

纳米流体在非线形伸展面上粘性流动 及其热交换时的相似解*

M·A·A·哈玛德^{1,2}, M·费尔道斯³

- (1. 艾斯尤特大学 科学学院 数学系,艾斯尤特 71516, 埃及;
2. 马来西亚理科大学 数学科学学院, 檳榔 11800, 马来西亚;
3. 达卡大学 数学系,达卡 1000, 孟加拉)

摘要: 当含金属颗粒的粘性流体(即纳米流体)流过非线性伸展平面时,分析其边界层流动及其热交换.假设伸展速度是到原点距离的幂函数.将偏微分的控制方程及其相应的边界条件,简化为耦合的非线性常微分方程及其相应的边界条件.数值地求解所得到的非线性常微分方程.讨论了各相关参数(即 Eckert 数 Ec , 纳米颗粒的固体体积率 ϕ 和非线性伸展参数 n) 对问题结果的影响,并与先前文献所报道的结果进行了对比.研究了不同类型的纳米颗粒.发现纳米流体的流动特性随着纳米颗粒类型的改变而变化.

关键词: 纳米流体; 非线性伸展平面; 相似解; 非线性常微分方程; 偏微分方程; 粘性流动

中图分类号: O361.3; O357.3; O357.4 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.07.007

引 言

大家知道纳米流体可以大大地提高原基础流体的热交换特性.热交换在物理学和工程中起着重要作用,从而改善了流体的热交换特性,提高了很多生产流程的效率.纳米流体是一种悬浮的流体,在常规的热交换流体中悬浮着纳米大小的固体颗粒,提高了其热交换特性.因此,纳米流体在工业中有着广泛应用,例如,冷冻剂、润滑剂、热交换器和微通道的散热器.于是,出现很多种方法来提高这些流体的热交换性能,即流体中悬浮着纳米/微米级的原料颗粒,改善流体的热交换性能.显著提高流体热交换性能的突破性报道有,在流体中添加非常少量悬浮的金属或金属氧化物的纳米颗粒 Cu, CuO, Al_2O_3 ^[1-2], 或交错使用纳米管悬浮 ^[3-4] 与经典理论相冲突 ^[5-13], 来估计悬浮液有效的热交换性.关于纳米流体中自然对流热交换模型数值研究的最新报道有, Congedo 等 ^[14], Ghasemi 和 Aminossadati ^[15], Ho 等 ^[16-17] 以及其他.这些研究有使用传统的有限差分法和有限体积法,为此需要指派巨大的计算机资源. Hamad 等 ^[18] 应用单参数群,将磁场对半无限平板纳米流体自由对流的影响问题,给出类似性的约简. Hamad 和 Pop ^[19] 在一个旋转的参考系中,对常热源可渗透振荡运动的半无限竖直平板,研究纳米流体在平板作

* 收稿日期: 2011-06-06; 修订日期: 2011-12-28

作者简介: M. A. A. Hamad(联系人. E-mail: m_hamad@aun.edu.eg).

本文原文为英文,黄雅意译,张禄坤校.

不稳定磁流体动力学流动的理论. Hamad^[20] 就不可压缩粘性纳米流体在磁场作用下, 流过半无限伸展平面时, 得到了其对流和热交换的解析解. Hamad 和 Ferdows^[21] 在一个充满纳米流体的多孔介质中, 伸展平面具备内在放/吸热和吸入/吹出功能时, 对平面上边界层驻点流动的传热传质进行了分析研究. 关于纳米流体更多文献, 可参见 Das 等^[22] 最新的专著, 以及 Trisaksri 和 Wongwises^[23], Wang 和 Mujumdar^[24], Kakac 和 Pramuanjaroenkij^[25] 的评论.

这里, 在伸展平面上边界层层状流动中, 质量和动量交换是一个重要课题, 因为它可应用于聚合物工艺和冶金工艺中. Gupta 等^[26] 称伸展平面不必一定是线性的. Vajravelu^[27] 研究了耗散粘性流体, 在非线性伸展平面上的流动和热交换, 但分析仅在平面维持常温下进行. Raptis 和 Perdikis^[28] 在有化学反应和磁场作用时, 研究了不可压缩粘性导电流体, 在非线性半无限伸展平面上作二维的稳定流动. Bataller^[29] 对静止流体中, 伸展速度为 $u_x(x) = x^{1/3}$ 时的边界层流动和热交换进行了数值分析. Prasad 和 Vajravelu^[30] 研究了幂律型流体在非等温伸展平面上的 MHD 边界层流动及其热交换. 还可以举出一些最新的研究, Ziabakhsh 等^[31] 对浸入多孔介质的非线性伸展平面上的流动和化学反应扩散问题, 利用同伦分析法 (HAM) 计算其近似解. Akyildiz 和 Siginer^[32] 利用 Galerkin Legendre 光谱分析法, 给出了粘性流体流经非线性伸展平面时速度和温度场的解析解. Prasad 等^[33] 对粘性导电流体流过竖直平板时, 给出了其二维稳定 MHD 混合对流的数值解. 他们假设伸展速度和横向磁场是到原点距离的一个幂函数. Afzal^[34] 在二维非线性伸展的平面上, 或者轴对称的平面上, 或者非线性幂律伸展速度引起的旋转物体上, 研究其层状边界层流动.

本文对不可压缩粘性纳米流体, 流过非线性伸展表面时的二维流动及其热交换给出相似解. 数值地求解所得到的常微分方程组. 目的是研究不同的纳米流体参数 (纳米颗粒的固体体积率 ϕ) 和非线性伸展参数 n 对流动和热交换特性的影响.

1 问题的公式化表示

考虑不可压缩粘性流体, 在 $y=0$ 平面上作稳定的二维层状流动, 流动限于 $y > 0$. 沿 x 轴作用着两个大小相等、方向相反的力, 使得壁面伸展的同时保持原点的位置不变 (见文献 [35]). 当周围环境温度为常温 T_∞ 时, 伸展面的温度维持为常温 T_w . 进一步假设常规流体和悬浮的纳米颗粒处于热平衡状态, 并且它们之间不出现相对的滑动. 纳米流体的热物理特性按 Oztop 和 Abu-Nada^[36] 的给出. 基于上述假设, 当存在热源/汇时, 控制流动和温度的边界层方程 (利用了边界层近似, 并计入粘性耗散能量方程中的最后一项) 为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{2}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{nf} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu_{nf}}{(\rho c_p)_{nf}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \tag{3}$$

其中, x 和 y 分别为沿平面和垂直于平面的坐标, u 和 v 分别为 x 和 y 方向上的速度分量, T 为流体的局部温度, n 为非线性的伸展参数, 对纳米流体来说, ρ_{nf} 为其有效密度, μ_{nf} 为其有效动粘度, $(\rho c_p)_{nf}$ 为其有效热容, α_{nf} 为其有效热扩散率, κ_{nf} 为其有效热传导率, 它们分别定义如下^[36-37]:

$$\begin{cases} \rho_{\text{nf}} = (1 - \phi)\rho_f + \phi\rho_s, \mu_{\text{nf}} = \frac{\mu_f}{(1 - \phi)^{2.5}}, \\ (\rho c_p)_{\text{nf}} = (1 - \phi)(\rho c_p)_f + \phi(\rho c_p)_s, \alpha_{\text{nf}} = \frac{\kappa_{\text{nf}}}{(\rho c_p)_{\text{nf}}}, \\ \kappa_{\text{nf}} = \kappa_f \left\{ \frac{\kappa_s + 2\kappa_f - 2\phi(\kappa_f - \kappa_s)}{\kappa_s + 2\kappa_f + 2\phi(\kappa_f - \kappa_s)} \right\}, \end{cases} \quad (4)$$

其中, ϕ 为纳米颗粒的固体体积率.

问题相应的边界条件为

$$\begin{cases} u = u_w(x) = cx^n, v = 0, T = T_w(x) = T_\infty + bx^{2n}, & \text{当 } y = 0, \\ u \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty, & \text{当 } y \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (5)$$

其中 b 和 c 为正常数.

引入以下无量纲变量(见文献[35]):

$$\begin{cases} \eta = y\sqrt{c(n+1)/(2\nu_f)}x^{(n-1)/2}, u = cx^n F'(\eta), \\ v = -\sqrt{\frac{(n+1)c\nu_f}{2}}x^{(n-1)/2} \left[F(\eta) + \frac{n-1}{n+1}\eta F'(\eta) \right], \\ \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \end{cases} \quad (6)$$

利用式(6),将方程(1)~(3)变成如下无量纲的常微分方程组:

$$F''' + (1 - \phi)^{2.5} [1 - \phi + \phi(\rho_s/\rho_f)] (FF'' - \frac{2n}{n+1}F'^2) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\kappa_{\text{nf}}}{\kappa_f} \right) \theta'' + \frac{Ec}{(1 - \phi)^{2.5}} F'^2 + (1 - \phi + \phi(\rho c_p)_s/(\rho c_p)_f) \left[F\theta' - \frac{4n}{n+1}F'\theta \right] = 0, \quad (8)$$

相应的边界条件(5)变为

$$\begin{cases} F = 0, F' = 1, \theta = 1, & \text{当 } \eta = 0, \\ F' \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0, & \text{当 } \eta \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (9)$$

其中, $Pr = \nu/\alpha$ 为 Prandtl 数, Eckert 数 Ec 定义为

$$Ec = \frac{u_w^2}{c_p(T_w - T_\infty)}, \quad (10)$$

表面摩擦因数 C_f 和局部的 Nusselt 数 Nu_x 分别定义为

$$\begin{cases} C_f = \frac{\mu_{\text{nf}}}{\rho_f u_w^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, \\ Nu_x = -\frac{x\kappa_{\text{nf}}}{\kappa_f(T_w - T_\infty)} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \end{cases} \quad (11)$$

利用式(6)和式(11),得到

$$\begin{cases} Re_x^{1/2} C_f = \frac{1}{(1 - \phi)^{2.5}} \left(\frac{n+1}{2} \right)^{1/2} F''(0), \\ Re_x^{-1/2} Nu_x = -\frac{\kappa_{\text{nf}}}{\kappa_f} \left(\frac{n+1}{2} \right)^{1/2} \theta'(0), \end{cases} \quad (12)$$

其中, $Re_x = xu_w/\nu_f$ 为局部的 Reynolds 数,此时的伸展速度为 u_w .

2 结果和讨论

利用打靶法,并结合 MATHEMATICA 程序,对于控制参数 ϕ, Pr, Ec 和 n 的某些取值,在边界条件(9)下,数值地求解耦合的非线性常微分方程(7)和(8).为了检验本文所得结果的准确性,不考虑 ϕ 的影响时,将本文结果和文献[35]的结果进行比较.两者显示出很好的一致性,如表 1 和表 2 所示.表 3 就基础流体(水)相同、纳米颗粒分别为铜和银的两种纳米流体,当 $Ec = 0$ 和 $0.1, n = 10, Pr = 10$ 时,给出了不同 ϕ 数值下的 $F'(0)$ 和 $\theta'(0)$.图 1 至图 6 绘出的数值结果,充分显示出纳米流体流动的重要特征及其热交换特点.这些图形在不同的物理参数下分别显示出,速度分布曲线(图 1 和图 4)、温度分布曲线(图 2 和图 3)、简化壁面表面摩擦因数的变化(图 5)以及简化壁面 Sherwood 数的变化(图 6).

表 1 当 $\phi = 0$ 时,比较本文和文献[35]所得到的 $-F'(0)$

Table 1 Comparison of results for $-F'(0)$ when $\phi = 0$

n	present results $-F'(0)$	Cortell ^[35] $-F'(0)$
0.0	0.636 9	0.627 6
0.2	0.765 9	0.766 8
0.5	0.889 7	0.889 5
1.0	1.004 3	1.0
3.0	1.148 1	1.148 6
10.0	1.234 2	1.234 9
20.0	1.257 4	1.257 4

表 2 当 $Pr = 5$ 时,比较本文和文献[35]所得到的 $-\theta'(0)$

Table 2 Comparison of results for $-\theta'(0)$ when $Pr = 5$

n	$Ec = 0$		$Ec = 0.1$	
	present results $-\theta'(0)$	Cortell ^[35] $-\theta'(0)$	present results $-\theta'(0)$	Cortell ^[35] $-\theta'(0)$
0.75	3.124 6	3.125 0	3.015 6	3.017 0
1.5	3.567 2	3.567 7	3.456 6	3.455 7
7.0	4.184 8	4.185 4	4.065 9	4.065 7
10.0	4.256 0	4.256 0	4.135 4	4.135 3

表 3 当 $Pr = 10$ 和 $n = 10$ 时,固体体积率 ϕ 对 $F'(0)$ 和 $\theta'(0)$ 的影响

Table 3 The effect of the solid volume fraction on $F'(0)$ and $\theta'(0)$ when $Pr = 10$ and $n = 10$

ϕ	$-F'(0)$		$-\theta'(0)$			
			$Ec = 0$		$Ec = 0.1$	
	Cu	Ag	Cu	Ag	Cu	Ag
0.05	1.400 49	1.436 46	5.621 89	5.577 54	5.368 53	5.312 81
0.1	1.477 69	1.537 12	5.172 37	5.091 04	4.884 17	4.782 34
0.15	1.517 94	1.593 00	4.772 57	4.659 91	4.455 81	4.315 13
0.2	1.528 80	1.613 99	4.413 06	4.273 71	4.072 41	3.898 74

图 1 和图 2 就铜纳米颗粒体积率 ϕ 取不同数值时,分别给出了速度 $F'(\eta)$ 和温度 $\theta(\eta)$ 的变化,其中非线性伸展参数取 3 个不同的数值 $n(= 0, 0.5, 10), Ec = 0.1, Pr = 6.8$ (水).从图 1 可以看出,动量边界层厚度随着 ϕ 的增加而减小.因纳米颗粒的存在,使边界层变得更薄.然

而,从图 2 可以看出,热边界层厚度随着纳米颗粒体积率 ϕ 的增加而增加。也就是说,铜-水纳米流体的热边界层厚度比纯水 ($\phi = 0$) 的要厚得多。这是因为铜的热传导率高,从而使纳米流体的热传导率提高,于是热边界层厚度变厚。进一步可以看到,动量边界层和热边界层都随着非线性伸展参数 n 的增加而减小。

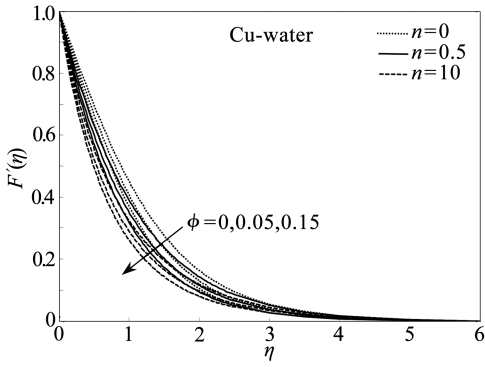


图 1 当 $n = 0, 0.5, 10, Ec = 0.1$ 和 $Pr = 6.8$ (水) 时, ϕ 取不同值时的速度分布曲线

Fig. 1 Velocity profiles for various ϕ when $n = 0, 0.5$ and 10 with $Ec = 0.1$

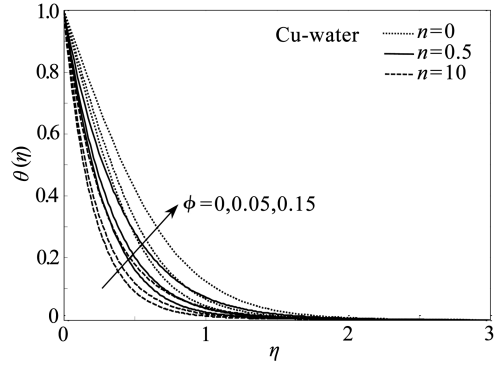


图 2 当 $n = 0, 0.5, 10, Ec = 0.1$ 和 $Pr = 6.8$ (水) 时, ϕ 取不同值时的温度分布曲线

Fig. 2 Temperature profiles for various ϕ when $n = 0, 0.5$ and 10 with $Ec = 0.1$

图 3 给出了当 $n = 0.5$ 时, Ec 对铜-水纳米流体温度分布的影响。可以看出,热边界层厚度随着 Ec 的增加而增加。还可以看出,对于每一个 Ec 值,铜-水纳米流体的热边界层厚度比纯水时要厚得多。

图 4 给出了当 $\phi = 0.1, n = 0.5, Pr = 6.8$ 和 $Ec = 0.1$ 时,不同类型纳米流体的速度和温度分布特性。可以看到,动量边界层和热边界层的厚度都随着纳米颗粒类型的变化而变化。这意味着,常规流体中增加纳米颗粒起着重要作用。

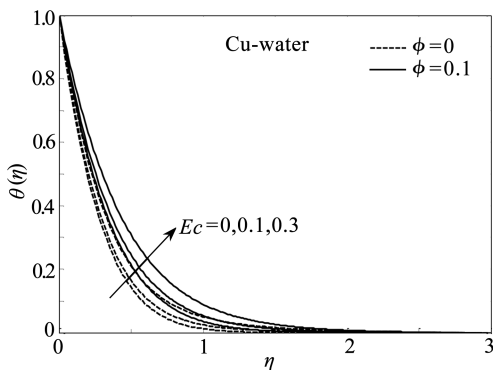


图 3 当 $n = 0.5, \phi = 0$ (常规流体), 0.1 (铜-水纳米流体) 时, Ec 取不同值时的温度分布曲线

Fig. 3 Temperature profiles for various Ec when $\phi = 0$ (regular fluid) and $\phi = 0.1$ with $n = 0.5$

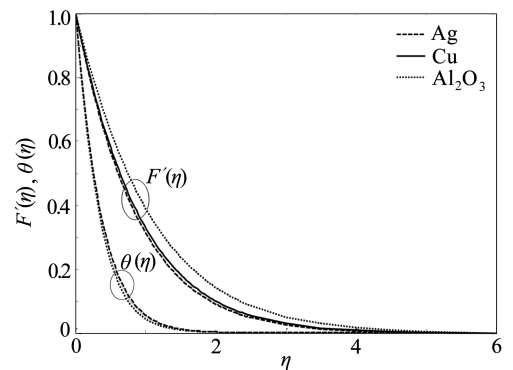


图 4 当 $\phi = 0.1, n = 0.5, Pr = 6.8$ 和 $Ec = 0.1$ 时,不同类型的纳米流体所对应的速度和温度分布曲线

Fig. 4 Velocity and temperature profiles for different types of nanofluids when $\phi = 0.1, n = 0.5, Pr = 6.8$ and $Ec = 0.1$

图 5 和图 6 就铜-水纳米流体, 分别给出了剪应力和热交换随着非线性伸展参数 n 的变化. 图 5 给出了纳米颗粒体积率 ϕ 对剪应力的影响, 而图 6 对于两个 Eckert 数 $Ec (= 0, 0.2)$, 描绘出 ϕ 对热交换率的影响. 从图 5 可以看出, 剪应力随着 ϕ 的增加而增加. 还可以看到, 剪应力随着 n 的增加而增加. 从图 6 可以看出, 热交换率随着 ϕ 的增加而增加, 并且随着 n 的增加而增加. 还可以看到, $Ec = 0$ 时的热交换率比 $Ec \neq 0$ 时的热交换率要高.

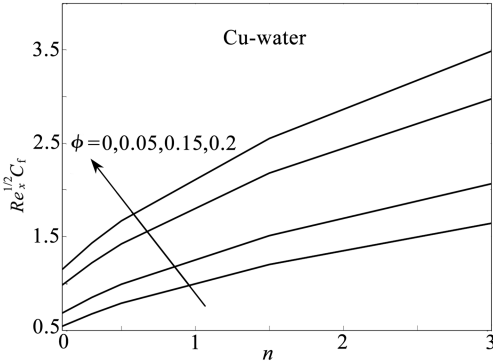


图 5 当 $Pr = 6.8$, ϕ 取不同值时, 表面摩擦因数随 n 的变化

Fig. 5 Variation of the skin friction with n for various ϕ when $Pr = 6.8$

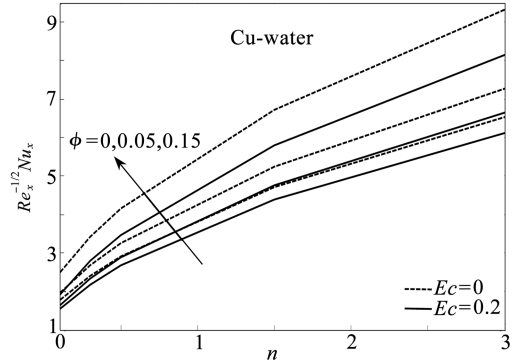


图 6 当 $Ec = 0, 0.2$, $Pr = 6.8$ 时, 局部 Nusselt 数随 n 的变化

Fig. 6 Variation of the local Nusselt number with n when $Ec = 0$ and 0.2 with $Pr = 6.8$

3 结 论

本文研究了纳米流体, 在一个非线性伸展表面上, 作二维层状的自由对流运动问题. 给出了问题的相似解, 并分析和讨论了该数值解. 数值解依赖于纳米颗粒体积率 ϕ , 非线性伸展参数 n , Eckert 数 Ec 和 Prandtl 数 Pr . 基础流体为水时 $Pr = 6.8$. 研究了速度和温度分布曲线, 以及表面摩擦因数和表面热通量与这些参数之间的依赖关系. 我们发现, 该问题中的基础流体所包含的纳米颗粒, 有可能改变所考虑问题的流动模式.

参考文献 (References):

- [1] Eastman J A, Choi S U S, Li S, Yu W, Thompson L J. Anomalous increased effective thermal conductivities of ethylene glycol-based nanofluids containing copper nanoparticles [J]. *Appl Phys Lett*, 2001, **78**(6): 718-720.
- [2] Lee S, Choi S U-S, Li S, Eastman J A. Measuring thermal conductivity of fluids containing oxide nanoparticles [J]. *J Heat Transf*, 1999, **121**(2): 280-289.
- [3] Choi S U S, Zhang Z G, Yu W, Lockwood F E, Grulke E A. Anomalous thermal conductivity enhancement in nanotube suspensions [J]. *Appl Phys Lett*, 2001, **79**(14): 2252-2254.
- [4] Xuan Y, Li Q. Heat transfer enhancement of nanofluids [J]. *Int J Heat Mass Transf*, 2000, **21**(1): 58-64.
- [5] Batchelor G K. Sedimentation in a dilute dispersion of spheres [J]. *J Fluid Mech*, 1972, **52**(2): 45-268.
- [6] Batchelor G K, Green J T. The hydrodynamic interaction of two small freely-moving [J]. *J*

- Fluid Mech*, 1972, **56**(2): 375-400.
- [7] Bonnecaze R T, Brady J F. A method for determining the effective conductivity of dispersions of particles[J]. *Proc R Soc Lond A*, 1990, **430**(1879): 285-313.
- [8] Bonnecaze R T, Brady J F. The effective conductivity of random suspensions of spherical particles[J]. *Proc R Soc Lond A*, 1991, **432**(1886): 445-465.
- [9] Davis R H. The effective thermal conductivity of a composite material with spherical inclusions[J]. *Int J Thermophys*, 1986, **7**(3): 609-620.
- [10] Hamilton R L, Crosser O K. Thermal conductivity of heterogeneous two-component systems [J]. *Ind Eng Chem Fundam*, 1962, **1**(3): 187-191.
- [11] Jeffrey D J. Conduction through a random suspension of spheres[J]. *Proc R Soc Lond A*, 1973, **335**(1602): 355-367.
- [12] Lu S, Lin H. Effective conductivity of composites containing aligned spheroidal inclusions of finite conductivity[J]. *J Appl Phys*, 1996, **79**(9): 6761-6769.
- [13] Maxwell J C. *A Treatise on Electricity and Magnetism* [M]. 3rd ed. 1954 reprint. Dover, NY: Clarendon Press, 1891: 435-441.
- [14] Congedo P M, Collura S, Congedo P M. Modeling and analysis of natural convection heat transfer in nanofluids[C]//*Proceedings of ASME Summer Heat Transfer Conference*. USA: Florida, 2009, **3**: 569-579.
- [15] Ghasemi B, Aminossadati S M. Natural convection heat transfer in an inclined enclosure filled with a water-CuO nanofluid[J]. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 2009, **55**(8): 807-823.
- [16] Ho C J, Chen M W, Li Z W. Numerical simulation of natural convection of nanofluid in a square enclosure; Effects due to uncertainties of viscosity and thermal conductivity[J]. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 2008, **51**(17/18): 4506-4516.
- [17] Ho C J, Chen M W, Li Z W. Effect on natural convection heat transfer of nanofluid in an enclosure due to uncertainties of viscosity and thermal conductivity[C]//*Proceedings of ASME/JSME Thermal Engineering Summer Heat Transfer Conference*. Canada: British Columbia, 2007, **1**: 833-841.
- [18] Hamad M A A, Pop I, Ismail A I. Magnetic field effects on free convection flow of a nanofluid past a vertical semi-infinite flat plate[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Appl*, 2011, **12**(3): 1338-1346.
- [19] Hamad M A A, Pop I. Unsteady MHD free convection flow past a vertical permeable flat plate in a rotating frame of reference with constant heat source in a nanofluid[J]. *Heat Mass Transfer*, 2011, **47**(12): 1517-1524.
- [20] Hamad M A A. Analytical solution of natural convection flow of a nanofluid over a linearly stretching sheet in the presence of magnetic field[J]. *Int Comm Heat Mass Transfer*, 2011, **38**(4): 487-492.
- [21] Hamad M A A, Ferdows M. Similarity solution of boundary layer stagnation-point flow towards a heated porous stretching sheet saturated with a nanofluid with heat absorption/generation and suction/blowing; a lie group analysis[J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2012, **17**(1): 132-140.

- [22] Das S K, Choi S U S, Yu W, Pradeep T. *Nanofluids: Science and Technology* [M]. New Jersey: Wiley, 2007.
- [23] Trisaksri V, Wongwises S. Critical review of heat transfer characteristics nanofluids[J]. *Renew Sustain Energy Rev*, 2007, **11**(3): 512-523.
- [24] Wang X-Q, Mujumdar A S. Heat transfer characteristics of nanofluids: a review[J]. *Int J Therm Sci*, 2007, **46**(1): 1-19.
- [25] Kakac S, Pramuanjaroenkij A. Review of convective heat transfer enhancement with nanofluids[J]. *Int J Heat Mass Transf*, 2009, **52**(13/14): 3187-3196.
- [26] Gupta P S, Gupta A S. Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing [J]. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 1977, **55**(6): 744-746.
- [27] Vajravelu K. Viscous flow over a nonlinearly stretching sheet[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2001, **124**(3): 281-288.
- [28] Raptis A, Perdikis C. Viscous flow over a non-linearly stretching sheet in the presence of a chemical reaction and magnetic field[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, **41**(4): 527-529.
- [29] Bataller R C. Similarity solutions for flow and heat transfer of a quiescent fluid over a nonlinearly stretching surface[J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 2008, **203**(1/3): 176-183.
- [30] Prasad K V, Vajravelu K. Heat transfer in the MHD flow of a power law fluid over a non-isothermal stretching sheet[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2009, **52**(21/22): 4956-4965.
- [31] Ziabakhsh Z, Domairry G, Baramia H, Babazadeh H. Analytical solution of flow and diffusion of chemically reactive species over a nonlinearly stretching sheet immersed in a porous medium[J]. *Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers*, 2010, **41**(1): 22-28.
- [32] Akyildiz F T, Siginer D A. Galerkin-Legendre spectral method for the velocity and thermal boundary layers over a non-linearly stretching sheet[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, **11**(2): 735-741.
- [33] Prasad K V, Vajravelu K, Datti P S. Mixed convection heat transfer over a non-linear stretching surface with variable fluid properties[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2010, **45**(3): 320-330.
- [34] Afzal N. Momentum and thermal boundary layers over a two-dimensional or axisymmetric non-linear stretching surface in a stationary fluid [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, **53**(1/3): 540-547.
- [35] Cortell R. Viscous flow and heat transfer over a nonlinearly stretching sheet [J]. *Applied Mathematical and Computation*, 2007, **184**(2): 864-873.
- [36] Oztop H F, Abu-Nada E. Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids[J]. *Int J Heat Fluid Flow*, 2008, **29**(5): 1326-1336.
- [37] Aminossadati S M, Ghasemi B. Natural convection cooling of a localized heat source at the bottom of a nanofluid-filled enclosure[J]. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 2009, **28**(5): 630-640.

On Similarity Solutions to the Viscous Flow and Heat Transfer of Nanofluid Over Nonlinearly Stretching Sheet

M. A. A. Hamad^{1,2}, M. Ferdows³

(1. *Mathematics Department, Faculty of Science, Assiut University, Assiut 71516, Egypt;*

2. *School of Mathematical Sciences, Universiti Sains Malaysia, Penang 11800, Malaysia;*

3. *Department of Mathematics, University of Dhaka, Dhaka-1000, Bangladesh)*

Abstract: The boundary-layer flow and heat transfer in a viscous fluid containing metallic nanoparticles over a nonlinear stretching sheet was analyzed. The stretching velocity was assumed to vary as a power function of the distance from the origin. The governing partial differential equation and auxiliary conditions were reduced to coupled non-linear ordinary differential equations with the appropriate corresponding auxiliary conditions. The resulting non-linear ODEs were solved numerically. The influences of various relevant parameters, namely, the Eckert number Ec , the solid volume fraction of the nanoparticles ϕ and the nonlinear stretching parameter n were discussed and comparison with published results was presented. Different types of nanoparticles were studied. It was noted that the behavior of the fluid flow was changed with the change of the nanoparticles type.

Key words: nanofluid; nonlinearly stretching sheet; similarity solution; nonlinear ordinary equations; partial differential equations; viscous flow