

基于曲率离散的几何非线性空间梁单元*

齐朝晖, 方慧青, 张志刚, 王刚

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 以绝对坐标为节点参数的梁单元在结构的几何非线性分析和多柔体系统动力学中都有广泛的应用前景.其中一种具有代表性的单元为基于精确几何模型的梁单元,但它的构造过程涉及对节点转动矢量的插值,由此引起了很多数值求解方面的困难.由 Shabana 提出的绝对坐标梁单元,其节点参数中不含转动矢量,从而避免了对转角的插值,但却为此大幅度地增加了节点参数.以大变形梁虚功率方程为理论基础,先通过单元的形心曲线插值得到端面曲率及其对弧长的变化率,进而对单元域内的曲率进行插值,提出了一种既可避免转动矢量插值同时又不增加节点参数的空间梁单元,可用于梁的大变形几何非线性分析.数值算例验证了该单元的合理性.

关键词: 空间梁单元; 多柔体系统; 几何非线性; 曲率插值

中图分类号: O342 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.05.004

引言

梁是实际工程中应用最为广泛的一种结构形式,对它的研究也受到各个领域需要的推动.大跨度轻质结构的采用,以及多柔体系统动力学的发展都对梁的建模理论提出了更高的要求.其中,如何构造简洁高效的几何非线性梁单元是很多领域的共同需要.

当变形体的几何非线性效应不可忽略时,意味着小位移小转动假设基础上建立的应变与位移导数之间的线性关系已不再成立.这引出了两方面的关键问题:如何描述几何非线性效应,以及如何求解所得的非线性方程.早期的研究集中体现在对完全 Lagrange (拉格朗日)法和更新 Lagrange 法^[1-2]的研究上,提出了很多几何非线性单元及其求解方法,但其构造过程也往往十分复杂.子结构法和共旋坐标法^[3-5]则可以将现有的线性单元系统化地改造为可用于几何非线性分析的单元,其核心思想是建立一个随单元或子结构一起运动的坐标架用于描述整体刚体运动,而相对于这个坐标架的运动仍可视为小位移和小转动.这也是多柔体系统动力学中被称为相对坐标描述方法的一种建模策略.但将这种策略用于高速轻质系统的分析时遇到了很多困难,如动力刚化项的遗失、数值不稳定等.经过多年的研究,人们逐渐认识到:很多情况下在单元水平上考虑非线性是必要的.

传统梁单元在计算单元应变时按小转动假设对单元应变做了线性化.以 Simo 为代表的一

* 收稿日期: 2014-02-26; 修订日期: 2014-04-10

基金项目: 国家自然科学基金(11372057)

作者简介: 齐朝晖(1964—),男,辽宁大连人,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: zhaohuiq@dlut.edu.cn).

批学者在不限制转动大小的基础上,提出了一种基于精确几何模型的梁单元^[6-9].与传统单元不同的是,这类单元以形心在总体坐标系中的坐标和描述截面转动的3个转角为节点参数,因而也被称为绝对坐标单元.这类单元解决了很多过去解决不了的问题,但在实际应用时也遇到了一些由转角插值引起的困难,诸如剪切闭锁现象、描述参数相互干涉等.

Shabana等^[10]提出了一种可避免转角插值的绝对坐标梁单元,并在多体系统动力学中得到了广泛应用^[11-13].这类单元的成功揭示了这样一个事实:传统的有限元法主要是在分析各种结构变形和受力过程中逐步发展和完善的,因而积累了大量的以相对位移为节点参数的各种单元.多体系统动力学主要以大范围运动的机构为研究对象,直接引用这些单元所建立的柔体模型有时并不能完全适用.在这种情况下,采用绝对节点坐标的单元更符合解决问题的需要.但是,这类单元的积累远不如线性单元,现有单元也存在有待改善之处.

梁的理论研究已有多年的历史,从中可以了解到:梁虽在结构上看似简单,但其描述参量间的力学数学关系却是很复杂的^[14-15].首先,它内嵌了一个转动场;其次,它的本构关系具有方向性.为了避免对角度插值,Shabana等提出的绝对坐标梁单元把梁在概念上看成了三维实体,通过引入附加节点参数构造了一种很独特的单元位移场.这些措施在一定程度上解决了所面临困难的同时也在一些方面有所损失,例如,用它不便于求解静力学问题.

一个值得研究的问题是:是否可能构造一种几何非线性梁单元使其满足以下几个条件:1) 采用绝对节点坐标以便于在多体系统动力学等领域的应用;2) 避免对转角进行插值以避免剪切闭锁等数值困难;3) 充分考虑梁本构关系中各向异性的特点.

本文对这一问题展开了研究,依据大变形梁的虚功率方程,采用单元域内曲率插值方法,构造了一种可满足上述条件的空间梁单元.

1 梁单元变形虚功率

在小位移小转动条件下,绝大多数单元都可由虚功原理导出.然而,将虚功原理用于研究含大转动参数的空间单元时会遇到一个概念上的困难:如何描述节点内力矩的虚功.含转动自由度的线性单元用转角与力矩构成相应的虚功,但它不能推广到大转动情况,原因在于:描述大转动的角度参数可有多种,而且不同角度所代表的意义也各不相同.

虚功率原理在小位移小转动条件下与虚功原理等价,但却可以无困难地用于研究含大转动的单元.这是由于与力矩构成虚功率的一定是角速度的虚变分,而角速度具有明确的物理意义.

虚功率原理虽然是普适的,但其中的变形虚功率表达式却依赖于单元类型和单元节点参数.大转动梁的变形虚功率虽已在多篇文献中被分析和研究过,但其形式和推导过程往往十分复杂,本节将以尽可能简洁的形式给出其推导过程.

基于刚性截面假设,梁的截面做刚体运动.在此条件下,本是三维实体梁其力学模型可以简化为一维模型,即,梁的应变和内力都只是变形前弧长坐标 s_0 以及时间坐标的函数.变形后梁的弧长 s 也是这两个坐标的函数,并将梁的轴向应变定义为

$$\varepsilon_s = \frac{\partial s}{\partial s_0} - 1. \quad (1)$$

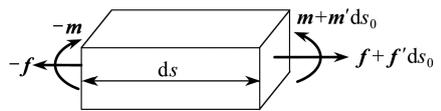


图1 梁的微元体

Fig.1 A micro unit of the beam

在梁中取出一段长为 $ds = (1 + \varepsilon_s) ds_0$ 的微元体,其左右端面的受力如图1所示.其中, \mathbf{f} 和 \mathbf{m} 分别为左端面的合力和合力矩.由于应变虚功率表达式与外力无关,假设梁外表面上不受外力以简化推导过程.

将微元体视为一小段刚体,由刚体的动力学方程可得^[6]

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}', \quad (2)$$

$$\rho_0 \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \rho_0 \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{m}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{f}, \quad (3)$$

其中,矢量上标“ \cdot ”表示该矢量对 s_0 的导数; \mathbf{r} 为 s_0 处截面的形心矢径; $\boldsymbol{\omega}$ 为该截面转动角速度; \mathbf{J} 为该截面的惯性矩张量; ρ_0 为变形前梁的质量线密度.微元体上的外力虚功率为

$$\begin{aligned} \delta \bar{w}_f = & \mathbf{f}_{s_0+ds_0} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_{s_0+ds_0} - \mathbf{f}_{s_0} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_{s_0} + \mathbf{m}_{s_0+ds_0} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_{s_0+ds_0} - \mathbf{m}_{s_0} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_{s_0} = \\ & (\delta \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f})' ds_0 + (\delta \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m})' ds_0; \end{aligned} \quad (4)$$

微元体上的惯性力虚功率为

$$\begin{aligned} \delta \bar{w}_k = & \rho_0 ds_0 \delta \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \rho_0 ds_0 \delta \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})) = \\ & (\delta \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f}') ds_0 + \delta \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{m}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{f}) ds_0. \end{aligned} \quad (5)$$

根据虚功率原理,微元体的变形虚功率为

$$\delta \bar{w}_e = \delta \bar{w}_f - \delta \bar{w}_k = \mathbf{f} \cdot \delta(\dot{\mathbf{r}}') ds_0 - \delta \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{f}) ds_0 + \mathbf{m} \cdot \delta(\boldsymbol{\omega}') ds_0. \quad (6)$$

由于虚功率原理中的变分是时刻相同位置相同条件下的变分,所有不依赖于速度的矢量其变分皆为0,因而式(6)可以改写为

$$\delta \bar{w}_e = \delta(\dot{\mathbf{r}}' - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{f} ds_0 + \delta(\boldsymbol{\omega}') \cdot \mathbf{m} ds_0. \quad (7)$$

将其沿梁长积分可得梁的变形虚功率为

$$\delta w_e = \int_0^{l_0} (\delta(\dot{\mathbf{r}}' - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{f} + \delta(\boldsymbol{\omega}') \cdot \mathbf{m}) ds_0. \quad (8)$$

在梁的每一个横截面上定义一个固结于形心的截面连体基 $(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t, \mathbf{e}_b)$,其中 \mathbf{e}_s 沿截面法线方向, \mathbf{e}_t 和 \mathbf{e}_b 分别为截面的两根形心主轴.它们对时间的导数可用截面的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 表示为

$$\dot{\mathbf{e}}_s = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_s, \quad \dot{\mathbf{e}}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_t, \quad \dot{\mathbf{e}}_b = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_b. \quad (9)$$

类比于角速度的定义,引入截面的曲率矢量 $\boldsymbol{\kappa}$ 使截面连体基矢量对 s_0 的导数可表示为

$$\mathbf{e}'_s = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{e}_s, \quad \mathbf{e}'_t = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{e}_t, \quad \mathbf{e}'_b = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{e}_b. \quad (10)$$

角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和曲率 $\boldsymbol{\kappa}$ 可在截面连体基中分解为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_s \mathbf{e}_s + \omega_t \mathbf{e}_t + \omega_b \mathbf{e}_b, \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa_s \mathbf{e}_s + \kappa_t \mathbf{e}_t + \kappa_b \mathbf{e}_b. \quad (12)$$

由式(9)和(10)可知:其中的分解系数可表示为

$$\omega_s = \dot{\mathbf{e}}_t \cdot \mathbf{e}_b, \quad \omega_t = \dot{\mathbf{e}}_b \cdot \mathbf{e}_s, \quad \omega_b = \dot{\mathbf{e}}_s \cdot \mathbf{e}_t, \quad (13)$$

$$\kappa_s = \mathbf{e}'_t \cdot \mathbf{e}_b, \quad \kappa_t = \mathbf{e}'_b \cdot \mathbf{e}_s, \quad \kappa_b = \mathbf{e}'_s \cdot \mathbf{e}_t. \quad (14)$$

将式(11)和(12)分别对 s_0 和时间求导可得

$$\boldsymbol{\omega}' = (\omega'_s \mathbf{e}_s + \omega'_t \mathbf{e}_t + \omega'_b \mathbf{e}_b) + \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (15)$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\kappa}_s \mathbf{e}_s + \dot{\kappa}_t \mathbf{e}_t + \dot{\kappa}_b \mathbf{e}_b + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\kappa}. \quad (16)$$

由于 s_0 与时间无关,截面连体基矢量对时间和 s_0 的求导顺序是可交换的,因而由式(13)可知

$$\omega'_s = (\dot{\boldsymbol{\kappa}} \times \mathbf{e}_t + \boldsymbol{\kappa} \times \dot{\mathbf{e}}_t) \cdot \mathbf{e}_b + \dot{\mathbf{e}}_t \cdot (\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{e}_b) = \dot{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \mathbf{e}_s, \quad (17)$$

$$\omega'_t = (\dot{\boldsymbol{\kappa}} \times \mathbf{e}_b + \boldsymbol{\kappa} \times \dot{\mathbf{e}}_b) \cdot \mathbf{e}_s + \dot{\mathbf{e}}_b \cdot (\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{e}_s) = \dot{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \mathbf{e}_t, \quad (18)$$

$$\omega'_b = (\dot{\boldsymbol{\kappa}} \times \mathbf{e}_s + \boldsymbol{\kappa} \times \dot{\mathbf{e}}_s) \cdot \mathbf{e}_t + \dot{\mathbf{e}}_s \cdot (\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{e}_t) = \dot{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \mathbf{e}_b. \quad (19)$$

将式(17)~(19)代入式(15)后,再将式(16)代入所得方程,可将式(15)改写为

$$\boldsymbol{\omega}' = \dot{\boldsymbol{\kappa}} + \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\omega} = \dot{\kappa}_s \mathbf{e}_s + \dot{\kappa}_t \mathbf{e}_t + \dot{\kappa}_b \mathbf{e}_b. \quad (20)$$

按 Bernoulli(伯努利)梁理论,截面法向与形心线切向一致,即

$$\mathbf{r}' = (1 + \varepsilon_s) \mathbf{e}_s, \quad (21)$$

因而

$$\dot{\mathbf{r}}' - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \dot{\varepsilon}_s \mathbf{e}_s. \quad (22)$$

将式(20)、(22)代入式(8)中可得梁单元的变形虚功率:

$$\delta w_e = \int_0^{l_0} (\delta \dot{\varepsilon}_s f_s + \delta \dot{\kappa}_s m_s + \delta \dot{\kappa}_t m_t + \delta \dot{\kappa}_b m_b) ds_0, \quad (23)$$

其中, l_0 为变形前的梁长; f_s, m_s, m_t 和 m_b 分别为内力和内力矩在截面连体基中的分量,即

$$\mathbf{f} = f_s \mathbf{e}_s + f_t \mathbf{e}_t + f_b \mathbf{e}_b, \quad (24)$$

$$\mathbf{m} = m_s \mathbf{e}_s + m_t \mathbf{e}_t + m_b \mathbf{e}_b. \quad (25)$$

梁的虚功率方程中所涉及的参量与梁的刚体运动无关,严格依据该方程所推导出的单元将不会由于大位移和大转动而产生虚假应变,因而可作为几何非线性梁单元的理论基础.

构造梁单元所需的本构关系可用截面连体基中力和力矩的分量描述为

$$f_s = EA\varepsilon_s, m_s = GJ\kappa_s, m_t = EI_t\kappa_t, m_b = EI_b\kappa_b, \quad (26)$$

其中 EA, GJ, EI_t 和 EI_b 分别为梁的抗拉、抗扭以及其在 t 方向和 b 方向的抗弯模量.由于梁的本构方程中所涉及的力和力矩均与截面的方位相关,因而梁的本构关系实际上是各向异性的,忽略这一点将会引起虚假内力.

2 单元节点参数及其形函数

如图2所示,空间梁单元的两个节点分别为左右端面的形心;节点参数为端面形心在总体坐标系 $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ 中的矢径 $(\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2)$ 和描述端面方位的转动矢量 $(\boldsymbol{\theta}_1$ 和 $\boldsymbol{\theta}_2)$.用任一转动矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 所描述的正交矩阵为

$$\mathbf{R}_\theta = \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\sin \theta}{\theta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}. \quad (27)$$

将单元左右端面连体基矢量分别记作 $(\mathbf{e}_{1s}, \mathbf{e}_{1t}, \mathbf{e}_{1b})$ 以及 $(\mathbf{e}_{2s}, \mathbf{e}_{2t}, \mathbf{e}_{2b})$,则端面转动矢量所对应的正交矩阵 \mathbf{R}_{θ_1} 和 \mathbf{R}_{θ_2} 的意义为:这两个矩阵的列向量分别为 $(\mathbf{e}_{1s}, \mathbf{e}_{1t}, \mathbf{e}_{1b})$ 和 $(\mathbf{e}_{2s}, \mathbf{e}_{2t}, \mathbf{e}_{2b})$ 在总体基中的分量.

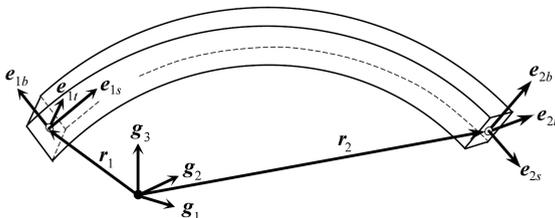


图2 梁单元的节点参数

Fig.2 Nodal parameters of a beam element

形心矢径和截面的转动矢量都是相对于总体基度量的,因而称为绝对坐标.尽管有限元理论已经发展得十分成熟,但其中的大多数单元都以相对于单元坐标系的位移或转角为节点参数.以绝对坐标为节点参数的梁单元在多体系统动力学以及结构的几何非线性分析中有很好的表现,因而也受到越来越多的关注,但仍存在可进一步完善之处.

实际工程中的梁主要用于承受弯曲载荷,一般不会承受很大的轴向载荷,因而,除特殊情况外,大部分梁的轴向应变和扭转曲率都可假定为小量并在单元域内近似为常量.在这种情况下,若将左右端面形心之间的矢径描述为

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \chi \mathbf{e}_a, \chi = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|. \quad (28)$$

则变形后的弧长可近似为

$$l = \eta \chi, \quad (29)$$

其中 η 为单元的弧长与弦长比.

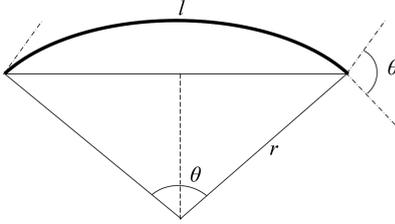


图3 梁单元弧长与弦长

Fig.3 The arc and chord of a beam element

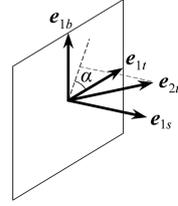


图4 右端面相对于左端面的扭转角

Fig.4 Twist angle of the right-end section relative to the left-end section

如图3所示,如果单元尺寸足够小,变形后梁的形状可看作为一段半径为 r 的圆弧,此时 η 可近似为

$$\eta = \frac{r\theta}{2r\sin(\theta/2)} = \frac{\theta/2}{\sin(\theta/2)}, \quad (30)$$

其中, θ 为单元两端面法线的夹角,并满足方程:

$$\cos \theta = \mathbf{e}_{1s} \cdot \mathbf{e}_{2s}. \quad (31)$$

在单元范围内 θ 不可能大于 π ,因而 η 一定为正数.当 θ 接近于0时, η 将趋近于1,这与实际情况相符.由式(29)得到变形后单元的弧长,单元的轴向常应变可按下式确定:

$$\varepsilon_s = l/l_0 - 1, \quad (32)$$

其中, l_0 为梁单元的原长.如图4所示,单元右端面相对于左端面的扭转角 α 可按下述过程近似:将右端面内的形心主轴矢量 \mathbf{e}_{2r} 在左端面连体基中分解为

$$\mathbf{e}_{2r} = c_1 \mathbf{e}_{1s} + c_2 \mathbf{e}_{1t} + c_3 \mathbf{e}_{1b}, \quad (33)$$

然后利用分解系数 c_1, c_2, c_3 按方程

$$\sin \alpha = c_3 / \sqrt{c_2^2 + c_3^2} \quad (34)$$

计算 \mathbf{e}_{2r} 在左端面中的投影与 \mathbf{e}_{1t} 之间的夹角 α ,其中 $c_2 = \mathbf{e}_{2r}^T \mathbf{e}_{1t}, c_3 = \mathbf{e}_{2r}^T \mathbf{e}_{1b}$.单元的扭转曲率可近似为

$$\kappa_s = \frac{\alpha}{l_0}. \quad (35)$$

为了计算单元的弯曲曲率,将截面形心矢径用3次 Hermite 插值近似为

$$\mathbf{r} = N_1 \mathbf{r}_1 + N_2 \mathbf{r}_2 + (1 + \varepsilon_s) l_0 (S_1 \mathbf{e}_{1s} + S_2 \mathbf{e}_{2s}), \quad (36)$$

其中的形函数为

$$N_1 = (l_0 - s_0)^2 (l_0 + 2s_0) / l_0^3, S_1 = (l_0 - s_0)^2 s_0 / l_0^3, \quad (37)$$

$$N_2 = s_0^2 (3l_0 - 2s_0) / l_0^3, S_2 = s_0^2 (s_0 - l_0) / l_0^3. \quad (38)$$

截面法向矢量 $\mathbf{e}_s = \mathbf{r}' / (1 + \varepsilon_s)$,它对 s_0 的导数为

$$\mathbf{e}'_s = \frac{N''_2 l_0}{l} \mathbf{r}_a + l_0 S''_1 \mathbf{e}_{1s} + l_0 S''_2 \mathbf{e}_{2s}, \quad (39)$$

$$\mathbf{e}''_s = l_0 \lambda_0 (\mathbf{e}_{1s} + \mathbf{e}_{2s}) - \frac{2l_0 \lambda_0}{l} \mathbf{r}_a, \quad (40)$$

其中, $\lambda_0 = S''_1 = S''_2 = N''_1/2 = -N''_2/2 = 6/l_0^3$, 推导过程中利用了等式 $N''_1 = -N''_2$.

对式(39)和(40)求时间导数可得

$$\dot{\mathbf{e}}'_s = \frac{l_0 N''_2}{l^2} (\dot{\mathbf{l}}\mathbf{r}_a - \dot{\mathbf{l}}\mathbf{r}_a) - l_0 (S''_1 \tilde{\mathbf{e}}_{1s} \boldsymbol{\omega}_1 + S''_2 \tilde{\mathbf{e}}_{2s} \boldsymbol{\omega}_2), \quad (41)$$

$$\dot{\mathbf{e}}''_s = \frac{2l_0 \lambda_0}{l^2} (\dot{\mathbf{l}}\mathbf{r}_a - \dot{\mathbf{l}}\mathbf{r}_a) - l_0 \lambda_0 (\tilde{\mathbf{e}}_{1s} \boldsymbol{\omega}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_{2s} \boldsymbol{\omega}_2), \quad (42)$$

其中, $\boldsymbol{\omega}_1$ 和 $\boldsymbol{\omega}_2$ 分别为左右端面的角速度.文中, 矢量上方带“~”号表示该矢量生成的反对称矩阵, 即两矢量的叉积 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 可以表示为 $\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$.

由式(10)可知, 截面的弯曲曲率为

$$\kappa_t = -\mathbf{e}_b^T \mathbf{e}'_s, \quad (43)$$

$$\kappa_b = \mathbf{e}_t^T \mathbf{e}'_s. \quad (44)$$

弯曲曲率对 s_0 的导数

$$\kappa'_t = -\mathbf{e}_b^T \mathbf{e}''_s - \mathbf{e}'_b{}^T \mathbf{e}'_s = \kappa_s \kappa_b - \mathbf{e}_b^T \mathbf{e}''_s, \quad (45)$$

$$\kappa'_b = \mathbf{e}_t^T \mathbf{e}''_s + \mathbf{e}'_t{}^T \mathbf{e}'_s = \mathbf{e}_t^T \mathbf{e}''_s - \kappa_s \kappa_t, \quad (46)$$

它们的变化率分别为

$$\dot{\kappa}_t = -\mathbf{e}_b^T \dot{\mathbf{e}}'_s + (\mathbf{e}'_s)^T \tilde{\mathbf{e}}_b \boldsymbol{\omega}, \quad (47)$$

$$\dot{\kappa}_b = \mathbf{e}_t^T \dot{\mathbf{e}}'_s - (\mathbf{e}'_s)^T \tilde{\mathbf{e}}_t \boldsymbol{\omega}, \quad (48)$$

$$\dot{\kappa}'_t = \dot{\kappa}_s \kappa_b + \kappa_s \dot{\kappa}_b + (\mathbf{e}''_s)^T \tilde{\mathbf{e}}_b \boldsymbol{\omega} - \mathbf{e}_b^T \dot{\mathbf{e}}''_s, \quad (49)$$

$$\dot{\kappa}'_b = \mathbf{e}_t^T \dot{\mathbf{e}}''_s - (\mathbf{e}''_s)^T \tilde{\mathbf{e}}_t \boldsymbol{\omega} - \dot{\kappa}_s \kappa_t - \kappa_s \dot{\kappa}_t. \quad (50)$$

从方程(43)~(50)中可以看出: 弯曲曲率及其导数与截面连体基矢量相互耦合.

为了得到单元域内任一点曲率, 传统的方法通过对端面转动矢量进行插值得到任一截面的转动矢量, 再由转动矢量确定截面基矢量. 但转动矢量与位移矢量不同, 对其进行插值会引起很多问题.

3 单元域内曲率插值

按式(39)~(42), 端面法向矢量对 s_0 的导数为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}'_{1s} \\ \mathbf{e}'_{2s} \\ \mathbf{e}''_{1s} \\ \mathbf{e}''_{2s} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_0^2 l} \begin{bmatrix} 6l_0 \mathbf{r}_a \\ -6l_0 \mathbf{r}_a \\ -12\mathbf{r}_a \\ -12\mathbf{r}_a \end{bmatrix} + \frac{1}{l_0^2} \begin{bmatrix} -4l_0 \mathbf{e}_{1s} - 2l_0 \mathbf{e}_{2s} \\ 2l_0 \mathbf{e}_{1s} + 4l_0 \mathbf{e}_{2s} \\ 6\mathbf{e}_{1s} + 6\mathbf{e}_{2s} \\ 6\mathbf{e}_{1s} + 6\mathbf{e}_{2s} \end{bmatrix}. \quad (51)$$

由式(43)和(44)可得端面弯曲曲率及其对 s_0 的导数:

$$\begin{bmatrix} \kappa_{1t} \\ \kappa_{1b} \\ \kappa_{2t} \\ \kappa_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_{1b}^T \mathbf{e}'_{1s} \\ \mathbf{e}_{1t}^T \mathbf{e}'_{1s} \\ -\mathbf{e}_{2b}^T \mathbf{e}'_{2s} \\ \mathbf{e}_{2t}^T \mathbf{e}'_{2s} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \kappa'_{1t} \\ \kappa'_{1b} \\ \kappa'_{2t} \\ \kappa'_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_s \kappa_{1b} \\ -\kappa_s \kappa_{1t} \\ \kappa_s \kappa_{2b} \\ -\kappa_s \kappa_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_{1b}^T \mathbf{e}''_{1s} \\ \mathbf{e}_{1t}^T \mathbf{e}''_{1s} \\ -\mathbf{e}_{2b}^T \mathbf{e}''_{2s} \\ \mathbf{e}_{2t}^T \mathbf{e}''_{2s} \end{bmatrix}. \quad (52)$$

在得到端部弯曲曲率及其对弧长的导数后,类比于形心矢径的插值,可以将单元域内的弯曲曲率近似为

$$\kappa_l = N_1 \kappa_{1l} + N_2 \kappa_{2l} + l_0 (S_1 \kappa'_{1l} + S_2 \kappa'_{2l}), \quad (53)$$

$$\kappa_b = N_1 \kappa_{1b} + N_2 \kappa_{2b} + l_0 (S_1 \kappa'_{1b} + S_2 \kappa'_{2b}). \quad (54)$$

以这种方式计算单元域内的弯曲曲率,不仅可以避免对转角的插值,还可以使单元的节点力表达为节点参数的显式函数。

4 轴向应变与曲率的变化率

参照由式(23)所表述的虚功率原理可知,为了得到单元的节点力,首先应求得轴向应变和曲率变化率的虚变分。

对式(29)求时间导数可得单元弧长的变化率:

$$\dot{l} = \mathbf{l}_s^T \dot{\mathbf{r}}_a + \mathbf{l}_w^T (\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1), \quad (55)$$

其中

$$\mathbf{l}_s = \eta \mathbf{e}_a, \quad \mathbf{l}_w = \chi \mu \tilde{\mathbf{e}}_{2s} \mathbf{e}_{1s}, \quad (56)$$

μ 为单元端面法向矢量间的夹角 θ (参见式(31))的函数:

$$\mu = \begin{cases} \frac{\theta \cos(\theta/2) - 2 \sin(\theta/2)}{8 \sin^3(\theta/2) \cos(\theta/2)}, & \theta > 10^{-4}, \\ \frac{\theta^2 - 40}{480 - 120\theta^2}, & \theta \leq 10^{-4}, \end{cases} \quad (57)$$

当 θ 可视为无穷小量时, $\mu \approx -1/12$. 对式(32)求导可得轴向应变的变化率:

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{1}{l_0} \mathbf{l}_s^T \dot{\mathbf{r}}_a + \frac{1}{l_0} \mathbf{l}_w^T (\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1). \quad (58)$$

为了得到扭转曲率的时间导数,本文先由式(34)求得右端面相对于左端面扭转角 α 的变化率:

$$\dot{\alpha} = \boldsymbol{\tau}^T (\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1), \quad (59)$$

其中

$$\boldsymbol{\tau} = \tilde{\mathbf{e}}_{2t} (c_2 \mathbf{e}_{1b} - c_3 \mathbf{e}_{1t}) / (c_2^2 + c_3^2). \quad (60)$$

扭转曲率的变化率可以表示为

$$\dot{\kappa}_s = \frac{1}{l_0} (\boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\omega}_1). \quad (61)$$

由式(41)和(42)可得端面法向矢量对弧长导数的变化率:

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}'_{1s} \\ \dot{\epsilon}'_{2s} \\ \dot{\epsilon}''_{1s} \\ \dot{\epsilon}''_{2s} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_0} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{11} & \boldsymbol{\lambda}_{12} & \boldsymbol{\lambda}_{13} & \boldsymbol{\lambda}_{14} \\ \boldsymbol{\delta}_{11} & \boldsymbol{\delta}_{12} & \boldsymbol{\delta}_{13} & \boldsymbol{\delta}_{14} \\ \boldsymbol{\lambda}_{21} & \boldsymbol{\lambda}_{22} & \boldsymbol{\lambda}_{23} & \boldsymbol{\lambda}_{24} \\ \boldsymbol{\delta}_{21} & \boldsymbol{\delta}_{22} & \boldsymbol{\delta}_{23} & \boldsymbol{\delta}_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \end{bmatrix}, \quad (62)$$

其中的子矩阵 $\boldsymbol{\lambda}_{ij}, \boldsymbol{\delta}_{ij} (i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4)$ 分别为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{11} & \boldsymbol{\delta}_{11} \\ \boldsymbol{\lambda}_{12} & \boldsymbol{\delta}_{12} \\ \boldsymbol{\lambda}_{13} & \boldsymbol{\delta}_{13} \\ \boldsymbol{\lambda}_{14} & \boldsymbol{\delta}_{14} \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -6E & 6E \\ 6E & -6E \\ 4l\tilde{\mathbf{e}}_{1s} & 2l\tilde{\mathbf{e}}_{1s} \\ -2l\tilde{\mathbf{e}}_{2s} & -4l\tilde{\mathbf{e}}_{2s} \end{bmatrix} + \frac{6}{l^2} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_a \mathbf{l}_s^T & -\mathbf{r}_a \mathbf{l}_s^T \\ -\mathbf{r}_a \mathbf{l}_s^T & \mathbf{r}_a \mathbf{l}_s^T \\ -\mathbf{r}_a \mathbf{l}_w^T & -\mathbf{r}_a \mathbf{l}_w^T \\ \mathbf{r}_a \mathbf{l}_w^T & \mathbf{r}_a \mathbf{l}_w^T \end{bmatrix}, \quad (63)$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{21} & \boldsymbol{\delta}_{21} \\ \boldsymbol{\lambda}_{22} & \boldsymbol{\delta}_{22} \\ \boldsymbol{\lambda}_{23} & \boldsymbol{\delta}_{23} \\ \boldsymbol{\lambda}_{24} & \boldsymbol{\delta}_{24} \end{bmatrix} = \frac{6}{l_0} \begin{bmatrix} 2\mathbf{E} & 2\mathbf{E} \\ -2\mathbf{E} & -2\mathbf{E} \\ -l\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{1s} & -l\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{1s} \\ -l\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{2s} & -l\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{2s} \end{bmatrix} + \frac{12}{l^2} \begin{bmatrix} -\mathbf{r}_a \mathbf{l}_s^T & -\mathbf{r}_a \mathbf{l}_s^T \\ \mathbf{r}_a \mathbf{l}_s^T & \mathbf{r}_a \mathbf{l}_s^T \\ -\mathbf{r}_a \mathbf{l}_w^T & -\mathbf{r}_a \mathbf{l}_w^T \\ \mathbf{r}_a \mathbf{l}_w^T & \mathbf{r}_a \mathbf{l}_w^T \end{bmatrix}. \quad (64)$$

将式(62)代入式(47)和(48)中可得弯曲曲率的变化率:

$$\begin{bmatrix} \dot{\kappa}_{1r} \\ \dot{\kappa}_{1b} \\ \dot{\kappa}_{2r} \\ \dot{\kappa}_{2b} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_0} \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_{1b}^T \boldsymbol{\lambda}_{11} & -\mathbf{e}_{1b}^T \boldsymbol{\lambda}_{12} & -\mathbf{e}_{1b}^T \boldsymbol{\lambda}_{13} & -\mathbf{e}_{1b}^T \boldsymbol{\lambda}_{14} \\ \mathbf{e}_{1r}^T \boldsymbol{\delta}_{11} & \mathbf{e}_{1r}^T \boldsymbol{\delta}_{12} & \mathbf{e}_{1r}^T \boldsymbol{\delta}_{13} & \mathbf{e}_{1r}^T \boldsymbol{\delta}_{14} \\ -\mathbf{e}_{2b}^T \boldsymbol{\lambda}_{11} & -\mathbf{e}_{2b}^T \boldsymbol{\lambda}_{12} & -\mathbf{e}_{2b}^T \boldsymbol{\lambda}_{13} & -\mathbf{e}_{2b}^T \boldsymbol{\lambda}_{14} \\ \mathbf{e}_{2r}^T \boldsymbol{\delta}_{11} & \mathbf{e}_{2r}^T \boldsymbol{\delta}_{12} & \mathbf{e}_{2r}^T \boldsymbol{\delta}_{13} & \mathbf{e}_{2r}^T \boldsymbol{\delta}_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{l_0} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{e}'_{1s})^T \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{1b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(\mathbf{e}'_{1s})^T \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{1r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{e}'_{2s})^T \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{2b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(\mathbf{e}'_{2s})^T \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{2r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

通过将式(62)代入式(49)和(50)中可得弯曲曲率弧长导数的变化率:

$$\begin{bmatrix} \dot{\kappa}'_{1r} \\ \dot{\kappa}'_{1b} \\ \dot{\kappa}'_{2r} \\ \dot{\kappa}'_{2b} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_0} \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_{1b}^T \boldsymbol{\lambda}_{21} & -\mathbf{e}_{1b}^T \boldsymbol{\lambda}_{22} & -\mathbf{e}_{1b}^T \boldsymbol{\lambda}_{23} & -\mathbf{e}_{1b}^T \boldsymbol{\lambda}_{24} \\ \mathbf{e}_{1r}^T \boldsymbol{\delta}_{21} & \mathbf{e}_{1r}^T \boldsymbol{\delta}_{22} & \mathbf{e}_{1r}^T \boldsymbol{\delta}_{23} & \mathbf{e}_{1r}^T \boldsymbol{\delta}_{24} \\ -\mathbf{e}_{2b}^T \boldsymbol{\lambda}_{21} & -\mathbf{e}_{2b}^T \boldsymbol{\lambda}_{22} & -\mathbf{e}_{2b}^T \boldsymbol{\lambda}_{23} & -\mathbf{e}_{2b}^T \boldsymbol{\lambda}_{24} \\ \mathbf{e}_{2r}^T \boldsymbol{\delta}_{21} & \mathbf{e}_{2r}^T \boldsymbol{\delta}_{22} & \mathbf{e}_{2r}^T \boldsymbol{\delta}_{23} & \mathbf{e}_{2r}^T \boldsymbol{\delta}_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{l_0} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{e}''_{1s})^T \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{1b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(\mathbf{e}''_{1s})^T \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{1r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{e}''_{2s})^T \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{2b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(\mathbf{e}''_{2s})^T \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{2r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix}, \quad (66)$$

其中

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{l_0} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\kappa_{1b} \boldsymbol{\tau}^T & \kappa_{1b} \boldsymbol{\tau}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \kappa_{1r} \boldsymbol{\tau}^T & -\kappa_{1r} \boldsymbol{\tau}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\kappa_{2b} \boldsymbol{\tau}^T & \kappa_{2b} \boldsymbol{\tau}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \kappa_{2r} \boldsymbol{\tau}^T & -\kappa_{2r} \boldsymbol{\tau}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \end{bmatrix} + \kappa_s \begin{bmatrix} \dot{\kappa}_{1b} \\ -\dot{\kappa}_{1r} \\ \dot{\kappa}_{2b} \\ -\dot{\kappa}_{2r} \end{bmatrix}. \quad (67)$$

为了简化节点力的表达式,将式(65)和(66)缩写为如下形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{\kappa}_{1r} \\ \dot{\kappa}_{1b} \\ \dot{\kappa}_{2r} \\ \dot{\kappa}_{2b} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_0} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^T & \mathbf{k}_{12}^T & \mathbf{k}_{13}^T & \mathbf{k}_{14}^T \\ \mathbf{k}_{21}^T & \mathbf{k}_{22}^T & \mathbf{k}_{23}^T & \mathbf{k}_{24}^T \\ \mathbf{k}_{31}^T & \mathbf{k}_{32}^T & \mathbf{k}_{33}^T & \mathbf{k}_{34}^T \\ \mathbf{k}_{41}^T & \mathbf{k}_{42}^T & \mathbf{k}_{43}^T & \mathbf{k}_{44}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \end{bmatrix}, \quad (68)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\kappa}'_{1t} \\ \dot{\kappa}'_{1b} \\ \dot{\kappa}'_{2t} \\ \dot{\kappa}'_{2b} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_0} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}}_{11}^T & \bar{\mathbf{k}}_{12}^T & \bar{\mathbf{k}}_{13}^T & \bar{\mathbf{k}}_{14}^T \\ \bar{\mathbf{k}}_{21}^T & \bar{\mathbf{k}}_{22}^T & \bar{\mathbf{k}}_{23}^T & \bar{\mathbf{k}}_{24}^T \\ \bar{\mathbf{k}}_{31}^T & \bar{\mathbf{k}}_{32}^T & \bar{\mathbf{k}}_{33}^T & \bar{\mathbf{k}}_{34}^T \\ \bar{\mathbf{k}}_{41}^T & \bar{\mathbf{k}}_{42}^T & \bar{\mathbf{k}}_{43}^T & \bar{\mathbf{k}}_{44}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \end{bmatrix}, \quad (69)$$

其中的子矩阵 \mathbf{k}_{ij} 和 $\bar{\mathbf{k}}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) 按式(65)和(66)定义,它们都可由单元的节点参数完全确定。

5 单元节点内力和内力矩

将式(26)、(53)和(54)代入单元应变虚功率方程(23)中,经过积分后可得

$$\begin{aligned} \delta w_e = & EI_t l_0 (\delta \dot{\kappa}'_{1t} \psi_{1t} + \delta \dot{\kappa}'_{2t} \psi_{2t} + \delta \dot{\kappa}'_{1t} \Phi_{1t} + \delta \dot{\kappa}'_{2t} \Phi_{2t}) + \\ & EI_b l_0 (\delta \dot{\kappa}'_{1b} \psi_{1b} + \delta \dot{\kappa}'_{2b} \psi_{2b} + \delta \dot{\kappa}'_{1b} \Phi_{1b} + \delta \dot{\kappa}'_{2b} \Phi_{2b}) + \\ & \delta \dot{\varepsilon}_s (EA l_0 \varepsilon_s) + \delta \dot{\kappa}_s (GJ l_0 \kappa_s), \end{aligned} \quad (70)$$

其中

$$\begin{bmatrix} \psi_{1t} \\ \psi_{2t} \\ \Phi_{1t} \\ \Phi_{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{420} \begin{bmatrix} 156 & 54 & 22l_0 & -13l_0 \\ 54 & 156 & 13l_0 & -22l_0 \\ 22l_0 & 13l_0 & 4l_0^2 & -3l_0^2 \\ -13l_0 & -22l_0 & -3l_0^2 & 4l_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{1t} \\ \kappa_{2t} \\ \kappa'_{1t} \\ \kappa'_{2t} \end{bmatrix}, \quad (71)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{1b} \\ \psi_{2b} \\ \Phi_{1b} \\ \Phi_{2b} \end{bmatrix} = \frac{1}{420} \begin{bmatrix} 156 & 54 & 22l_0 & -13l_0 \\ 54 & 156 & 13l_0 & -22l_0 \\ 22l_0 & 13l_0 & 4l_0^2 & -3l_0^2 \\ -13l_0 & -22l_0 & -3l_0^2 & 4l_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{1b} \\ \kappa_{2b} \\ \kappa'_{1b} \\ \kappa'_{2b} \end{bmatrix}. \quad (72)$$

将式(68)和(69)代入式(70)中可得

$$\delta w_e = \delta \dot{\mathbf{r}}_1^T \mathbf{f}_1 + \delta \dot{\mathbf{r}}_2^T \mathbf{f}_2 + \delta \boldsymbol{\omega}_1^T \mathbf{m}_1 + \delta \boldsymbol{\omega}_2^T \mathbf{m}_2, \quad (73)$$

其中,单元左端节点内力可由式(68)、(69)、(71)、(72)所定义的系数和系数矩阵表述为

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 = & EA \varepsilon_s \mathbf{I}_s + EI_t (\psi_{1t} \mathbf{k}_{11} + \psi_{2t} \mathbf{k}_{31} + \Phi_{1t} \bar{\mathbf{k}}_{11} + \Phi_{2t} \bar{\mathbf{k}}_{31}) + \\ & EI_b (\psi_{1b} \mathbf{k}_{21} + \psi_{2b} \mathbf{k}_{41} + \Phi_{1b} \bar{\mathbf{k}}_{21} + \Phi_{2b} \bar{\mathbf{k}}_{41}); \end{aligned} \quad (74)$$

单元右端节点内力

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2 = & -EA \varepsilon_s \mathbf{I}_s + EI_t (\psi_{1t} \mathbf{k}_{12} + \psi_{2t} \mathbf{k}_{32} + \Phi_{1t} \bar{\mathbf{k}}_{12} + \Phi_{2t} \bar{\mathbf{k}}_{32}) + \\ & EI_b (\psi_{1b} \mathbf{k}_{22} + \psi_{2b} \mathbf{k}_{42} + \Phi_{1b} \bar{\mathbf{k}}_{22} + \Phi_{2b} \bar{\mathbf{k}}_{42}); \end{aligned} \quad (75)$$

单元左端节点内力矩

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1 = & -EA \varepsilon_s \mathbf{I}_w + EI_t (\psi_{1t} \mathbf{k}_{13} + \psi_{2t} \mathbf{k}_{33} + \Phi_{1t} \bar{\mathbf{k}}_{13} + \Phi_{2t} \bar{\mathbf{k}}_{33}) - \\ & GJ \kappa_s \boldsymbol{\tau} + EI_b (\psi_{1b} \mathbf{k}_{23} + \psi_{2b} \mathbf{k}_{43} + \Phi_{1b} \bar{\mathbf{k}}_{23} + \Phi_{2b} \bar{\mathbf{k}}_{43}); \end{aligned} \quad (76)$$

单元右端节点内力矩

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_2 = & EA \varepsilon_s \mathbf{I}_w + EI_t (\psi_{1t} \mathbf{k}_{14} + \psi_{2t} \mathbf{k}_{34} + \Phi_{1t} \bar{\mathbf{k}}_{14} + \Phi_{2t} \bar{\mathbf{k}}_{34}) + \\ & GJ \kappa_s \boldsymbol{\tau} + EI_b (\psi_{1b} \mathbf{k}_{24} + \psi_{2b} \mathbf{k}_{44} + \Phi_{1b} \bar{\mathbf{k}}_{24} + \Phi_{2b} \bar{\mathbf{k}}_{44}). \end{aligned} \quad (77)$$

从式(74)~(77)中可以看出:梁的拉弯以及弯扭之间存在耦合效应;将节点内力和内力矩所涉及变量代入式(74)~(77)后,还可以证明节点力及其力矩满足方程:

$$\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}, \quad (78)$$

$$\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + (\tilde{\mathbf{r}}_2 - \tilde{\mathbf{r}}_1)\mathbf{f}_2 = \mathbf{0}, \quad (79)$$

即,单元节点内力及内力矩构成一组平衡力系,说明它们符合单元节点力的定性要求。

6 数值算例

为了验证本文所提单元的合理性,分析了两个算例,并将所得结果与解析解作了比较。

6.1 端部受集中力的悬臂梁

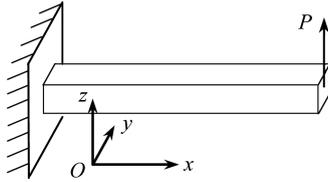


图5 受端部横向力的空间悬臂梁

Fig.5 A spatial cantilever beam with a point end load

如图5所示,长度 $L = 1\text{ m}$, 截面为边长 0.1 m 正方形的悬臂梁,由弹性模量 $210 \times 10^9\text{ Pa}$, Poisson(泊松)比为 0.3 的材料组成(梁的抗弯模量 $EI = 1.75 \times 10^6\text{ N}\cdot\text{m}^2$),在其自由端作用沿 z 轴方向的集中载荷 P 。

文献[16]用椭圆函数给出了端部位移随载荷变化规律的解析解.将梁划分为4个单元,本文所得结果与该问题解析间的比较如图6所示.其中 U, W 为梁右端点沿 x, z 方向的位移.从图中可见:本文结果与解析解相符得很好。

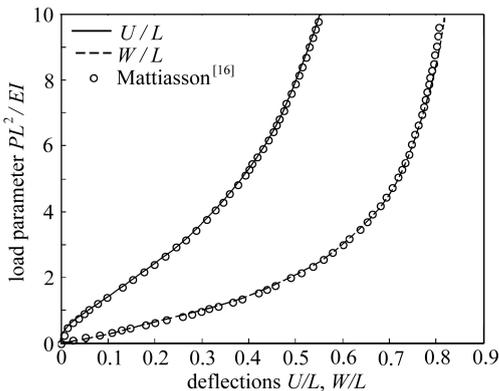


图6 集中载荷作用下梁端位移曲线

Fig.6 Displacements of the beam free-end under the action of a concentrated end force

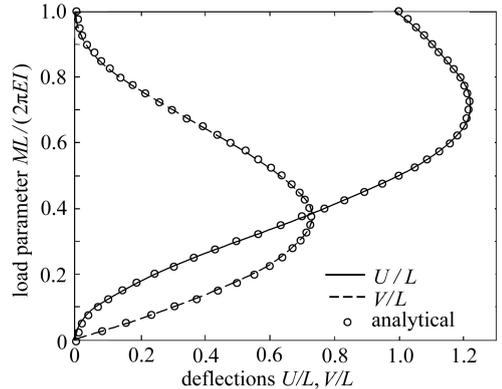


图7 纯弯矩作用下梁的端部位移

Fig.7 Displacements of the beam free-end under the action of a pure concentrated end torque

6.2 端部受纯弯载荷的悬臂梁

将算例1中的集中载荷替换为纯弯矩 M ,该问题的解析解可由弯矩与曲率间的关系得到.图7为本文结果与解析解间的比较,其中 U, V 为梁右端点沿 x, z 方向的位移.从图中可见:两者之间是吻合的。

7 结束语

梁的应变虚功率由梁的轴向应变、截面曲率矢量在截面连体基中的分量以及它们的变化率确定。传统线性梁单元依据小位移假设对这些参量做了很大程度的简化,因而不适用于梁的大变形几何非线性分析。构造几何非线性梁单元的关键是如何由节点参数求得这些参量。本文工作表明:由截面曲率与形心线之间的几何关系可以求梁端面曲率及其导数,进而可通过对曲率离散得到单元域内的曲率,而不必对转动矢量进行插值,也不需要引入新的节点参数。数值算例也验证了该方法的有效性。

参考文献(References):

- [1] Kwak H-G, Kim D-Y, Lee H-W. Effect of warping in geometric nonlinear analysis of spatial beams[J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2001, **57**(7): 729-751.
- [2] Pai P F, Anderson T J, Wheeler E A. Large-deformation tests and total-Lagrangian finite-element analyses of flexible beams[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, **37**(21): 2951-2980.
- [3] Hsiao K M, Lin J Y, Lin W Y. A consistent co-rotational finite element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of 3-D beams[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, **169**(1/2): 1-18.
- [4] Teh L H, Clarke M J. Co-rotational and Lagrangian formulations for elastic three-dimensional beam finite elements[J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 1998, **48**(2/3): 123-144.
- [5] Wu S-C, Haug E J. Geometric non-linear substructuring for dynamics of flexible mechanical systems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, **26**(10): 2211-2226.
- [6] Simo J C. A finite strain beam formulation. the three-dimensional dynamic problem—part I [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985, **49**(1): 55-70.
- [7] Simo J C, Vu-Quoc L. A three-dimensional finite-strain rod model—part II: computational aspects[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1986, **58**(1): 79-116.
- [8] Beléndez T, Neipp C, Beléndez A. Large and small deflections of a cantilever beam[J]. *European Journal of Physics*, 2002, **23**(3): 371-379.
- [9] Banerjee A, Bhattacharya B, Mallik A K. Large deflection of cantilever beams with geometric non-linearity: analytical and numerical approaches[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, **43**(5): 366-376.
- [10] Yakoub R Y, Shabana A A. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: implementation and applications[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2001, **123**(4): 614-621.
- [11] Sapanen J T, Mikkola A M. Description of elastic forces in absolute nodal coordinate formulation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2003, **34**(1/2): 53-74.
- [12] Romero I. A comparison of finite elements for nonlinear beams: the absolute nodal coordinate and geometrically exact formulations[J]. *Multibody System Dynamics*, 2008, **20**(1): 51-68.
- [13] Jonker J B, Meijaard J P. A geometrically non-linear formulation of a three-dimensional beam element for solving large deflection multibody system problems[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2013, **53**: 63-74.

- [14] Reissner E. On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem[J]. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 1972, **23**(5): 795-804.
- [15] Reissner E. On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 1973, **52**(2): 87-95.
- [16] Mattiasson K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analyzed by means of elliptic integrals[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1981, **17**(1): 145-153.

Geometric Nonlinear Spatial Beam Elements With Curvature Interpolations

QI Zhao-hui, FANG Hui-qing, ZHANG Zhi-gang, WANG Gang
(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)

Abstract: Beam elements with absolute nodal coordinates played an important role in the geometric nonlinear analysis of structures and dynamics of flexible multibody systems. One of such elements was the beam element based on the exact geometric beam model, in which the process of obtaining internal nodal forces involved interpolations of rotational angles, resulting in some numerical difficulties. Another such element proposed by Shabana, avoided the angular interpolations by replacing the nodal rotation parameters with many newly introduced nodal parameters. In accordance with the exact virtual power equations for beams with large deformations and the relationships between tangents of the beam centroid line and curvatures of the beam sections, a new spatial beam element with absolute nodal coordinates was presented. The nodal parameters of the presented element are the same with those of the element based on the exact geometric beam model, but the internal forces can be obtained without angular interpolations. Numerical examples verify its validity through comparison with the analytical results.

Key words: spatial beam element; flexible multibody system; geometric nonlinearity; curvature interpolation

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11372057)