

化学对高对流 Maxwell 流体在多孔面上 作 MHD 流动和传质的影响*

K·法拉菲路¹, K·V·普拉撒德², A·苏亚沙², 吴朝安³

- (1. 中佛罗里达大学 数学系, 奥兰多, 佛罗里达 32816, 美国;
2. 班加罗尔大学 数学系, 班加罗尔 560 001, 印度;
3. 香港大学 机械工程系, 薄扶林道, 香港)

摘要: 研究导电的高对流 Maxwell 流体在多孔表面上, 作计及物质化学反应时的 MHD 流动及其传质. 将非线性的偏微分控制方程及其相应的边界条件, 变换为非线性的常微分方程, 并利用 Keller-Box 法进行数值求解. 用图形给出了各种物理参数对流动和传质特性的影响, 并对结果进行了讨论. 可以看到, 化学反应阶次提高了扩散边界层的厚度; 还可以看到, 传质率强烈地依赖于 Schmidt 数和反应率参数. 此外, 在特例情况下得到了以往文献中可供利用的结果.

关键词: 物质的化学反应; 高对流 Maxwell 流体; MHD 流动; 传质; Keller-Box 法

中图分类号: O34 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.07.005

引 言

在过去的几年里, 连续移动表面经过静止流体时, 其边界层流动中热量、质量和动量传递的研究受到了广泛的关注. 这是因其在电化学和聚合物加工中都有应用. 连续移动表面引起的流动常常出现在钢丝的拉拔、玻璃纤维和纸张的生产、晶体的成长以及塑料薄膜的拉伸. 考虑到这些应用的需要, Crane 在文献[1]中考虑的边界层流动, 是由弹性平面速度随着到一个固定点的距离呈线性变化所引起的. 之后, 很多研究者(如 Gupta 等^[2], Chakrabarti 等^[3], Grubka 等^[4], Chen^[5], Cortell^[6], Ishak 等^[7], Abbasbandy 等^[8])考虑了有/无吸入(或吹出), 有/无磁场时的流动和传热/质问题.

众所周知, 很多材料, 例如熔体、软泥、乳胶、肥皂、洗发剂、浆糊、熔融的塑料、液态的聚合物、食品、浓缩牛奶和糖溶液等等, 都不满足粘性的 Newton 定律, 因此被称为非 Newton 流体. 关于非 Newton 流体的模型研究, 对数学家、物理学家和工程师们提出了众多的挑战. 因此, 了解非 Newton 流体中传热传质特性有着重要的实用价值. 这类流体往往服从非线性的本构方程, 同时, 方程的复杂性也是无法得到精确解析解的主要原因. 例如, 简单的粘弹性流体模型, 如二阶模型和 Walters 模型(参见 Rajagopal 等^[9], Andersson^[10], Cortell^[11], Subhas 等^[12]的相关

* 收稿日期: 2011-07-18; 修订日期: 2012-01-23

基金项目: 中国香港特别行政区研究基金资助项目(HKU 715510E)

作者简介: K. Vajravelu(联系人, E-mail: Kuppalapalle.vajravelu@ucf.edu).

本文原文为英文, 黄雅意译, 张禄坤校.

文献),可以用来模拟流动变化缓慢的弱弹性流体.这两个模型都不符合某些熟知的热动力学定律.因此,上述文献所报道结果的重要性仅局限于聚合体工业.显然,任何工业都有价值的理论结果,必须使用更为一般的粘弹性流体模型来分析,例如高对流 Maxwell (UCM) 模型,或者 Oldroyd B 模型.事实上近年来,已经使用这两个流体模型,来研究粘弹性流体在有/无传热伸缩平面上的流动问题(参见 Bhatnagar 等^[13], Renardy^[14], Sadeghy 等^[15], Hayat 等^[16], Aliakbar 等^[17]的相关文献).

热边界层问题在数学上等价于浓度边界层问题,在传热特性中得到的结果,将 Prandtl 数替换为 Schmidt 数,就可以直接用于传质问题.然而,由于质量扩散方程中出现了化学反应所产生的项,使我们得无法得到解析解,而必须采用数值方法.带有化学反应的流动和传质问题,有着重要的实用价值,因为它们普遍存在于很多科学和工程分支之中.近年来, Hayat 等^[18]研究了有化学反应的高对流 Maxwell 流体,经过多孔收缩平面时 MHD 流动中的传质问题.有关化学反应时 Newton/非 Newton 流体流动可供利用的文献还有 Chambre 等^[19], Anjali Devi 等^[20], Takhar 等^[21], Akyildiz 等^[22], Cortell^[23]的相关文献,在他们的研究工作中,都没有涉及有化学反应时的 UCM 流体的流动.

受上述研究的启发,本文研究非 Newton UCM 流体,在一个可渗透的表面上,作带有化学反应物质扩散的边界层流动.这正是 Akyildiz 等^[22]研究工作的延伸,我们考虑了 MHD、非 Newton Maxwell 和渗透参数的影响.由于在动量方程和质量扩散方程中,分别存在非 Newton Maxwell 参数和 n 阶均匀的化学反应项,得到了耦合的非线性偏微分方程组.通过相似变换,将该非线性偏微分方程组转换为非线性常微分方程组.为了求解该耦合又非线性的边界值问题,我们采用了大家熟知的 Keller-Box 数值方法.在特殊情况下得到了已有文献的结果,与本文结果有着很好的一致性.

1 数学公式

考虑导电流体——服从 UCM 模型,在一个多孔伸缩平面上,作稳定不可压缩 MHD 的边界层流动及其质量的传递.流动是由于伸缩平面上两个沿 x 轴的、大小相等、方向相反的力的作用下所引起的,保持原点不变,并且所考虑的流动限于区域 $y > 0$.分别取 x 轴和 y 轴为沿平面方向和垂直平面方向.假设连续伸缩平面有一线速度 $u_w = bx$,其中 b 为伸缩率, x 为离裂缝的距离.沿 y 轴方向施加了强度为 B_0 的均匀磁场.感应磁场忽略不计,在实验室规模上,假设为小磁 Reynolds 数,感应磁场忽略不计也是合理的,同时假设外加电场为 0.为沿平板的流动问题列出物质 A 包含于微溶于 B 的传质模拟量.平板表面的浓度为 C_w ,即 A 在 B 中的可溶度,远离平板时物质 A 的浓度为 C_∞ .设物质 A 和 B 的反应为 n 阶均匀的化学反应,化学反应率为常数 K_n .用边界层法^[24]来建立解析系统是合适的.为此,第一步在特定的几何条件下,为我们感兴趣流体导出边界层方程,可以 Cauchy 运动方程开始,运动方程中包含了磁场源所引起的项(见 Bird 等的文献[25]).在二维流动中,可以写成连续性方程、无压力梯度的运动方程以及(传质)扩散方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \sigma B_0^2 u, \quad (2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, \quad (3)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - K_n C^n, \quad (4)$$

其中, u 和 v 分别为 x 和 y 方向的速度分量, ρ 为密度, σ 为电导率, B_0 为均匀磁场强度, C 为物质扩散的浓度, D 为扩散物质的扩散系数, K_n 表示 n 阶均匀不可逆化学反应的反应率常数. 正如上面所述, 本文所考虑的流体服从高对流 Maxwell 模型. 对于 Maxwell 流体, 外加张量 τ_{ij} 和变形率张量 d_{ij} 可以通过以下的方程来表示:

$$\tau_{ij} + \lambda \frac{\Delta}{\Delta t} \tau_{ij} = 2\delta d_{ij}, \quad (5)$$

其中, δ 为粘性系数, λ 为弛豫时间. 式(5)中出现的时间导数 $\Delta/\Delta t$, 称为高对流时间导数, 按满足连续介质力学的要求(即, 材料的客观性和坐标的无差别性)导出. 应力张量的高对流时间导数如下^[25]:

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \tau_{ij} = \frac{D}{Dt} \tau_{ij} - L_{jk} \tau_{ik} - L_{ik} \tau_{kj}, \quad (6)$$

其中 L_{ij} 为速度梯度张量. 对于服从高对流 Maxwell 模型的不可压缩流体来说, 动量方程和质量传递方程的 x 方向分量, 可以简单地用一般边界层理论来近似^[15]:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda \left(u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2uv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2 u}{\rho}, \quad (7)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - K_n C^n, \quad (8)$$

其中 ν 为动粘度. 问题的相应边界条件为

$$\begin{cases} u = u_w = bx, v = v_w, C = C_w, & \text{当 } y = 0, \\ u \rightarrow 0, C \rightarrow C_\infty, & \text{当 } y \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (9)$$

其中, b 为伸缩率, 方程(9)中的第2个条件 $v = v_w$ 为垂直于伸缩平面的吹出速度, 而 $v = -v_w$ 为吸入速度. 为了使问题经得起检验, 引入如下无量纲量:

$$\eta = \sqrt{\frac{b}{\nu}} y, u = bx f'(\eta), v = -\sqrt{b\nu} f(\eta), \phi(\eta) = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}, \quad (10)$$

这里, η 为相似变量, f 和 ϕ 分别为无量纲的流函数和质量浓度. 利用上述新变量以后的速度分量 u 和 v , 使方程(1)得到了自动满足. 利用上述新变量 f 和 ϕ 后的控制方程(7)和(8)可以写成

$$f''' - M_n f' - f'^2 + f f'' + \beta(2f' f''' - f^2 f''') = 0, \quad (11)$$

$$\phi'' + Sc f \phi' = \delta Sc \phi^n, \quad (12)$$

这里, 上角撇号表示对 η 的导数. 方程(11)和(12)中有如下多个无量纲参数: $M_n = \sigma B_0^2 / (\rho b)$ 为磁场参数, $\beta = \lambda b$ 为 Maxwell 参数, $Sc = \nu / D$ 为 Schmidt 数, $\delta = K_n (C_w - C_\infty)^{n-1} / b$ 为化学反应率参数. 值得一提的是, 化学反应率参数 δ 是一个实数 ($\delta < 0$ 表示化学分解反应, $\delta > 0$ 表示化学合成反应, $\delta = 0$ 表示物质无化学反应). 鉴于上述变换, 用流函数 f 和无量纲传质 ϕ 表示的边界条件(9)将取如下无量纲形式:

$$f = f_w, f' = 1, \phi = 1, \quad \text{当 } \eta = 0, \quad (13)$$

$$f' \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0, \quad \text{当 } \eta \rightarrow \infty, \quad (14)$$

其中, $f_w = -v_w / \sqrt{\nu b}$, 吸入时 f_w 为正值; 吹出时 f_w 为负值, 该参数可以用来控制边界层垂直流动的强度和方向. 出于实用目的, 也可以用函数 $f(\eta)$ 和 $\phi(\eta)$ 分别定义表面摩擦因数

$$C_f = \frac{\mu}{\rho u_w^2} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (15)$$

和 Sherwood 数

$$Sh_x = \frac{h}{(C_w - C_\infty)} \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=0} = (Re_x)^{1/2} \phi'(0), \quad (16)$$

这里 $Re_x = u_w x/\nu$ 为局部 Reynolds 数.

2 某些特例情况时的精确解

这里,我们给出某些特例情况时的精确解.这样的解是有用的,也可以作为数值解比较的基准.值得一提的是,当 $\beta = 0$ 和 $n = 1$ 时,该边界层流动和传质问题得以退化.Gupta 等^[2]给出了这种情况时的速度场解.显然,在非线性传质方程(12)中,无量纲流函数 f 和速度场是耦合的.然而,在一阶化学反应物质这样一个特例情况时,方程(12)等号右边的非线性项变为 $\delta_1 Sc\phi$,则本文的质量扩散边界层问题,形式上等效于类似的热边界层问题.因而,用 Prandtl 数替代 Schmidt 数,(一阶反应)方程(12)在相应边界条件下的解析解,可以根据一般的合流型超几何函数,即 Kummer 函数 M 得到

$$\phi(\eta) = \exp\left(\frac{-\alpha(a_0 + b_0)\eta}{2}\right) \frac{M(a_1, b_1, -Sc/\alpha^2) \exp(-\alpha\eta)}{M(a_1, b_1, -Sc/\alpha^2)}, \quad (17)$$

其中

$$\begin{cases} a_0 = \frac{Sc}{\alpha^2} + \frac{Sc}{\alpha^2} f_w, & b_0 = \sqrt{a_0^2 + \frac{4\delta Sc}{\alpha^2}}, \\ a_1 = \frac{a_0 + b_0 - 2}{2}, & b_1 = 1 + b_0. \end{cases} \quad (18)$$

当 $\beta = \delta = f_w = 0$ 时,得到了完全传质方程(12)精确的解析解,可以用非完全 Gamma 函数来表示,正如 Andersson 等在文献[26]中所指出的.对于 $n > 1$ 和 $\beta \neq 0$ 的一般情况时,方程(11)和(12)中存在非线性项,使用数值解是不可避免的.为了处理这样耦合的又是非线性的问题,我们使用下面的数值方法,来求解该耦合的非线性边值问题.

3 数值求解步骤

应用 Keller-Box 法,在边界条件(13)和(14)下,数值地求解非线性耦合的常微分方程(11)和(12)^[27-29].分下面 4 步得到数值解:

- 1) 将方程(11)和(12)简化为一阶的微分方程组;
- 2) 利用中心差分,将上述微分方程组改写成差分方程组;
- 3) 将上述差分方程组写成矩阵-向量形式,利用 Newton 法求解该线性代数方程组;
- 4) 用分块的三对角消去法,求解该线性方程组.

为了简洁起见,本文没有给出更详细的求解过程.对于每组输入参数值所花的计算时间不大,指出这一点也很重要.由于本问题的物理区域是无界的,而计算区域是有限的,我们利用远场边界条件,将相似变量 η 的有限值用 η_{\max} 表示.取 $\eta_{\max} = 10$,这对于本文所考虑的所有参数值,足以渐近地满足远场的边界条件.数值计算时采用均匀的步长 $\Delta\eta = 0.01$,所有情况下数值解的误差为 10^{-6} .为了评估本方法的精度,在特例情况下,将本文所得到的表面摩擦因数和传质梯度,与先前报道的结果进行对比,并在表 1 中列出.

表 1 参数取不同数值时,表面摩擦因数和壁面传质梯度的对比

Table 1 Comparison of skin friction and wall mass transfer gradient for different values of the parameters

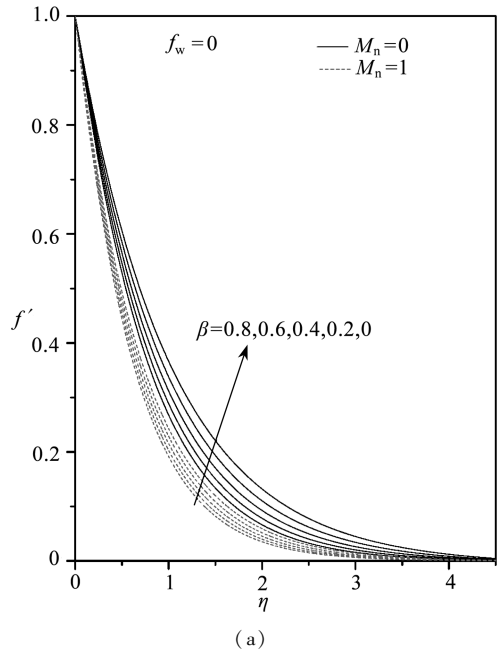
	$f''(0)$ with $f_w = \beta = 0$		$\phi'(0)$ with $\delta = f_w = \beta = M_n = 0.0$			
	present results	Andersson <i>et al.</i> [26]	present results	Grubka and Bobba ^[4]	Chen ^[5]	
$M_n = 0.0$	-1.000 174	-1.0	$Pr/Sc = 0.01$	-0.009 933	-0.009 9	-0.009 1
$M_n = 0.5$	-1.224 751	-1.224 9	$Pr/Sc = 0.72$	-0.495 977	-0.463 1	-0.463 15
$M_n = 1.0$	-1.414 214	-1.414 40	$Pr/Sc = 1.0$	-0.582 789	-0.582 0	-0.581 99
$M_n = 1.5$	-1.581 139	-1.581 00	$Pr/Sc = 3.0$	-1.159 972	-1.165 2	-1.165 23
$M_n = 2.0$	-1.732 051	-1.732 00	$Pr/Sc = 10.0$	-2.308 01	-2.308 0	-2.307 96

4 结果和讨论

对多组 Maxwell 参数 β , 磁场参数 M_n , 吸入/吹出参数 f_w , Schmidt 数 Sc , 反应率参数 δ 和化学反应阶次 n , 本文进行了数值计算. 为了分析本问题的显著特性, 在图 1 至图 5 中给出了它们的数值结果, 在这些图中描绘出水平速度和流体浓度的变化. 在多组相关参数下, 表 2 和表 3 记录了表面摩擦因数和壁面传质梯度的变化.

图 1(a) 至图 1(c) 绘出了 Maxwell 参数 β , 磁场参数 M_n , 吸入/吹出参数 f_w 取不同数值时, 水平速度分量 $f'(\eta)$ 的变化曲线. 从图 1(a) 可以看出, 随着 M_n 的增加, 水平速度在减小. 这是由于弹性所引起的拉应力, 造成边界层的横向挤压, 同时, 由于磁场参数的增加, 导致流动的减速, 从而使水平速度分量下降. 图 1(b) 和图 1(c) 给出了 M_n 和 f_w 取不同数值时, 水平速度 $f'(\eta)$ 的变化曲线. 可以看出: 吸入参数, 即 $f_w > 0$, 导致水平速度边界层厚度的减小; 吹出参数, 即 $f_w < 0$, 对速度边界层厚度的影响正好相反. 这样的结果与物理态势是一致的. 图 1(c) 对同一组物理参数而 M_n 取非零值时, 给出了速度分布曲线. 图 1(b) 与图 1(c) 相比较显示, M_n 使所有 f_w 值下的水平速度减小. 这是由于(垂直流动方向的)横向磁场作用造成的拽拉, 即 Lorentz 力, 阻碍了流体的流动. 从而使得水平速度 $f'(\eta)$ 随着 M_n 的增加而减小.

图 2(a) 和图 2(b) 就 M_n 取不同数值而其他参数固定时, 分别绘出了 1 阶 ($n = 1$) 和 3 阶 ($n = 3$) 化学反应时的浓度分布曲线 $\phi(\eta)$. 随着 β 值的增加, 对流动和传质中所出现参数的不同数值, 物质的浓度分布得以增强. 然而, 随着到边界层距离的增加, 物质的浓度分布渐近地趋于 0. 这样一个特点在 M_n 值为 0 时尤其明显. 这是由于导电流体在横向磁场作用下出现称为 Lorentz 力的阻力. 该阻力使边界层间流体摩擦力增加, 从而使物质浓度分布增强. 这种变化趋势在非线性(更高阶)化学反应中亦存在, 正如图 2(b) 所示. 图 2(a) 与图 2(b) 的比较表明, 随着化学反应阶次 n 的增加, 壁面浓度梯度(正如表 3 所示)得以增强, 从而, 物质浓度分布边界层的厚度也随着 n 的增加而增加.



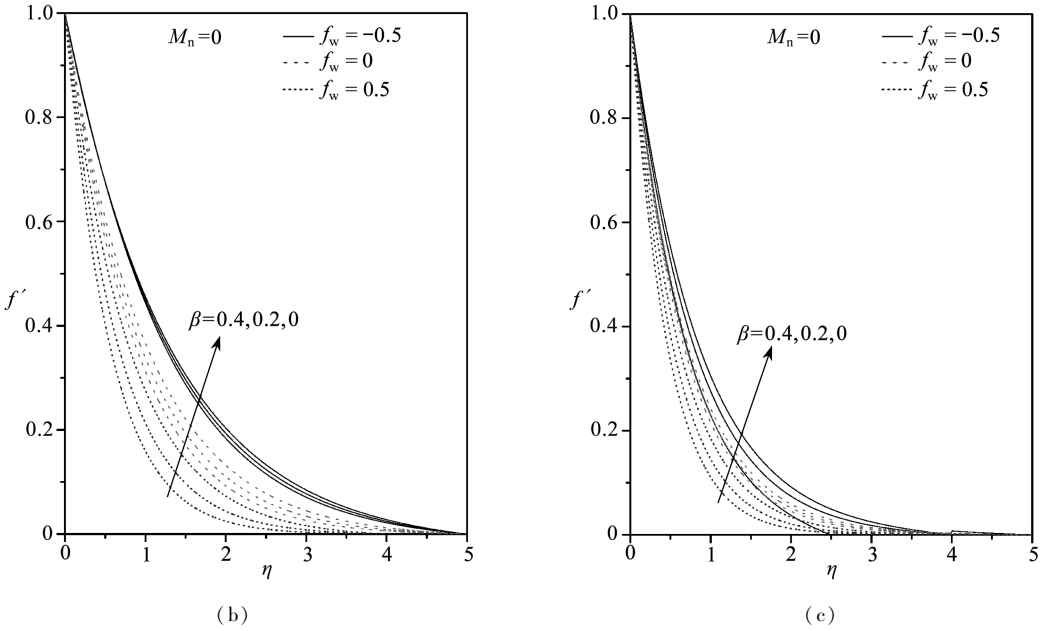


图1 对于不同的 β, M_n 和 f_w , 水平速度分量 f' 随 η 的变化曲线

Fig. 1 Horizontal velocity profiles for f' vs η for different values of β, M_n and f_w

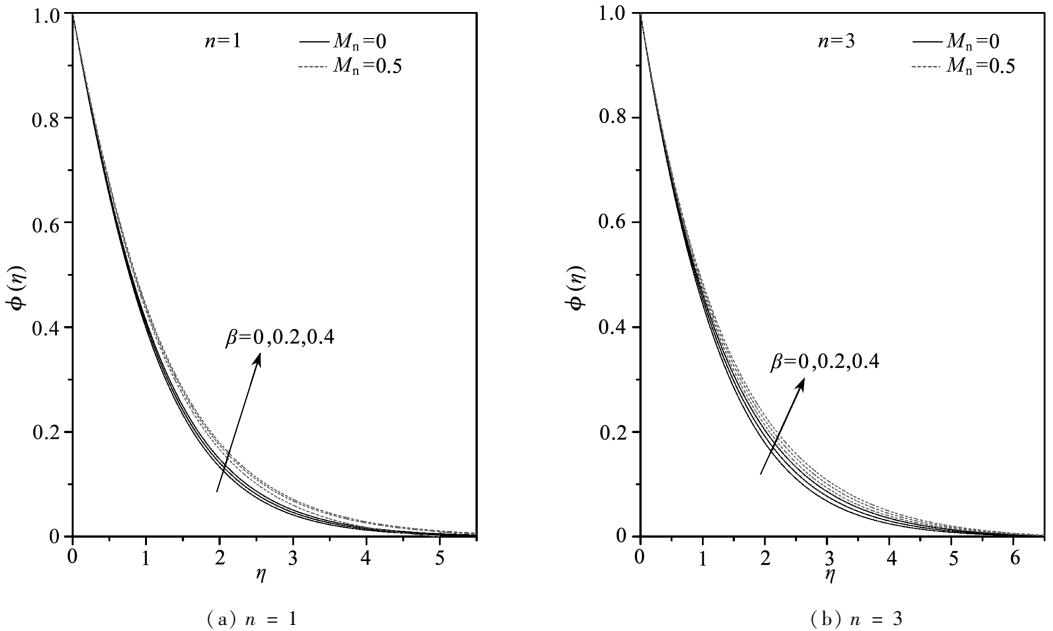


图2 当 $\delta = 0.5, Sc = 1.0, f_w = 0.0$ 时, 对于不同的 β, M_n 和 n , 浓度 $\phi(\eta)$ 随 η 的变化曲线

Fig. 2 Concentration profiles $\phi(\eta)$ vs η for different values of β, M_n and n with $\delta = 0.5, Sc = 1.0, f_w = 0.0$

图3(a)和图3(b)在 δ 和 f_w 取不同数值, 分别就1阶和高阶化学反应率时, 绘出了横跨流场的浓度分布曲线 $\phi(\eta)$ 。从这些图中可以看出, 随着 δ 值的增加, 流场中浓度边界层厚度在减小。然而, 与 $\delta = 0$ 相比较, 当 δ 取负值时, 浓度边界层的厚度要大些。从物理上说, $\delta < 0$ 意味着是化学合成反应, 即产生从伸缩板向化学反应自由流中扩散; $\delta > 0$ 意味着是化学分解反应, 即导致浓度边界层厚度的减小, 同时, 导致壁面传质数量的增加, 正如图中所示。这样一个特性

对所有的 f_w 值, 即 $f_w > 0$ (吸入), $f_w = 0$ (不可渗透) 和 $f_w < 0$ (吹出) 都成立. 从图 3 还可以看到, 随着 f_w 的增加, 导致浓度分布 $\phi(\eta)$ 的减少, 同时导致壁面浓度梯度的增加, 这是由于与不可渗透情况相比较, 吸入时物质分布边界层增厚, 但在吹出时物质分布边界层变薄.

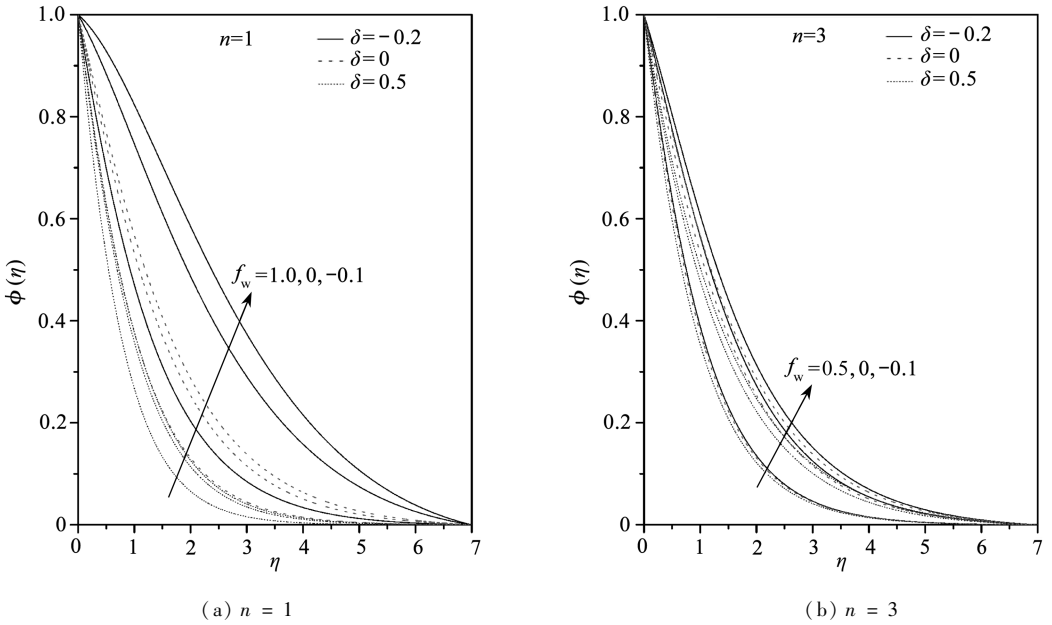


图 3 当 $M_n = 0.5$, $Sc = 1.0$, $\beta = 0.2$ 时, 对于不同的 f_w , δ 和 n , 浓度 $\phi(\eta)$ 随 η 的变化曲线

Fig. 3 Concentration profiles $\phi(\eta)$ vs η for different values of f_w , δ and n with $M_n = 0.5$, $Sc = 1.0$, $\beta = 0.2$

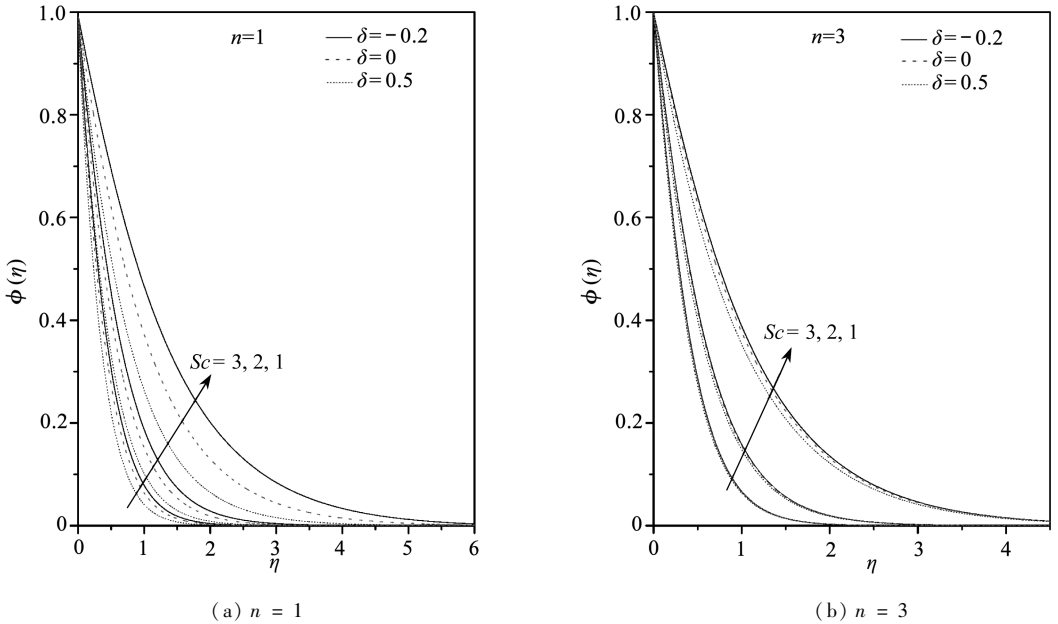


图 4 当 $M_n = 0.5$, $\beta = 0.2$, $f_w = 0.5$ 时, 对于不同的 Sc , δ 和 n , 浓度 $\phi(\eta)$ 随 η 的变化曲线

Fig. 4 Concentration profiles $\phi(\eta)$ vs η for different values of Sc , δ and n with $M_n = 0.5$, $\beta = 0.2$, $f_w = 0.5$

图 4(a) 和图 4(b) 在吸入情况下, 对不同的 Schmidt 数 Sc 和反应率参数 δ , 而其他参数固定时, 给出了物质浓度 ϕ 的分布曲线. 随着 Sc 值的增加, 导致浓度边界层厚度的减小. 这是由

于随着物质扩散的发展,导致浓度边界层变薄. 这样一个现象在化学分解反应 $\delta > 0$ 和化学合成反应 $\delta < 0$ 中都存在. 将图 4(a) 与高阶化学反应如图 4(b) 相比较可以看出, 3 阶化学反应的浓度边界层厚度, 比 1 阶或 2 阶化学反应时的浓度边界层厚度更大. 该现象在图 5(a) 和图 5(b) 中可以清楚地看到.

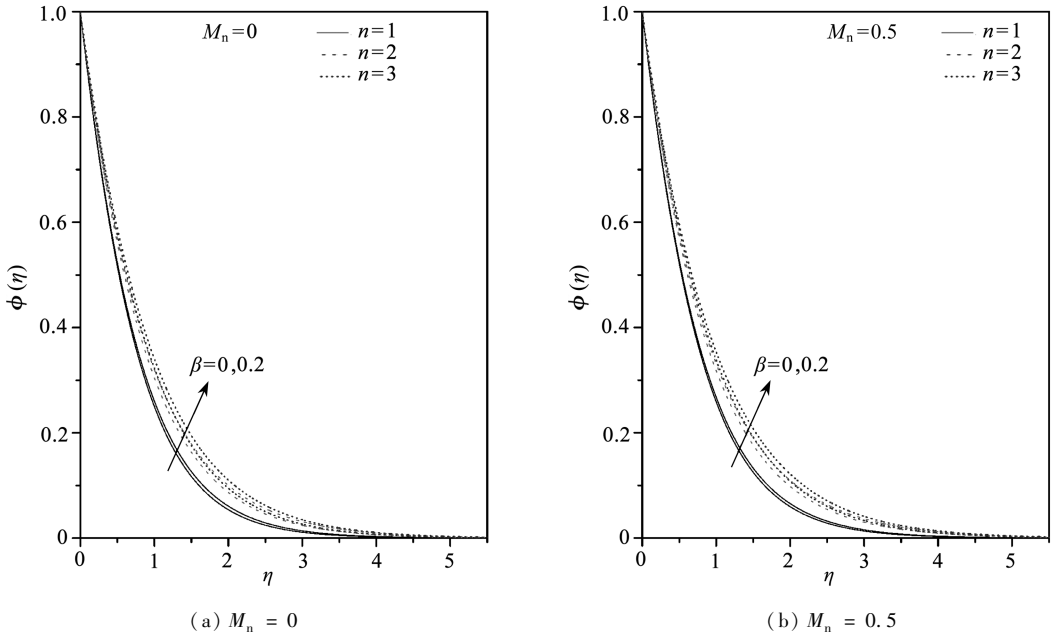


图 5 当 $\delta = 0.5, f_w = 0.5, Sc = 1.0$ 时, 对于不同的 β, n 和 M_n , 浓度 $\phi(\eta)$ 随 η 的变化曲线

Fig. 5 Concentration profiles $\phi(\eta)$ vs η for different values of β, n and M_n with $\delta = 0.5, f_w = 0.5, Sc = 1.0$

表 2 当 $Sc = 1.0, \delta = 0.0$, 其他参数取不同数值时, 表面摩擦因数 $f''(0)$ 和传质梯度 $\phi'(0)$

Table 2 Skin friction $f''(0)$ and mass transfer gradient $\phi'(0)$ for different values of the parameters when $Sc = 1.0$ and $\delta = 0.0$

M_n	β	$f''(0)$			$\phi'(0)$		
		$f_w = -0.1$	$f_w = 0.0$	$f_w = 0.5$	$f_w = -0.1$	$f_w = 0.0$	$f_w = 0.5$
0.0	0.0	-0.952 761	-1.000 00	-1.281 524	-0.526 856	-0.587 277	-0.931 586
	0.2	-0.984 720	-1.052 725	-1.514 256	-0.515 647	-0.573 263	-0.899 486
	0.4	-1.014 978	-1.102 408	-1.775 909	-0.505 219	-0.560 204	-0.868 124
	0.6	-1.043 609	-1.150 449	-2.070 067	-0.495 543	-0.548 089	-0.838 099
	0.8	-1.070 715	-1.196 909	-2.401 952	-0.486 572	-0.536 867	-0.809 719
0.5	0.0	-1.175 941	-1.224 751	-1.500 092	-0.486 423	-0.548 546	-0.903 952
	0.2	-1.198 799	-1.266 705	-1.723 246	-0.478 577	-0.538 091	-0.876 268
	0.4	-1.220 729	-1.307 627	-1.975 395	-0.471 199	-0.528 263	-0.849 022
	0.6	-1.241 766	-1.347 669	-2.260 587	-0.464 263	-0.519 036	-0.822 620
	0.8	-1.261 951	-1.386 841	-2.584 186	-0.457 740	-0.510 378	-0.797 322
1.0	0.0	-1.365 123	-1.414 238	-1.686 155	-0.455 745	-0.519 017	-0.882 428
	0.2	-1.382 501	-1.450 259	-1.904 575	-0.449 985	-0.520 853	-0.857 872
	0.4	-1.399 297	-1.485 741	-2.151 651	-0.444 519	-0.503 120	-0.833 541
	0.6	-1.415 531	-1.520 676	-2.431 686	-0.439 329	-0.495 798	-0.809 786
	0.8	-1.431 221	-1.555 062	-2.750 195	-0.434 400	-0.488 865	-0.786 820

表 3 物理参数取不同数值时,壁面的浓度梯度 $\phi'(0)$

Table 3 Wall concentration gradient $\phi'(0)$ for different values of the physical parameters

Sc	f_w	δ	β	$M_n = 0.0$			$M_n = 0.5$		
				$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
1.0	0.0	-0.2	0.0	-0.264 804	-0.390 104	-0.428 219	-0.130 296	-0.319 136	-0.367 819
			0.2	-0.229 341	-0.370 848	-0.411 655	-0.095 684	-0.303 563	-0.355 190
		0.5	0.0	-0.877 700	-0.764 900	-0.708 486	-0.858 928	-0.739 367	-0.678 276
			0.2	-0.872 759	-0.757 764	-0.699 946	-0.855 604	-0.734 704	-0.672 628
		-0.2	0.0	-0.341 557	-0.459 967	-0.496 092	-0.230 064	-0.397 534	-0.441 736
			0.2	-0.302 692	-0.437 725	-0.476 600	-0.192 585	-0.379 168	-0.426 286
	0.5	0.0	-0.932 211	-0.817 280	-0.760 947	-0.913 731	-0.791 992	-0.731 212	
		0.2	-0.925 764	-0.808 086	-0.750 061	-0.909 069	-0.785 502	-0.723 436	
	0.5	-0.2	0.0	-0.753 276	-0.840 855	-0.868 457	-0.705 948	-0.806 522	-0.836 472
			0.2	-0.697 736	-0.800 907	-0.831 295	-0.655 301	-0.771 434	-0.804 065
		0.5	0.0	-1.237 919	-1.120 349	-1.068 162	-1.222 463	-1.099 655	-1.044 860
			0.2	-1.220 170	-1.096 442	-1.041 184	-1.207 301	-1.079 387	-1.021 873

β	f_w	δ	Sc	$M_n = 0.0$			$M_n = 0.5$		
				$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
0.2	0.0	-0.1	1.0	-0.229 341	-0.370 848	-0.411 655	-0.095 684	-0.303 562	-0.355 190
			2.0	-0.483 304	-0.609 898	-0.654 109	-0.365 487	-0.541 915	-0.593 486
		3.0	-0.651 335	-0.777 659	-0.826 441	-0.554 774	-0.711 089	-0.765 772	
		0.5	1.0	-0.872 759	-0.757 763	-0.699 946	-0.855 604	-0.734 704	-0.672 628
			2.0	-1.240 781	-1.093 749	-1.020 779	-1.219 742	-1.064 541	-0.986 774
		3.0	-1.513 017	-1.342 682	-1.258 014	-1.490 150	-1.311 366	-1.222 110	
	-0.2	1.0	-0.302 692	-0.437 724	-0.476 600	-0.192 585	-0.379 168	-0.426 286	
		2.0	-0.623 190	-0.744 091	-0.786 138	-0.529 834	-0.684 944	-0.732 501	
	3.0	-0.855 970	-0.978 146	-1.024 462	-0.776 454	-0.920 228	-0.970 947		
	0.5	-0.1	1.0	-0.925 764	-0.808 085	-0.750 061	-0.909 069	-0.785 501	-0.723 436
			2.0	-1.350 814	-1.200 179	-1.127 326	-1.330 199	-1.171 610	-1.094 379
		3.0	-1.679 943	-1.504 981	-1.420 587	-1.657 492	-1.474 338	-1.385 794	
-0.2		1.0	-0.697 736	-0.800 906	-0.831 295	-0.655 301	-0.771 434	-0.804 065	
		2.0	-1.401 269	-1.495 245	-1.527 121	-1.364 146	-1.465 283	-1.498 576	
3.0		-2.029 406	-2.125 250	-2.159 236	-1.995 585	-2.096 416	-2.131 466		
0.5	1.0	-1.220 170	-1.096 443	-1.041 184	-1.207 301	-1.079 387	-1.021 873		
	2.0	-1.985 098	-1.832 242	-1.766 812	-1.969 211	-1.811 471	-1.744 013		
3.0	-2.666 593	-2.493 400	-2.420 548	-2.649 710	-2.471 875	-2.397 295			

表 2 和表 3 给出了物理参数 f_w, β, n, Sc 和 M_n 取不同数值时的 $f''(0)$ 和 $\phi'(0)$ 值。从这些表中可以发现, $f''(0)$ 随着 Maxwell 参数 β , 磁场参数 M_n 和吸入/吹出参数 f_w 的增加而单调地减少, 而 $\phi'(0)$ 的变化刚好相反。值得注意的是, 壁面传质的数量随着 Schmidt 数 Sc 和反应率参数 n 的增加而变化。进一步还可以看到, 高阶的化学分解反应, 可以增强传质梯度, 而化学合成反应, 这种变化趋势刚好相反。这样的传质特性对所有的吸入/吹出参数 f_w , Maxwell 参数 β 和磁场参数 M_n 都成立。

致谢 作者感谢审稿者对本文的改进所提出的宝贵意见。K. V. Prasad 感谢印度新德里科

学工业学院通过 BOYSCAST 资助项目所提供的财政支持。

参考文献(References):

- [1] Crane L J. Flow past a stretching plate[J]. *ZAMP*, 1970, **21**(4): 645-647.
- [2] Gupta P S, Gupta A S. Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing [J]. *Canad J Chem Eng*, 1977, **55**(6): 744-746.
- [3] Chakrabarti A, Gupta A S. Hydro-magnetic flow and heat transfer over a stretching sheet[J]. *Quart Appl Math*, 1979, **37**: 73-78.
- [4] Grubka L J, Bobba K M. Heat transfer characteristics of a continuous stretching surface with variable temperature[J]. *ASME J Heat Trans*, 1985, **107**(1): 248-250.
- [5] Chen C H. Laminar mixed convection adjacent to vertical continuously stretching sheets[J]. *Heat Mass Transfer*, 1998, **33**(5/6): 471-476.
- [6] Cortell R. Viscous flow and heat transfer over a nonlinearly stretching sheet[J]. *Appl Math Comp*, 2007, **184**(2): 864-873.
- [7] Ishak A, Jafar K, Nazar R, Pop I. MHD stagnation point towards a stretching sheet[J]. *Physica A, Stat Mech Its Appl*, 2009, **388**(17): 3377-3383.
- [8] Abbasbandy S, Hayat T. Solution of the MHD Falkner-Skan flow by homotopy analysis method[J]. *CNSNS*, 2009, **14**(9/10): 3591-3598.
- [9] Rajagopal K R, Na T Y, Gupta A S. Flow of a visco-elastic fluid over a stretching sheet[J]. *Rheol Acta*, 1984, **23**: 213-215.
- [10] Andersson H I. MHD flow of a visco-elastic fluid past a stretching surface[J]. *Acta Mech*, 1992, **95**(1/4): 227-232.
- [11] Cortell R. A note on flow and heat transfer of a viscoelastic fluid over a stretching sheet[J]. *Int J Non-Linear Mechanics*, 2006, **41**(1): 78-85.
- [12] Subhas Abel M, Mahesha N. Heat transfer in MHD viscoelastic fluid flow over a stretching sheet with variable thermal conductivity, non-uniform heat source and radiation[J]. *Appl Math Model*, 2008, **32**(10): 1965-1983.
- [13] Bhatnagar R K, Gupta G, Rajagopal K R. Flow of an Oldroyd-B fluid due to a stretching sheet in the presence of a free stream velocity[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 1995, **30**(3): 391-405.
- [14] Renardy M. High Weissenberg number boundary layers for upper convected Maxwell fluid [J]. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 1997, **68**(1): 125-132.
- [15] Sadeghy K, Najafi A H, Saffaripour M. Sakiadis flow of an upper-convected Maxwell fluid [J]. *Int J Nonlinear Mech*, 2005, **40**(9): 1220-1228.
- [16] Hayat T, Abbas Z, Sajid M. Series solution for the upper-convected Maxwell fluid over a porous stretching plate[J]. *Phys Lett A*, 2006, **358**(5/6): 396-403.
- [17] Aliakbar V, Alizadeh-Pahlavan A, Sadeghy K. The influence of thermal radiation on MHD flow of Maxwellian fluids above stretching sheets[J]. *CNSNS*, 2009, **14**(3): 779-794.
- [18] Hayat T, Abbas Z, Ali N. MHD flow and mass transfer of an upper-convected Maxwell fluid past a porous shrinking sheet with chemical reaction species [J]. *Phys Lett A*, 2008, **372**(26): 4698-4604.
- [19] Chambre P L, Young J D. On the diffusion of a chemically reactive species in a laminar boundary layer flow[J]. *Phys Fluids*, 1958, **1**: 48-54.
- [20] Anjali Devi S P, Kandaswamy R. Effects of chemical reaction heat and mass transfer on MHD flow past a semi infinite plate[J]. *ZAMM*, 2000, **80**(10): 697-701.
- [21] Takhar H S, Chamkha A J, Nath G. Flow and mass transfer on a stretching sheet with a mag-

- netic field and chemically reactive species[J]. *Int J Eng Sci*, 2000, **38**(12): 1303-1314.
- [22] Akyildiz F T, Bellout H, Vajravelu K. Diffusion of chemically reactive species in a porous medium over a stretching sheet[J]. *J Math Anal Appl*, 2006, **320**(1): 322-339.
- [23] Cortell R. Toward an understanding of the motion and mass transfer with chemically reactive species for two classes of viscoelastic fluid over a porous stretching sheet[J]. *Chem Eng Proc*, 2007, **46**(10): 982-989.
- [24] Gupta A S, Wineman A S. On the boundary layer theory for non-Newtonian fluids[J]. *Lett Appl Eng Sci*, 1980, **18**(6): 875-883.
- [25] Bird R B, Armstrong R C, Hassager O. *Dynamics of Polymeric Liquids*[M]. New York: John Wiley and Sons, 1987.
- [26] Andersson H I, Hansen O R, Holmedal B. Diffusion of a chemically reactive species from a stretching sheet[J]. *Int J Heat Mass Trans*, 1994, **37**(4): 659-664.
- [27] Cebeci T, Bradshaw P. *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer* [M]. New York: Springer-Verlag, 1984.
- [28] Keller H B. *Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems*[M]. New York: Dover Publ, 1992.
- [29] Andersson H I, Bech K H, Dandapat B S. Magnetohydrodynamic flow of a power law fluid over a stretching sheet[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 1992, **27**(6): 929-936.

MHD Flow and Mass Transfer of a Chemically Reactive Upper Convected Maxwell (UCM) Fluid Past a Porous Surface

K. Vajravelu¹, K. V. Prasad², A. Sujatha², Chiu-on NG³

(1. *Department of Mathematics, University of Central Florida, Orlando, Florida 32816, USA;*

2. *Department of Mathematics, Bangalore University, Central College Campus, Bangalore-560 001, India;*

3. *Department of Mechanical Engineering, The University of Hong Kong, Pokfulam Road, Hong Kong, P. R. China)*

Abstract: The MHD flow and mass transfer of an electrically conducting upper convected Maxwell fluid at a porous surface in the presence of a chemically reactive species was studied. The governing nonlinear partial differential equations along with the appropriate boundary conditions were transformed into nonlinear ordinary differential equations, and were solved numerically by the Keller-Box method. The effects of various physical parameters on the flow and mass transfer characteristics were presented graphically and discussed. It is observed that the order of the chemical reaction is to increase the thickness of the diffusion boundary layer. Also, the mass transfer rate strongly depends on the Schmidt number and the reaction rate parameter. Furthermore, available results in the literature are obtained as a special case.

Key words: chemically reactive species; upper convected Maxwell fluid; MHD flow; mass transfer; Keller-Box method