周界为直角三角形,又其中一个角为 $\gamma\pi$ (见图 3(b)),又 3 个边长各为“a”,“b”和“c”. 当 $\gamma\pi$ 从 $\pi/36$ 变到 $9\pi/36$,算出的退化尺寸 b_{cr} 和 c_{cr} 列出在表 2 中. 由表 2 可知,当 $\gamma\pi = 9\pi/36$, 有退化尺寸 $b_{cr} = c_{cr} = 2.1025$, 这一结果同于算例 1 所得的值.

算例 3 在第 3 个算例中,周界为直角三角形的各角均不相同,把它们记为 $\gamma_1\pi$, $\gamma_2\pi$ 和 $\gamma_3\pi$ ($\gamma_3 = 1 - \gamma_1 - \gamma_2$) (见图 3(c)). 对于下列情况: (a) $\gamma_1 + \gamma_2 = 1/6, 3/6, 5/6$; (b) $\gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2) = 0.1, 0.2, \dots, 0.5$; 3 个退化尺寸列出在表 3 中.

* 为 Chen J. T. 的私人交流文件(2011)。

表 1 对于等腰三角形周界的 2 个退化尺寸 a_{cr} 和 $b_{cr}(\gamma\pi$ 等腰角)(参看图 3(a))Table 1 Degenerate sizes for two edges, or a_{cr} and b_{cr} , for a triangle with two equal angles $\gamma\pi$ (see fig. 3(a))

a_{cr} values									
γ	1/36	2/36	3/36	4/36	5/38	6/36	7/36	8/36	9/36
a_{cr}	1.967 5	1.946 5	1.936 4	1.936 7	1.947 4	1.968 7	2.001 1	2.045 3	2.102 5
γ	10/36	11/36	12/36	13/6	14/36	15/36	16/36	17/36	
a_{cr}	2.174 2	2.262 7	2.371 1	2.503 3	2.665 5	2.866 7	3.121 9	3.460 6	
b_{cr} values									
γ	1/36	2/36	3/36	4/36	5/38	6/36	7/36	8/36	9/36
b_{cr}	3.920 1	3.833 9	3.740 8	3.639 8	3.529 9	3.409 9	3.278 4	3.133 5	2.973 3
γ	10/36	11/36	12/36	13/6	14/36	15/36	16/36	17/36	
b_{cr}	2.795 1	2.595 7	2.371 1	2.115 9	1.823 3	1.483 9	1.084 2	0.603 2	

表 2 对于直角三角形周界的 2 个退化尺寸 b_{cr} 和 $c_{cr}(\gamma\pi$ 一个锐角)(参看图 3(b))Table 2 Degenerate sizes for two edges, or b_{cr} and c_{cr} , for a triangle with a right angle $\pi/2$ and an angle $\gamma\pi$ (see fig. 3(b))

b_{cr} values									
γ	1/36	2/36	3/36	4/36	5/38	6/36	7/36	8/36	9/36
b_{cr}	3.676 2	3.433 3	3.218 5	3.019 4	2.829 9	2.646 1	2.465 1	2.284 5	2.102 5
c_{cr} values									
γ	1/36	2/36	3/36	4/36	5/38	6/36	7/36	8/36	9/36
c_{cr}	0.321 6	0.605 4	0.862 4	1.099 0	1.319 6	1.527 7	1.726 1	1.916 9	2.102 5

表 3 对于带有 3 个不等角 ($\gamma_1\pi, \gamma_2\pi$ 和 $\gamma_3\pi(\gamma_3 = 1 - \gamma_1 - \gamma_2)$) 三角形周界的 3 个退化尺寸 a_{cr}, b_{cr} 和 c_{cr} (参看图 3(c))Table 3 Degenerate sizes for three edges, or a_{cr}, b_{cr} and c_{cr} , for a triangle with three unequal angles $\gamma_1\pi, \gamma_2\pi$ and $\gamma_3\pi(\gamma_3 = 1 - \gamma_1 - \gamma_2)$ (see fig. 3(c))

a_{cr} values						
$\gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2)$		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
	1/6	3.523 1	3.102 6	2.703 6	2.316 7	1.936 4
$\gamma_1 + \gamma_2$	3/6	3.479 0	3.097 6	2.755 9	2.429 0	2.102 5
	5/6	3.620 5	3.409 9	3.230 8	3.055 5	2.866 7
b_{cr} values						
$\gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2)$		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
	1/6	3.880 1	3.814 0	3.772 1	3.748 5	3.740 8
$\gamma_1 + \gamma_2$	3/6	3.522 4	3.257 0	3.093 0	3.002 4	2.973 3
	5/6	2.560 1	1.968 7	1.672 4	1.527 7	1.483 9
c_{cr} values						
$\gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2)$		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
	1/6	0.406 1	0.797 3	1.180 2	1.558 7	1.936 4
$\gamma_1 + \gamma_2$	3/6	0.551 0	1.006 5	1.404 2	1.764 8	2.102 5
	5/6	1.325 2	1.968 7	2.365 1	2.646 1	2.866 7

显然, 当 $(\gamma_1 + \gamma_2) \rightarrow 0$ 和 $\gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2) \rightarrow 0$, 有下列退化尺寸值: $a_{cr} = 4$, $b_{cr} = 4$ 和 $c_{cr} = 0$. 由表 3 列出的值可知, 当 $(\gamma_1 + \gamma_2)\pi = \pi/6$ 和 $\gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2) = 0.1$, 有下列退化尺寸值: a_{cr}

= 3.523 1, $b_{cr} = 3.880 1$ 和 $c_{cr} = 0.406 1$. 这一结果证明了本方法取得了合理的结果.

2 四边形边界时的退化尺寸问题

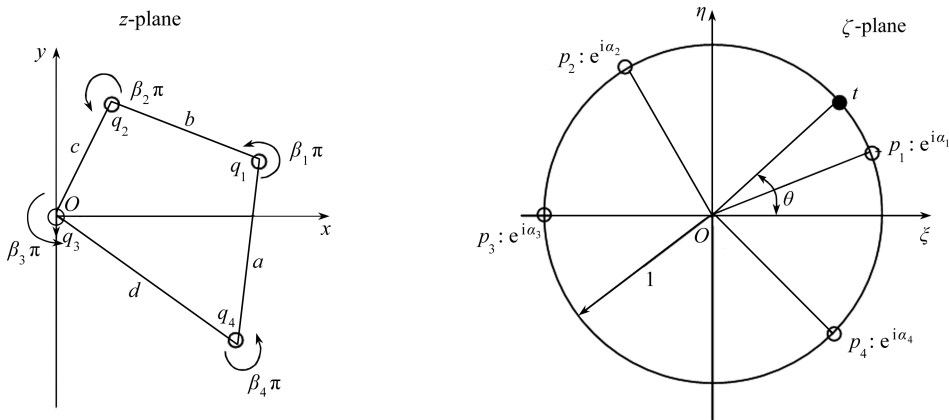
本节中介绍了四边形边界时的退化尺寸问题的一般解法. 对于 3 类四边形, 即矩形、平行四边形和梯形, 得出了相关的退化尺寸的计算结果.

2.1 四边形周界时的分析

类同于三角形周界的情况, 四边形周界时的映象函数如下(见图 4):

$$z = \omega(\zeta) =$$

$$R \int_1^\zeta \left(1 - \frac{p_1}{t}\right)^{\beta_1-1} \left(1 - \frac{p_2}{t}\right)^{\beta_2-1} \left(1 - \frac{p_3}{t}\right)^{\beta_3-1} \left(1 - \frac{p_4}{t}\right)^{\beta_4-1} dt + \text{const} \quad (R \text{ 实值}). \quad (40)$$



$$a = \overline{q_4 q_1}, b = \overline{q_1 q_2}, c = \overline{q_2 q_3}, d = \overline{q_3 q_4}, e^{i\alpha_3} = e^{i\pi} = -1$$

图 4 带任意四边形周界的保角映象关系

Fig. 4 Conformal mapping for the contour with quadrilateral shape

它把单位圆外部(在 ζ 平面上)映象到四边形周界外部(在 z -平面上). 此外, 4 个点 p_1, p_2, p_3 和 p_4 映象到四边形的 4 个顶点 q_1, q_2, q_3 和 q_4 上. 不失一般性, 可令 $p_3 = -1$. 在式(40)中, $\beta_1\pi, \beta_2\pi, \beta_3\pi$ 和 $\beta_4\pi$ 为 4 个顶点 q_1, q_2, q_3 和 q_4 处相应的角度(图 4). 显然, 这些角度应满足下列等式:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 6. \quad (41)$$

与式(19)类同, 保角映象函数应为单值. 于是, 由式(19)和(40)可得下列方程:

$$(\beta_1 - 1)p_1 + (\beta_2 - 1)p_2 + (\beta_3 - 1)p_3 + (\beta_4 - 1)p_4 = 0. \quad (42)$$

若四边形周界已给定, 则“ R ”的值及保角映象式(40)中的 $p_i (= \exp(i\alpha_i)) (i = 1, 2, 4)$ 可以定出. 不过, 这一推导及计算是相当复杂的. 与此相反, 若“ R ”的值及 $p_i (= \exp(i\alpha_i)) (i = 1, 2, 4)$ 已经给出($p_3 = -1$), 则长度“ a ”, “ b ”, “ c ”和“ d ”便可以定出. 相对而言, 后一情况更易操作和实施.

类同于三角形周界情况, 可得 $\overline{q_1 q_2}$ 边长“ b ”的值如下:

$$b = R \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} g(\theta) d\theta, \quad (43)$$

式中

$$g(\theta) = \prod_{j=1}^4 \left(2 \sin \frac{|\theta - \alpha_j|}{2} \right)^{\beta_j - 1}. \quad (44)$$

如上所述,当取 $R = R_{\text{cr}} = 1$ 时,便可得退化尺寸.于是,由式(43)可得“ b ”的退化尺寸如下:

$$b_{\text{cr}} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} g(\theta) d\theta, \quad (45)$$

与上类同,可得“ c ”,“ d ”和“ a ”的退化尺寸如下:

$$c_{\text{cr}} = \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} g(\theta) d\theta, \quad (46)$$

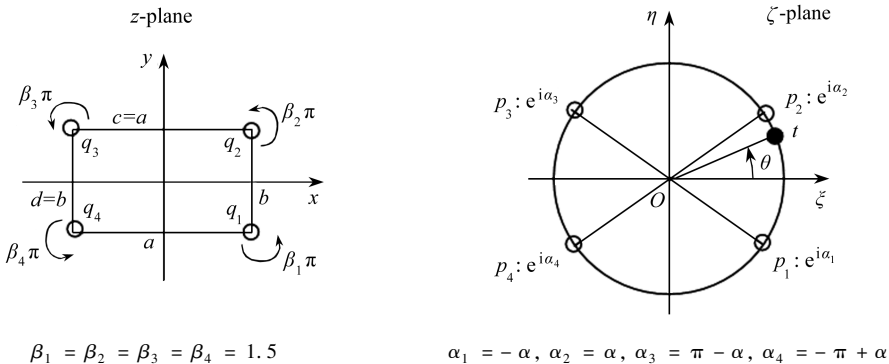
$$d_{\text{cr}} = \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} g(\theta) d\theta, \quad (47)$$

$$a_{\text{cr}} = \int_{\alpha_4}^{\alpha_1} g(\theta) d\theta. \quad (48)$$

2.2 四边形周界时的算例

今介绍 3 个算例如下:

算例 1 在第 1 个算例中,单位圆外部(在 ζ 平面上)映象到矩形周界外部(在 z -平面上)(见图 5).此外,诸点 p_1, p_2, p_3 和 p_4 各自映象到 q_1, q_2, q_3 和 q_4 .此矩形有宽度“ a ”和高度“ b ”.



$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1.5$$

$$\alpha_1 = -\alpha, \alpha_2 = \alpha, \alpha_3 = \pi - \alpha, \alpha_4 = -\pi + \alpha$$

图 5 带矩形周界的角象映关系

Fig. 5 Conformal mapping for the contour with rectangle shape

由图 5 所示的几何情况,可得(a) $p_3 = -p_1$ 和 $p_4 = -p_2$; (b) $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1.5$. 在提到的 2 个情况下,条件式(42)总是得到满足.在式(44)中代入(a) $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1.5$; (b) $\alpha_1 = -\alpha, \alpha_2 = \alpha, \alpha_3 = \pi - \alpha$ 和 $\alpha_4 = -\pi + \alpha$; 又沿弧 $p_1 p_2$ 积分,便得尺寸“ b ”的退化尺寸如下:

$$b_{\text{cr}} = 2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \theta} d\theta. \quad (49)$$

与此类同,可得尺寸“ a ”的退化尺寸如下:

$$a_{\text{cr}} = 2 \int_{-\beta}^{\beta} \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \theta} d\theta, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha. \quad (50)$$

当 α 从 $\pi/36$ 变到 $9\pi/36$,算得的“ a ”和“ b ”的退化尺寸,即 a_{cr} 和 b_{cr} 列出在表 4 中.由算出结果可见,当 $\alpha = \pi/36$ 时,有 $a_{\text{cr}} = 3.934 2$ 和 $b_{\text{cr}} = 0.023 9$.此外,一个已知的结果为,当 $b/a \rightarrow 0$,有 $a_{\text{cr}} = 4$ 和 $b_{\text{cr}} = 0$.此外,当 $\alpha = 9\pi/36$ 即正方形时,有 $a_{\text{cr}} = b_{\text{cr}} = 1.694 4$.先前得到的结果也是 $a_{\text{cr}} = b_{\text{cr}} = 1.694 4^*$.

表 4 对于矩形周界的 2 个退化尺寸 a_{cr} 和 b_{cr} (参看图 5)

Table 4 Degenerate sizes for two edges, or a_{cr} and b_{cr} , for a rectangle (see fig. 5)

α	$\pi/36$	$2\pi/36$	$3\pi/36$	$4\pi/36$	$5\pi/36$	$6\pi/36$	$7\pi/36$	$8\pi/36$	$9\pi/36$
a_{cr}	3.934 2	3.780 1	3.563 9	3.301 6	3.005 9	2.687 7	2.357 1	2.023 2	1.694 4
b_{cr}	0.023 9	0.095 1	0.212 3	0.373 1	0.574 6	0.812 6	1.082 4	1.378 5	1.694 4

算例 2 在第 2 个算例中,单位圆外部(在 ζ 平面上) 映象到平行四边形周界外部(在 z -平面上)(图 6)。此外,诸点 p_1, p_2, p_3 和 p_4 各自映象到 q_1, q_2, q_3 和 q_4 。此平行四边形有 4 个边长“ a ”, “ b ”, “ c ” 和 “ d ” ($a = c, b = d$)。

在计算时,取 $\beta_1 = \beta_3 = 2 - \gamma, \beta_2 = \beta_4 = 1 + \gamma$ 。由图 6 所示的几何情况,可令 $p_1 = -p_3 = 1, p_2 = -p_4 = e^{i\alpha}$ 。从而,条件式(42)总是得到满足。

对于下列情况:(a) $\gamma = 1/6, 1/4$ 和 $2/6$; (b) α 从 $\pi/36$ 变到 $9\pi/36$, 算得的 2 个退化尺寸 a_{cr} 和 b_{cr} , 列出现在表 5 中。由算出的结果可见,当 $\gamma = 1/6, \alpha = \pi/18$, 有 $a_{cr} = 3.949 6$ 和 $b_{cr} = 0.026 5$ 。一个熟知的结果为,当 $b/a \rightarrow 0$, 有 $a_{cr} = 4$ 和 $b_{cr} = 0$ 。这一结果部分地证明了本方法取得了合理的结果。此外,当 $\gamma = 1/6, \alpha = 9\pi/18$, 或在一个菱形情况, 有 $a_{cr} = b_{cr} = 1.820 8$ 。

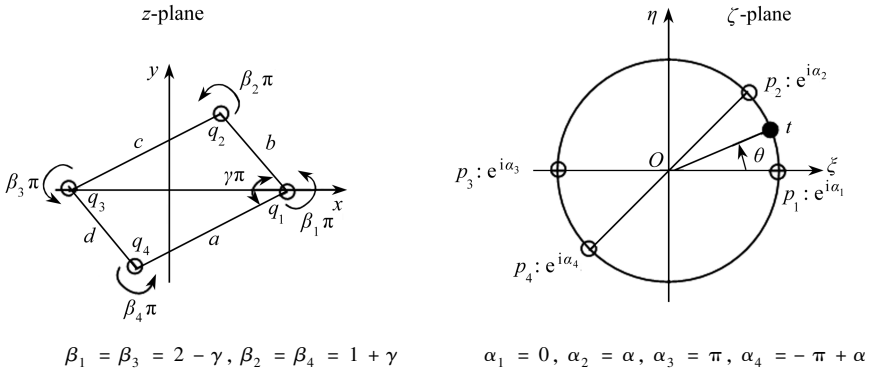


图 6 带平行四边形周界的保角映象关系

Fig. 6 Conformal mapping for the contour with parallelogram shape

表 5 对于平行四边形周界的 2 个退化尺寸 a_{cr} 和 b_{cr} (参看图 6)

Table 5 Degenerate sizes for two edges, or a_{cr} and b_{cr} , for a parallelogram configuration(see fig. 6)

a_{cr} values										
α	$\pi/18$	$2\pi/18$	$3\pi/18$	$4\pi/18$	$5\pi/18$	$6\pi/18$	$7\pi/18$	$8\pi/18$	$9\pi/18$	
γ	1/6	3.949 6	3.822 8	3.635 6	3.399 3	3.123 7	2.818 6	2.493 4	2.157 8	1.820 8
	1/4	3.942 8	3.803 8	3.603 7	3.355 7	3.071 0	2.759 9	2.432 2	2.097 2	1.763 8
	1/3	3.938 0	3.790 6	3.581 4	3.325 4	3.034 4	2.719 3	2.390 0	2.055 6	1.724 7
b_{cr} values										
α	$\pi/18$	$2\pi/18$	$3\pi/18$	$4\pi/18$	$5\pi/18$	$6\pi/18$	$7\pi/18$	$8\pi/18$	$9\pi/18$	
γ	1/6	0.026 5	0.105 5	0.234 9	0.411 8	0.631 7	0.889 4	1.178 4	1.491 5	1.820 8
	1/4	0.025 3	0.100 8	0.224 6	0.394 3	0.605 8	0.854 6	1.135 0	1.440 4	1.763 8
	1/3	0.024 5	0.097 6	0.217 7	0.382 3	0.588 2	0.830 9	1.105 4	1.405 5	1.724 7

算例 3 在第 3 个算例中,单位圆外部(在 ζ 平面上) 映象到梯形周界外部(在 z -平面上)(见图 7)。此外,诸点 p_1, p_2, p_3 和 p_4 各自映象到 q_1, q_2, q_3 和 q_4 。此梯形有 4 个边长“ a ”, “ b ”, “ c ” 和 “ d ” ($a = c$)。

计算时取 (a) $\beta_1 = \beta_2 = 1 + \gamma, \beta_3 = \beta_4 = 2 - \gamma$; (b) $\alpha_1 = -\alpha_2, \alpha_4 = -\alpha_3$. 从而, 条件式(42) 变成

$$(\beta_2 - 1) \cos \alpha_2 + (\beta_3 - 1) \cos \alpha_3 = 0, \text{ 或 } \alpha_3 = \arccos\left(-\frac{(\beta_2 - 1) \cos \alpha_2}{\beta_3 - 1}\right). \quad (51)$$

由此可见, 一旦 α_2 事先给出, α_3 便可由式(51)算出. 对于下列情况: (a) $\gamma = 1/6, 1/4$ 和 $1/3$; (b) α_2 从 $\pi/18$ 变到 $8\pi/18$, 算得的 3 个退化尺寸 b_{cr}, c_{cr} 和 d_{cr} 列出在表 6 中.

表 6 对于梯形周界的 3 个退化尺寸 b_{cr}, c_{cr} 和 d_{cr} (参看图 7)

Table 6 Degenerate sizes for three edges, or b_{cr}, c_{cr} and d_{cr} , for the trapezoid configuration (see fig. 7)

b_{cr} values									
α_2		$\pi/18$	$2\pi/18$	$3\pi/18$	$4\pi/18$	$5\pi/18$	$6\pi/18$	$7\pi/18$	$8\pi/18$
	1/6	0.366 4	0.907 0	1.511 8	2.126 7	2.708 5	3.219 4	3.625 7	3.896 8
γ	1/4	0.264 4	0.734 0	1.307 0	1.924 6	2.536 1	3.094 1	3.554 1	3.872 7
	1/3	0.189 6	0.590 5	1.123 8	1.733 4	2.365 2	2.964 8	3.477 4	3.846 0
c_{cr} values									
α_2		$\pi/18$	$2\pi/18$	$3\pi/18$	$4\pi/18$	$5\pi/18$	$6\pi/18$	$7\pi/18$	$8\pi/18$
	1/6	1.764 7	1.474 4	1.160 3	0.851 2	0.568 8	0.330 6	0.150 4	0.038 1
γ	1/4	1.931 5	1.646 2	1.316 0	0.977 5	0.659 6	0.386 2	0.176 5	0.044 9
	1/3	2.217 4	1.922 3	1.558 2	1.170 2	0.796 4	0.469 3	0.215 4	0.054 9
d_{cr} values									
α_2		$\pi/18$	$2\pi/18$	$3\pi/18$	$4\pi/18$	$5\pi/18$	$6\pi/18$	$7\pi/18$	$8\pi/18$
	1/6	3.422 8	3.460 8	3.521 6	3.601 1	3.693 8	3.792 1	3.886 2	3.962 8
γ	1/4	2.995 9	3.062 1	3.168 1	3.307 0	3.468 8	3.640 2	3.803 7	3.936 2
	1/3	2.407 0	2.512 8	2.682 0	2.903 6	3.161 6	3.434 1	3.692 8	3.900 9

一个熟知的结果为, $\alpha_2 \rightarrow \pi/2$, 有 $b_{cr} = 4, c_{cr} = 0$ 和 $d_{cr} = 4$. 在本例中, 当 $\gamma\pi = \pi/6$ 和 $\alpha_2 = 8\pi/18$ 时, 有下列结果: $b_{cr} = 3.896 8, c_{cr} = 0.038 1$ 和 $d_{cr} = 3.962 8$. 这一结果部分地证明了本方法取得了合理的结果.

此外, 对于下列两种特殊图形: (a) $\gamma\pi = \pi/4, \alpha_2 = \pi/18$; (b) $\gamma\pi = \pi/4, \alpha_2 = 5\pi/18$; 相关的周界退化图形表示在图 8 中.

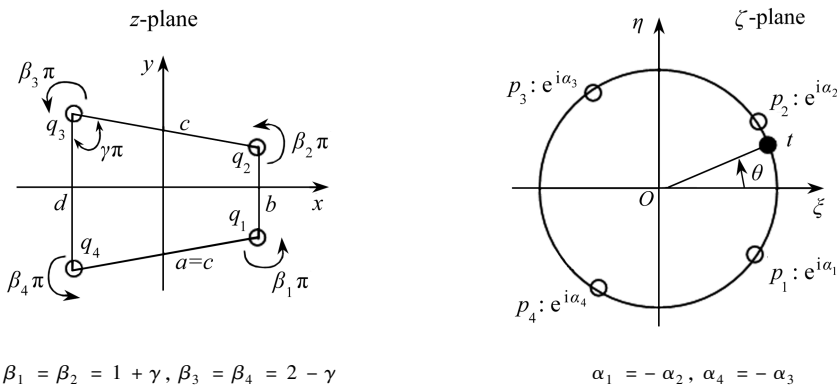


图 7 带梯形周界的保角映射关系

Fig. 7 Conformal mapping for the contour with trapezoid shape

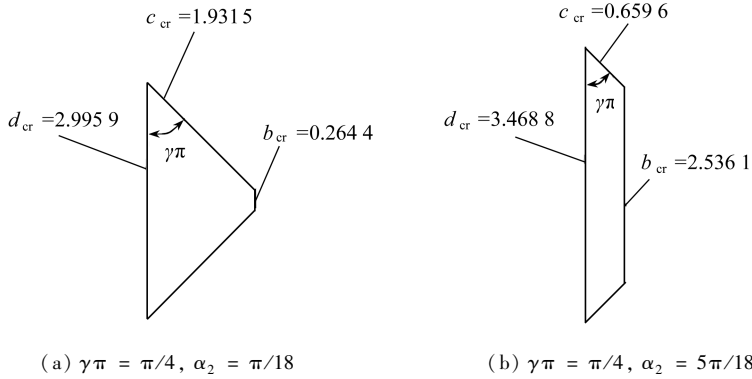


图8 带梯形周界时的2个特殊退化尺寸

Fig. 8 Two particular degenerate sizes under the conditions

4 结 论

由以上的推导可以看出,对于三角形和四边形而言,保角映象方法提供了求解退化尺寸问题的一个有效途径.事实上,三角形和四边形是多边形的特殊情况.从而,求解退化尺寸问题时,Schwarz-Christoffel 保角映象起了一个重要作用.然而,Schwarz-Christoffel 保角映象本身不能直接求解退化尺寸问题.本文中证实,只要在保角映象函数中代入 $R = R_{cr} = 1$, 诸退化尺寸可由一些积分的数值求积得出,例如式(45)所示.

参考文献 (References) :

- [1] Chen J T, Lin J H, Kuo S R, Chiu Y P. Analytical study and numerical experiments for degenerate scale problems in boundary element method using degenerate kernels and circulants [J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2001, **25**(9) : 819-828.
- [2] Chen J T, Lee C F, Chen I L, Lin J H. An alternative method for degenerate scale problems in boundary element methods for the two-dimensional Laplace equation [J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2002, **26**(7) : 559-569.
- [3] Petrovsky I G. *Lectures on Partial Differential Equation* [M]. New York: Interscience, 1971.
- [4] Jaswon M A, Symm G T. *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics* [M]. New York: Academic Press, 1977.
- [5] Christiansen S. On two methods for elimination of non-unique solutions of an integral equation with logarithmic kernel [J]. *Applicable Analysis*, 1982, **13**(1) : 1-18.
- [6] Chen J T, Lin S R, Chen K H. Degenerate scale problem when solving Laplace's equation by BEM and its treatment [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, **62**(2) : 233-261.
- [7] Chen J T, Shen W C. Degenerate scale for multiply connected Laplace problems [J]. *Mechanics Research Communication*, 2007, **34**(1) : 69-77.
- [8] Chen Y Z, Lin X Y, Wang Z X. Degenerate scale problem for plane elasticity in a multiply connected region with outer elliptic boundary [J]. *Archive Applied Mechanics*, 2010, **80**(9) : 1055-1067.
- [9] He W J, Ding H J, Hu H C. Non-equivalence of the conventional boundary integral formulation and its elimination for plane elasticity problems [J]. *Computers and Structures*, 1996, **59**

- (6): 1059-1062.
- [10] He W J, Ding H J, Hu H C. Degenerate scales and boundary element analysis of two dimensional potential and elasticity problems[J]. *Computers and Structures*, 1996, **60**(1/3): 155-158.
- [11] Chen J T, Kuo S R, Lin J H. Analytical study and numerical experiments for degenerate scale problems in the boundary element method of two-dimensional elasticity[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, **54**(12): 1669-1681.
- [12] Vodicka R, Mantic V. On invertibility of elastic single-layer potential operator[J]. *Journal of Elasticity*, 2004, **74**(2): 147-173.
- [13] Vodicka R, Mantic V. On solvability of a boundary integral equation of the first kind for Dirichlet boundary value problems in plane elasticity[J]. *Computational Mechanics*, 2008, **41**(6): 817-826.
- [14] Chen Y Z, Lin X Y, Wang Z X. Evaluation of the degenerate scale for BIE in plane elasticity and antiplane elasticity by using conformal mapping[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2009, **33**(2): 147-158.
- [15] Chen J T, Wu C S, Chen K H, Lee Y T. Degenerate scale for the analysis of circular thin plate using the boundary integral equation method and boundary element methods[J]. *Computational Mechanics*, 2006, **36**(1): 33-49.
- [16] Driscoll T A, Trefethen L N. *Schwarz-Christoffel Mapping*[M]. London, New York: Cambridge University Press, 2002.
- [17] Chen Y Z, Hasebe N, Lee K Y. *Multiple Crack Problems in Elasticity*[M]. Southampton: WIT Press, 2003.

Degenerate Scale Problem in Antiplane Elasticity or Laplace Equation for Contour Shapes of Triangles or Quadrilaterals

CHEN Yi-zhou

(Division of Engineering Mechanics, Jiangsu University,
Zhenjiang, Jiangsu 212013, P. R. China)

Abstract: Several solutions of the degenerate scale for shapes of triangles or quadrilaterals in an exterior boundary value problem of antiplane elasticity or Laplace equation were provided. The Schwarz-Christoffel mapping was used thoroughly. It is found that a complex potential with simple form in the mapping plane satisfies the vanishing displacement condition (or $w = 0$) along the boundary of the unit circle when a dimension “ R ” reaches its critical value 1. This means the degenerate size in the physical plane is also achieved. Finally, the degenerate scales can be evaluated from some particular integrals that depend on some parameters in the mapping function. A lot of numerical results of degenerate sizes for shapes of triangles or quadrilaterals are provided.

Key words: degenerate scale; conformal mapping technique; shapes of triangles or quadrilaterals; antiplane elasticity