

一种基于过滤与反卷积的 新型高阶浸没边界法*

方 乐^{1,2,3}

- (1. 北京航空航天大学 中法工程师学院, 北京 100191;
2. 中国科学院 非线性力学国家重点实验室, 北京 100090;
3. 西南交通大学 高速铁路线路工程教育部重点实验室, 成都 610031)

摘要: 传统浸没边界法在边界附近只有一阶精度, 而高精度的改进方法都需要额外引入跳跃条件, 因此不具备普适性. 文中设计了一种基于过滤和反卷积的新型算法, 既在一定程度上提高了精度, 又避免了以往方法中引入额外跳跃条件的难题. 通过一个简单的二维算例验证了新算法可以达到接近二阶精度, 其具体的精度值与反卷积步骤中选取的逆核函数在积分域边界的连续性有关.

关键词: 浸没边界法; 反卷积; 过滤

中图分类号: O242.1; O242.2; O35 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.08.004

引 言

在计算流体力学领域中, 浸没边界法 (immersed boundary method, IBM) 是一种近年来得到很快发展的新型数值方法. 浸没边界法于上世纪 70 年代由 Peskin^[1-3] 在计算血液流动和流固耦合问题中创立, 它允许流体边界与计算网格不一致, 将无滑移边界条件通过外力项的形式添加到求解方程中. 由于外力项一般写成 δ 函数的形式, 因此如何数值求解这样的含间断的微分方程也就是随之而来的问题. 传统的浸没边界法一般采用所谓的“光滑 δ 函数” (smoothed delta function) 方法处理 δ 函数, 然而通常情况下采用此方法的精度很低, 以往的工作已经证明了在间断附近用光滑 δ 函数只能达到一阶精度^[4-5]. 为改进此精度问题, 在过去的十年内有许多学者做过重要工作, 比如 Lai 和 Peksin^[6] 提出了一种形式上二阶的离散方法, 但在实际应用中发现此方法仍然只能实现一阶精度^[7]. 也有其他学者提出了 IIM (immersed interface method)、MIB (matched interface and boundary) 等改进方法^[8-10], 但这些方法都需要在间断附近额外引入若干个跳跃条件 (jump condition), 而实际问题却并不一定能满足这些跳跃条件, 因而这些方法大多不具备普适性. 如何在不引入跳跃条件的前提下实现高阶精度, 一直是浸没边界法发展过程中一个重要而棘手的问题.

本文提出一种新型浸没边界法, 首先对含间断的微分方程进行过滤操作, 将间断方程变为连续方程; 接着对解得的光滑函数采用反卷积即得到最终结果. 新方法既在一定程度上提高了

* 收稿日期: 2013-03-29; 修订日期: 2013-05-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11202013); 非线性力学国家重点实验室开放基金资助项目

作者简介: 方乐 (1983—), 安徽歙县人, 副教授, 博士 (E-mail: le.fang@zoho.com).

精度,又避免了引入跳跃条件的问题.本文对此新方法进行简单描述,并通过一个一维算例做初步的验证.

1 算法描述

本文介绍的新型浸没边界法可概括为两个步骤:第1步是对含间断的微分方程进行过滤操作,得到光滑可离散的新方程,并进行数值求解,此部分在1.1节中进行介绍;第2步是对解得的光滑函数进行反卷积操作,在本文中我们选用一种在物理空间进行的反卷积算法,在1.2节中进行介绍.另外,针对本方法中的边界条件处理问题,在1.3节中进行专门的讨论.为简便起见,本文以一维的情形为例,考虑如下的方程:

$$u''(x) - u'(x) = \delta(x), \quad (1)$$

其中, $x \in [-1, 1]$, $\delta(x)$ 是 δ 函数, $u'(x)$ 表示对 $u(x)$ 求导. 方程的边界条件是 $u(-1) = u(1) = 0$. 该方程有解析解

$$u = -\frac{e}{1+e} e^x + (e^x - 1)H(x) + \frac{1}{1+e}, \quad (2)$$

其中 $H(x)$ 是 Heaviside 单位阶跃函数. 本算法在高维下的推广方法将在后面进行讨论.

1.1 过滤操作

考虑广义函数 $f(\mathbf{x})$, 其中自变量 \mathbf{x} 是 D 维矢量. 借鉴光滑粒子动力学 (smoothed particle hydrodynamics, SPH) 中的方法^[11], 对 $f(\mathbf{x})$ 的过滤操作定义为

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{h^D} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h}\right) d\mathbf{x}', \quad (3)$$

其中, Ω 是积分域, h 是相应的过滤器宽度. $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$ 即被称为 $f(\mathbf{x})$ 的过滤, 而 $W(r/h)$ 被称为过滤器的核函数. 在应用中, 核函数一般需要在 Ω 内连续单调可导, 正则化, 满足对称性, 且 Ω 应是 W 的紧支撑. 关于核函数的选取问题可以参考文献[11]. 本文中使用 Wendland C2 和 C4 两种核函数 (以下分别简称为 C2 和 C4), 其相应的函数形式见附录 A.

现在考虑方程(1), 并在其两边同时加上过滤操作. 容易看出, 当 W 是正则化函数时, δ 函数的过滤恰好可写成 W 的形式, 即

$$\langle \delta(x) \rangle = W(x/h). \quad (4)$$

因此, 方程(1)等价于如下的方程:

$$g''(x) - g'(x) = W(x/h), \quad (5)$$

其中 $g(x) = \langle u(x) \rangle$. 这个方程中不再含间断函数, 因而可以很容易地离散化求解. 我们在下面的测试中均采用三点中心差分法进行离散化, 从而解得函数 $g(x)$. 具体的离散形式可写为下式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_{-1} & c_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{N-1} \\ g_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ W(x_2/h) \\ W(x_3/h) \\ \vdots \\ W(x_{N-1}/h) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中, $c_{-1} = 1/(\Delta x)^2 + 1/(\Delta x)$, $c_0 = -2/(\Delta x)^2$, $c_1 = 1/(\Delta x)^2 - 1/(\Delta x)$, Δx 是网格尺度, g_i 是在网格点 x_i 上对应的函数 $g(x)$ 离散值. 众所周知, 采用三点中心差分可以达到二阶精度, 也就是说, 我们在本步骤求得的 $g(x)$ 具有二阶精度. 如果选用其他高阶格式还可以获得更高的

精度.

1.2 反卷积操作

根据 $g(x)$ 求 $u(x)$ 的过程即为反卷积操作. 由于选择的核函数变换到谱空间均不是谱截断, 所以理论上对 $g(x)$ 进行反卷积操作是可行的. 在信号处理、图像处理等领域中采用的反卷积方法通常是在谱空间进行的, 但考虑到实际计算中不一定方便做 Fourier 展开, 本文中不采用谱空间的反卷积操作. 相应的, 借鉴 Geurts^[12] 在湍流大涡模拟建模中的思路, 构造一个逆核函数来进行一定精度下的反卷积操作.

以一维情况为例, C2 和 C4 核函数在 x 点对应的紧支撑是 $[x - 2h, x + 2h]$. 考虑过滤操作:

$$g(x) = \langle f(x) \rangle = \frac{1}{h} \int_{x-2h}^{x+2h} f(x') W\left(\frac{x-x'}{h}\right) dx', \tag{7}$$

将 $f(x)$ 在局部展开成多项式的形式, 并考虑其所有 n 阶以下的部分. 我们希望找到一个对应的 n 阶逆核函数 $L(\xi)$, 使得如下的关系:

$$f(x) = \frac{1}{h} \int_{x-s}^{x+s} \langle f(x') \rangle L\left(\frac{x-x'}{h}\right) dx' \tag{8}$$

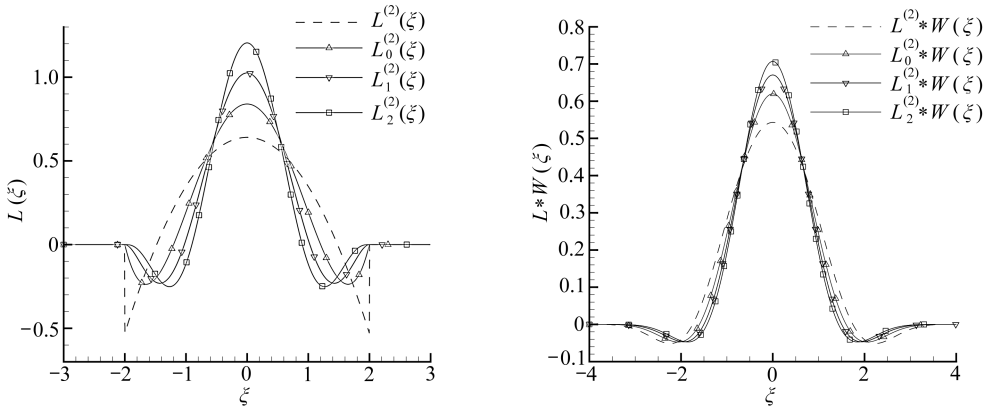
对所有 $m=0, 1, \dots, n$ 都成立. 对 C2 和 C4 核函数, 为简单起见, 我们令 $s=2h$, 这样卷积和反卷积操作就都具有相同的积分域.

可以假设 $2p(2p=n)$ 阶逆核函数 $L^{(2p)}(\xi)$ 的形式如下:

$$L^{(2p)}(\xi) = \sum_{i=0}^p a_i \xi^{2i}, \tag{9}$$

其中, a_i 是待定系数, 可以通过联立方程来求解. 针对 C2 和 C4 的逆核函数见附录 A 所示. 但在实际测试中发现, 由于这样构造的逆核函数在积分域边界缺乏连续性 (如图 1(a), 虚线所示), 因而导致数值积分精度不高. 为了改善逆核函数的积分域边界的连续性, 对逆核函数提出 k 阶连续性要求, 即对 $m=0, 1, \dots, k$, 有

$$\left. \frac{d^m L(\xi)}{d\xi^m} \right|_{\xi=\pm s} = 0. \tag{10}$$



(a) 逆核函数 $L(\xi)$

(a) Inverse kernel function $L(\xi)$

(b) 核函数和逆核函数的复合卷积 $L * W(\xi)$

(b) Composite convolution of the kernel function and inverse kernel function

图 1 针对 C2 的各种反卷积二阶逆核函数

Fig. 1 Second-order inverse kernel functions for the Wendland C2 kernel

这样, 就必须对式(9)增加额外的待定系数个数, 比如假设

$$L_k^{(2p)}(\xi) = \sum_{i=0}^{p+k+1} a_i \xi^{2i}, \quad (11)$$

其中 $L_k^{(2p)}$ 即表示在积分域边界满足 k 阶连续性的 $2p$ 阶逆核函数. 同样, 通过联立方程即可求得各待定系数 a_i . 各逆核函数的表达式和图形分别如附录 A 和图 1(a) 所示. 另外, 图 1(b) 显示了先后用核函数 W 和逆核函数 L 做卷积操作后的等价卷积核函数. 可以看到, 经过两次操作, 卷积影响域实际上由半径 $2h$ 扩大到了 $4h$.

通过选取适当的高阶逆核函数, 并在其积分域边界保证一定精度的连续性, 即可在本步骤保证反卷积的高阶精度. 因此, 通过上述过滤和反卷积两个步骤, 可以保证本文的新型浸没边界法在间断附近具有高阶精度.

1.3 边界条件处理

在前述部分中已经描述了新型浸没边界法的流程. 在该方法中, 计算域的边界处理是一个重要问题, 在本小节中我们对此进行讨论. 边界处理包含两个方面: 在过滤步中, 将原方程过滤得到式(5), 相应的边界条件也需要更新; 另外, 在反卷积步中, 在计算域附近做积分时需要使用边界以外的点的值, 因此也需要设定某种边界条件. 这两种边界条件的处理都比较困难, 难以找到通用的解法, 因此在本文中仅针对一维问题(1)介绍我们的处理方式.

考虑对方程(1)对应的解 $u(x)$ 做如下延拓:

$$\begin{cases} u(x) = -u(-2-x), & -2 < x < -1, \\ u(x) = -u(2-x), & 1 < x < 2. \end{cases} \quad (12)$$

这样, 当 $u(x)$ 满足边界条件 $u(-1) = u(1) = 0$ 时, 根据核函数的对称性, 我们就可以保证过滤后的函数 $g(x) = \langle u(x) \rangle$ 也必定满足 $g(-1) = g(1) = 0$.

类似地, 我们对 $g(x)$ 也做类似的延拓:

$$\begin{cases} g(x) = -g(-2-x), & -2 < x < -1, \\ g(x) = -g(2-x), & 1 < x < 2, \end{cases} \quad (13)$$

进而根据逆核函数的对称性, 可以保证反卷积后得到的结果 $u(x)$ 满足给定的边界条件

$$u(-1) = u(1) = 0.$$

需要指出的是, 这个做法仅仅对一维情况下的第一类边界条件适用. 对其他类型的边界条件, 需要针对不同情况采取不同的延拓方法. 特别是针对高维的不规则形状计算域, 如何在边界延拓是一个较复杂的问题, 在本文中暂不对此进行讨论.

2 算例结果

针对方程(1)描述的问题, 我们利用本文介绍的新算法进行了计算, 并与传统的光滑 δ 函数方法进行对比. 分别采用 Wendland C2 和 C4 过滤核函数, 并分别选用了 $L_2^{(2)}$ 和 $L_2^{(4)}$ 逆核函数进行测试, 如表 1 所示. 过滤特征尺度和网格尺度的比 $h/\Delta x$ 固定为 3.3. 各算例最大误差随网格点数的变化关系如图 2 所示. 与光滑 δ 函数方法的结果进行对比, 可以看到本文的新算法误差收敛率明显高于 N^{-1} , 因而精度均大于 1 阶. 新算法的 4 个算例精度略有差别, 它们的收敛速率均略低于 N^{-2} , 意味着实际精度略小于 2 阶. 可以观察到采用 4 阶连续的逆核函数(算例 C2-4 和 C4-4)比 2 阶连续的逆核函数(算例 C2-2 和 C4-2)有更高的收敛率, 总体算法精度更接近 2 阶. 因此我们猜测, 即便从理论上说本文算法可以达到二阶精度, 但逆核函数的误差也可能会导致总体精度的下降. 因此, 选取更高阶连续的逆核函数能更好地保证本文新算法的精度. 尽管如此, 但我们观察到在网格数不大时, 算例 C2-4 和 C4-4 甚至分别比 C2-2 和 C4-2 误差还要大, 这说明高阶连续的逆核函数在较小网格数时并不具有明显的性能改善. 另外, 对比

不同的过滤核函数,在网格数较小时 ($N < 200$) Wendland C4 核函数比 C2 有更小的误差,但在网格数较大时差别并不明显.固定离散点数 $N = 45$ 以比较各个算例的实际计算结果,如图 3 所示.通过间断附近的局部放大图 3(b) 同样可以看到, C4 核函数比 C2 误差要小.

表 1 算例参数(括号中数字是对应的公式编号)

Table 1 Test parameters(the numbers in brackets are equation numbers)

test case	kernel function	inverse kernel function
C2-2	Wendland C2 (A1)	$L_2^{(2)}$ (A5)
C2-4	Wendland C2 (A1)	$L_2^{(4)}$ (A6)
C4-2	Wendland C4 (A8)	$L_2^{(2)}$ (A12)
C4-4	Wendland C4 (A8)	$L_2^{(4)}$ (A13)

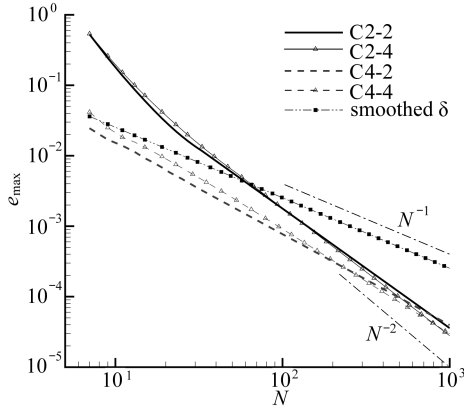
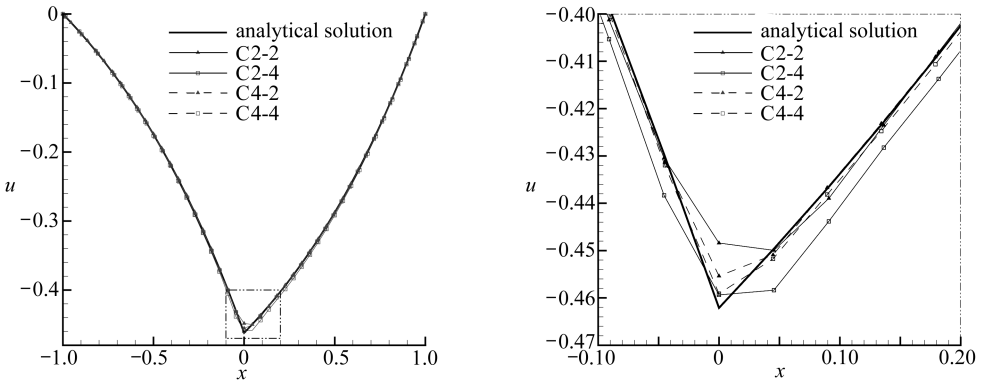


图 2 各测试算例最大误差,与光滑 δ 函数方法对比(算例参数如表 1 所示)

Fig. 2 Maximum error of test cases, compared with the smoothed δ function(parameters are shown in table 1)



(a) 总览 (a) Full view
(b) 局部放大图 (b) Zoomed view

图 3 $N = 45$ 时各算例计算结果,与解析解对比(算例参数如表 1 所示)

Fig. 3 Results of test cases with $N = 45$, compared with the analytical solution (parameters are shown in table 1)

3 高维情形

如前所述,本算法的核心内容可描述为过滤、反卷积和边界条件处理这 3 个部分.在高维情形下,由于我们尚未找到通用的边界条件处理方法,所以在本文中尚无法给出高维的测试算例.除此以外,过滤和反卷积的步骤是和前述内容是一致的,在此用一个二维例子给出具体的说

明. 以二维情形下的三阶 B 样条函数作为过滤核函数:

$$W(\xi) = \begin{cases} \frac{10}{7\pi} \left(1 - \frac{3}{2} \xi^2 + \frac{3}{4} |\xi|^3 \right), & 0 \leq |\xi| < 1, \\ \frac{5}{14\pi} (2 - |\xi|^3), & 1 \leq |\xi| \leq 2, \\ 0, & |\xi| > 2, \end{cases} \quad (14)$$

由式(3), 其对应的过滤操作描述为

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{h^2} \int_{\Omega'} f(\mathbf{x}') W\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{h}\right) d\mathbf{x}'. \quad (15)$$

类似地, 可以构造在积分域边界满足 k 阶连续性的 $2p$ 阶逆核函数

$$L_k^{(2p)}(\xi) = \sum_{i=0}^{p+k+1} a_i |\xi|^{2i}, \quad (16)$$

使得反卷积关系

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{h^2} \int_{\Omega'} \langle f(\mathbf{x}') \rangle L\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{h}\right) d\mathbf{x}'$$

对所有不高于 $2p$ 阶的多项式函数都成立. 比如, 设 Ω' 为圆盘 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| < 2h$, 即可求解出对应的逆核函数

$$L_2^{(2)}(\xi) = \frac{1}{392\pi} - \frac{300\xi^2}{49\pi} + \frac{10}{3} \frac{065\xi^4}{136\pi} - \frac{2}{3} \frac{155\xi^6}{136\pi} + \frac{5}{100} \frac{265\xi^8}{352\pi}. \quad (17)$$

接着用一个例子来验证过滤和反卷积的正确性. 取 $f(\xi) = \partial_x \mathcal{S}(\xi)$, 其中 $\mathcal{S}(\xi)$ 是二维 Gauss 函数. 取正方形计算域 $[-6, 6] \times [-6, 6]$, 共 $200 \times 200 = 40\,000$ 个网格, 并设光滑长度和网格长度之比 $h/\Delta x = 1.5$. 由图 4 可以看到, 经过过滤和反卷积两步操作后的函数与原始函数差别极小 (在图中体现为实线和点线差别较大, 但实线和虚线几乎重合), 验证了过滤和反卷积在高维情形下的可行性.

由于前述高维边界处理上存在的问题, 本文暂时无法给出高维情形下新型浸没边界法的完整算例. 高维情形下的边界处理方法将是我们下一步工作的主要内容.

4 结论与讨论

本文针对浸没边界法的精度问题, 设计了一种基于过滤和反卷积的新型算法. 新算法既在一定程度上提高了精度, 又避免了以往方法中引入额外跳跃条件的难题. 通过一个简单的一维算例, 验证了新算法可以达到接近二阶精度. 具体的精度值与反卷积步骤中选取的逆核函数在积分域边界的连续性有关.

需要指出的是, 在高维情形下, 尽管本算法的过滤操作和反卷积操作都可以很容易地推广, 但在边界条件的处理上我们尚未找到通用的方法. 针对简单的计算域形状和简单的边界条

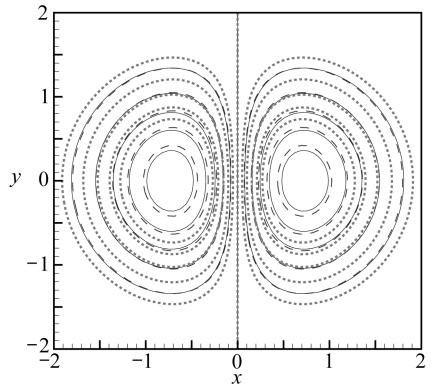


图 4 二维测试算例 (实线是原始函数的等值线, 点线是过滤后的函数等值线, 虚线是经过过滤和反卷积后的函数等值线)

Fig. 4 Two-dimensional test case (solid lines—isolines of the original function; dotted lines—isolines of the filtered function; dashed lines—isolines of the function after filter and deconvolution)

件,可以采用与本文类似的延拓方法,但当计算域复杂时将难以操作,需要引入类似“鬼粒子”(ghost particles)的方法^[13]。一旦在复杂计算域中应用鬼粒子,本算法的精度可能会难以保证,因此在高维情形下,如何有效地应用该新型浸没边界法仍然是需要进一步研究的课题。

附录 A 过滤核函数及其对应的逆核函数

Wendland C2 过滤核函数在一维时的形式如下:

$$W(\xi) = \begin{cases} \frac{3}{4} \left(1 - \left|\frac{\xi}{2}\right|\right)^4 (2|\xi| + 1), & x \leq |\xi| \leq 2, \\ 0, & |\xi| > 2. \end{cases} \quad (\text{A1})$$

当 $s = 2h$ 时,对应的逆核函数如下:

$$L^{(2)}(\xi) = \frac{141}{224} - \frac{255\xi^2}{896}, \quad (\text{A2})$$

$$L_0^{(2)}(\xi) = \frac{105}{128} - \frac{195\xi^2}{256} + \frac{285\xi^4}{2\,048}, \quad (\text{A3})$$

$$L_1^{(2)}(\xi) = \frac{255}{256} - \frac{1\,455\xi^2}{1\,024} + \frac{2\,145\xi^4}{4\,096} - \frac{945\xi^6}{16\,384}, \quad (\text{A4})$$

$$L_2^{(2)}(\xi) = \frac{2\,385}{2\,048} - \frac{4\,635\xi^2}{2\,048} + \frac{20\,655\xi^4}{16\,384} - \frac{9\,135\xi^6}{32\,768} + \frac{11\,385\xi^8}{524\,288}, \quad (\text{A5})$$

$$L_2^{(4)}(\xi) = \frac{66\,627}{28\,672} - \frac{1\,090\,485\xi^2}{114\,688} + \frac{318\,285\xi^4}{32\,768} - \frac{535\,095\xi^6}{131\,072} + \frac{5\,643\,495\xi^8}{7\,340\,032} - \frac{1\,584\,297\xi^{10}}{29\,360\,128}, \quad (\text{A6})$$

$$L_2^{(6)}(\xi) = \frac{66\,019\,291}{12\,845\,056} - \frac{143\,406\,705\xi^2}{3\,670\,016} + \frac{1\,912\,851\,135\xi^4}{29\,360\,128} - \frac{1\,313\,484\,315\xi^6}{29\,360\,128} + \frac{49\,079\,584\,125\xi^8}{3\,288\,334\,336} - \frac{15\,871\,981\,983\xi^{10}}{6\,576\,668\,672} + \frac{7\,993\,657\,295\xi^{12}}{52\,613\,349\,376}. \quad (\text{A7})$$

Wendland C4 过滤核函数在一维时的形式如下:

$$W(\xi) = \begin{cases} \frac{9}{32} \left(1 - \left|\frac{\xi}{2}\right|\right)^6 \left(\frac{35}{4}\xi^2 + 9|\xi| + 3\right), & x \leq |\xi| \leq 2, \\ 0, & |\xi| > 2. \end{cases} \quad (\text{A8})$$

当 $s = 2h$ 时,对应的逆核函数如下:

$$L^{(2)}(\xi) = \frac{27}{44} - \frac{3\xi^2}{11}, \quad (\text{A9})$$

$$L_0^{(2)}(\xi) = \frac{279}{352} - \frac{507\xi^2}{704} + \frac{735\xi^4}{5\,632}, \quad (\text{A10})$$

$$L_1^{(2)}(\xi) = \frac{21}{22} - \frac{1\,869\xi^2}{1\,408} + \frac{1\,365\xi^4}{2\,816} - \frac{1\,197\xi^6}{22\,528}, \quad (\text{A11})$$

$$L_2^{(2)}(\xi) = \frac{567}{512} - \frac{1\,071\xi^2}{512} + \frac{4\,725\xi^4}{4\,096} - \frac{2\,079\xi^6}{8\,192} + \frac{2\,583\xi^8}{131\,072}, \quad (\text{A12})$$

$$L_2^{(4)}(\xi) = \frac{912\,303}{450\,560} - \frac{2\,820\,699\xi^2}{360\,448} + \frac{5\,653\,935\xi^4}{720\,896} - \frac{9\,412\,011\xi^6}{2\,883\,584} + \frac{1\,281\,357\xi^8}{2\,097\,152} - \frac{1\,791\,153\xi^{10}}{41\,943\,040}, \quad (\text{A13})$$

$$L_2^{(6)}(\xi) = \frac{4\,834\,989}{1\,239\,040} - \frac{545\,932\,611\xi^2}{19\,824\,640} + \frac{710\,577\,819\xi^4}{15\,859\,712} - \frac{437\,854\,221\xi^6}{14\,417\,920} + \frac{579\,557\,763\xi^8}{57\,671\,680} - \frac{745\,463\,277\xi^{10}}{461\,373\,440} + \frac{2\,056\,321\,683\xi^{12}}{20\,300\,431\,360}. \quad (\text{A14})$$

致谢 作者感谢西南交通大学高速铁路线路工程教育部重点实验室开放研究基金对本文的资助。

参考文献(References):

- [1] Peskin C S. Flow patterns around heart valves: a numerical method[J]. *J Comput Phys*, 1972, **10**(2): 252-271.
- [2] Peskin C S. Numerical analysis of blood flow in the heart[J]. *J Comput Phys*, 1977, **25**(3): 220-252.
- [3] Peskin C S. The immersed boundary method[J]. *Acta Numerica*, 2002, **11**: 479-517.
- [4] Beyer P P, Leveque R J. Analysis of a one-dimensional model for the immersed boundary method[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1992, **29**(2): 332-364.
- [5] Tornberg A K, Engquist B. Numerical approximations of singular source terms in differential equations[J]. *J Comput Phys*, 2004, **200**(2): 462-488.
- [6] Lai M, Peskin C S. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity[J]. *J Comput Phys*, 2000, **160**(2): 705-719.
- [7] Griffith B E, Peskin C S. On the order of accuracy of the immersed boundary method: higher order convergence rates for sufficiently smooth problems[J]. *J Comput Phys*, 2005, **208**(1): 75-105.
- [8] Leveque R J, Li Z. Immersed interface methods for Stokes flow with elastic boundary or surface tension[J]. *SIAM J Sic Comput*, 1997, **18**(3): 709-735.
- [9] Zhou Y C, Shan Z, Michael F, Wei G W. High order matched interface and boundary method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources[J]. *J Comput Phys*, 2006, **213**(1): 1-30.
- [10] Liang A, Jing X, Sun X. Constructing spectral schemes of the immersed interface method via a global description of discontinuous functions[J]. *J Comput Phys*, 2008, **227**(18): 8341-8366.
- [11] Liu G R, Liu M B. *Smoothed Particle Hydrodynamics: a Meshfree Particle Method*[M]. World Scientific, 2003.
- [12] Geurts B J. Inverse modeling for large-eddy simulation[J]. *Phys Fluids*, 1997, **9**(12): 3585-3587.
- [13] Monaghan J J, Kajtár J B. SPH particle boundary forces for arbitrary boundaries[J]. *Comput-er Physics Communications*, 2009, **180**(10): 1811-1820.

A Novel High-Order Immersed Boundary Method Based on Filter and Deconvolution Operation

FANG Le^{1,2,3}

(1. *Ecole Centrale de Pékin, Beihang University, Beijing 100191, P. R. China;*

2. The State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics,

Chinese Academy of Sciences, Beijing 100090, P. R. China;

*3. MOE Key Laboratory of High-Speed Railway Engineering,
Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P. R. China)*

Abstract: The traditional immersed boundary method has only first-order accuracy near boundary. Existing improvements need additional jump conditions thus are not general. A novel method based on filter and deconvolution was introduced. It improved the accuracy, and avoided the problems of jump conditions. A simple 1-D case was performed to prove that the accuracy was nearly second order. It is found that the exact order value depends on the boundary continuity of the inverse kernel function chosen in deconvolution.

Key words: immersed boundary method; deconvolution; filter