

求解多维 Euler 方程的二阶旋转混合型格式*

刘友琼, 封建湖, 任 炯, 龚承启

(长安大学 理学院, 西安 710064)

摘要: 提出了一个基于旋转 Riemann 求解器的二阶精度的 Euler(欧拉)通量函数.不同于“网格相关”的有限体积方法或者维数分裂的有限差分方法,本格式是基于旋转 Riemann 求解器将 HLLC 格式与 HLL 格式进行特定结合而得到的一类混合型数值格式.在激波法向采用 HLL 格式从而抑制红斑现象,在激波方向采用 HLLC 格式从而避免产生过多的耗散.新的旋转混合型格式具有结构简单、无红斑、高分辨率等优点.数值算例充分说明了新格式消除 Euler 方程激波不稳定现象的有效性和鲁棒性.

关键词: 激波不稳定; Euler 方程; 无红斑; 旋转混合型格式

中图分类号: O354; O241.82 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.05.008

引 言

长期以来,双曲型守恒律方程的计算取得了巨大的进步.以通量差分分裂格式(FDS)和 Godunov 格式为代表的流体力学数值方法在双曲守恒律方程的求解中占据了很重要的地位,这些格式在大多数情况下都表现出很好的鲁棒性.然而,当计算二维问题时,它们还是会出现一些非物理现象,比如说“红斑(carbuncle)”和“奇偶失联(odd-even decoupling)”两个现象^[1],即使是常用的 Roe 近似 Riemann(黎曼)求解器^[2]、HLLC 近似 Riemann 求解器^[3]也出现了不同程度的红斑现象.在过去的十几年中,人们进行了一系列研究试图避免非物理现象的产生,详见文献[4-10].虽然他们作了详细的解释并提出了不同的格式,但这些格式都没有完全消除此类现象.众所周知,一条波的 Rusanov 通量函数及两条波的 HLL 通量函数都是“无红斑”的^[11].这些通量函数对于涉及激波的非粘性计算是非常稳健的,但对于剪切层特别是 N-S (Navier-Stokes)方程边界层,计算时会产生较大耗散.

Nishikawa 等提出了将无红斑通量函数与 Roe 通量函数相结合的方法^[11],并利用旋转 Riemann 求解器^[12-13]将这两个通量函数相结合以达到自动选择迎风方向的目的.在此之前,Ren^[13]已经采取了旋转通量,获得了对激波捕捉的稳健性,但并没有提高精度.受 Ren 及 Nishikawa 等的启示,本文将单元交界面的法向量分解成两个正交方向,一个是垂直于激波的速度

* 收稿日期: 2013-06-08; 修订日期: 2014-04-03

基金项目: 国家自然科学基金(11171043);长安大学中央高校基本科研业务费项目(CHD2102TD015)

作者简介: 刘友琼(1989—),女,云南人,硕士生(E-mail: youqiongliu@163.com);
封建湖(1960—),男,陕西人,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: jhfeng@chd.edu.cn).

差矢量方向,另一个是与之正交的方向,在两个方向上,分别采用两个不同的通量函数,这样得到的新格式称之为旋转混合型格式.新格式并没有依赖于由旋转机制自身所引起的额外耗散,而是将一个无红斑现象的通量函数 HLL 直接应用于速度差矢量方向,在另一个方向上,采用 HLLC 求解器来阻止产生过多耗散,提高对接触间断及剪切波的分辨率.这意味着混合型格式的通量在垂直于激波方向是无红斑通量,另一个方向是较少耗散的通量.因此,本文的格式是无红斑、边界层高分辨率的.另外,当速度差矢量太小时,通常使用单元交界面的法向^[13]来代替速度差矢量方向.

将具有高分辨率的数值格式与耗散较大的格式进行混合使用的思想早已被提出,Quirk^[1]在消除红斑时已经考虑到了,他使用一个压强梯度来探测激波,从而将通量由 Roe 通量转化为 HLL 通量来避免红斑现象.虽然非常高效,但最终的算法似乎并没有得到广泛采用.后来,Janhunen^[14]基于对密度及压强的正性检查,对磁流体动力学模拟提出了混合使用的思想.还有文献[15]中通量也可以认为是两个通量的混合型.本文中,通过使用旋转 Riemann 求解器构造混合型通量,数值算例表明该混合型格式具有消除 Euler 方程激波不稳定现象的稳定性和有效性.

1 有限体积格式

二维守恒型 Euler 方程为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{pmatrix},$$

ρ 是密度, u 和 v 分别为 x - 方向和 y - 方向的速度, p 是静态压强,具体的总能及总焓分别为

$$E = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2),$$

$\gamma = 1.4$, 声速 $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$.

将计算区域离散成四边形网格,分解成一系列四边形单元,其中任意一个单元 $i \in \mathbf{I}$ 都有 k 个界面 ($k = 4$). Res_i 定义为空间算子在单元 i 上的积分近似值除以单元区域面积 S_i , 采用中点公式来计算线积分,则空间上可以达到二阶精度,即

$$\text{Res}_i = -\frac{1}{S_i} \sum_{k=1}^4 \Phi_k(\mathbf{n}_k) \Delta l_k, \quad (2)$$

其中 l_k 是 k 界面长度, \mathbf{n}_k 表示 k 界面中心的外法线单位向量, $\Phi_k(\mathbf{n}_k)$ 是 $\mathbf{H}_k = [\mathbf{F}, \mathbf{G}] \cdot \mathbf{n}_k$ 的数值近似.由此,方程(1)可以半离散为

$$\frac{d\bar{\mathbf{U}}_i}{dt} = \text{Res}_i, \quad (3)$$

$\bar{\mathbf{U}}_i$ 为第 i 个单元上的平均值,时间层上的推进采用二步二阶 Runge-Kutta 方法^[13]:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{U}}_i^* = \bar{\mathbf{U}}_i^n + \Delta t \text{Res}_i(\bar{\mathbf{U}}_i^n), \\ \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{U}}_i^n + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{U}}_i^* + \Delta t \text{Res}_i(\bar{\mathbf{U}}_i^*)), \end{cases} \quad (4)$$

时间步

$$\Delta t = \min_{i \in I} \left(\frac{2S_i}{\sum_k |S_k|_{\max} \Delta L_k} \right) C_{\text{CFL}},$$

$|S_k|_{\max}$ 是垂直于单元交界面 k 的最大波速.

数值通量 Φ_k 是利用交界面的左右状态计算而得到的. 如果只是简单地将邻近单元平均值作为左右状态量, 则该方法在空间上是一阶精度的. 为了达到二阶精度, 本文采用 Van Leer 的 κ -格式, 对邻近单元进行线性插值来近似单元平均值, 即单元交界面的值为

$$\begin{cases} \bar{U}_{i+1/2}^{\text{L}} = \bar{U}_i + \frac{s}{4} [(1 - \kappa s) \Delta_i^- \bar{U} + (1 + \kappa s) \Delta_i^+ \bar{U}], \\ \bar{U}_{i+1/2}^{\text{R}} = \bar{U}_{i+1} - \frac{s}{4} [(1 + \kappa s) \Delta_{i+1}^- \bar{U} + (1 - \kappa s) \Delta_{i+1}^+ \bar{U}], \end{cases} \quad (5)$$

其中 $s = \text{ave}(\Delta_i^- \bar{U}, \Delta_i^+ \bar{U})$, $\Delta_i^- \bar{U} = \bar{U}_i - \bar{U}_{i-1}$, $\Delta_i^+ \bar{U} = \bar{U}_{i+1} - \bar{U}_i$, $\kappa = 1/3$.

平均函数选择 Van Albada 限制器^[12]来消除振荡, 即

$$\text{ave}(a, b) = \frac{2(ab + \varepsilon)}{a^2 + b^2 + 2\varepsilon}, \quad \varepsilon = 10^{-6}. \quad (6)$$

2 基本的 Riemann 求解器

穿过每个单元交界面 k 的数值通量 Φ_k 可以通过求解一维 Euler 方程沿着界面法线方向 \mathbf{n}_k 的 Riemann 问题:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial \mathbf{n}_k} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0, \\ \mathbf{U}_R, & x > 0 \end{cases} \quad (7)$$

所获得. 本文中左右两侧的常数 $\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R$ 是通过线性插值式(5)得到的.

2.1 HLL Riemann 求解器

Harten, Lax 和 Van Leer 于 1983 年提出一种近似 Riemann 求解器^[16]. 它从守恒律的积分形式出发, 得到一种不需要像 Roe 方法那样做特征分解, 而可以直接求出数值通量的格式. 两条波近似的数值通量函数为

$$\Phi_{\text{HLL}} = \frac{S_{\text{R}}^+ \mathbf{H}_k(\mathbf{U}_L) - S_{\text{L}}^- \mathbf{H}_k(\mathbf{U}_R)}{S_{\text{R}}^+ - S_{\text{L}}^-} + \frac{S_{\text{R}}^+ S_{\text{L}}^-}{S_{\text{R}}^+ - S_{\text{L}}^-} \Delta \mathbf{U}, \quad (8)$$

其中 $S_{\text{R}}^+ = \max(0, S_{\text{R}})$, $S_{\text{L}}^+ = \max(0, S_{\text{L}})$. 关于 $S_{\text{L}}, S_{\text{R}}$, Einfeldt 等将其定义为 Jacobi(雅可比)矩阵 $\hat{\mathbf{A}}_n = \partial \mathbf{H}_k / \partial \mathbf{U}$ 的最小和最大特征值^[15]:

$$\begin{aligned} S_{\text{L}} &= \min((q_n)_{\text{L}} - c_{\text{L}}, \hat{q}_n - \hat{c}), \quad S_{\text{R}} = \max((q_n)_{\text{R}} + c_{\text{R}}, \hat{q}_n + \hat{c}), \\ (q_n)_{\text{L,R}} &= (u, v)_{\text{L,R}} \cdot \mathbf{n}. \text{法向量 } \mathbf{n} = (n_x, n_y), \text{法向速度 } \hat{q}_n = (\hat{u}, \hat{v}) \cdot \mathbf{n}, \text{切向速度 } \hat{q}_t = (\hat{u}, \hat{v}) \cdot (-n_y, n_x). \text{Roe 平均量为} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sqrt{\rho_{\text{L}} \rho_{\text{R}}}, \quad \hat{u} = \frac{u_{\text{L}} \sqrt{\rho_{\text{L}}} + u_{\text{R}} \sqrt{\rho_{\text{R}}}}{\sqrt{\rho_{\text{L}}} + \sqrt{\rho_{\text{R}}}}, \quad \hat{v} = \frac{v_{\text{L}} \sqrt{\rho_{\text{L}}} + v_{\text{R}} \sqrt{\rho_{\text{R}}}}{\sqrt{\rho_{\text{L}}} + \sqrt{\rho_{\text{R}}}}, \\ \hat{H} &= \frac{H_{\text{L}} \sqrt{\rho_{\text{L}}} + H_{\text{R}} \sqrt{\rho_{\text{R}}}}{\sqrt{\rho_{\text{L}}} + \sqrt{\rho_{\text{R}}}}, \quad \hat{c} = \sqrt{(\gamma - 1) \left(\hat{H} - \frac{\hat{u}^2 + \hat{v}^2}{2} \right)}. \end{aligned}$$

穿过孤立激波间断时, HLL 通量等价于 Roe 通量. 此 HLL 数值通量有时候也被称为 HLLC 通量.

HLL 数值通量也可以写作如下形式:

$$\Phi_{\text{HLL}} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}_k(\mathbf{U}_L) + \mathbf{H}_k(\mathbf{U}_R)] + \frac{S_R^+ S_L^-}{S_R^+ - S_L^-} \Delta \mathbf{U} - \frac{1}{2} \frac{S_R^+ + S_L^-}{S_R^+ - S_L^-} \Delta \mathbf{H}_k, \quad (10)$$

其中

$$\Delta \mathbf{H}_k = \mathbf{H}_k(\mathbf{U}_R) - \mathbf{H}_k(\mathbf{U}_L).$$

HLL Riemann 求解器满足离散熵条件,一般不会像 Roe 格式那样出现非物理解,并且不需要做特征分解,计算效率相对较高.结合波速选择的 HLL 通量式(8)是一个稳定格式,这就保证了耗散矩阵的正定性.此通量函数是无红斑的,但其缺点是格式粘性较大,对接触间断、剪切波和物质界面的分辨率低.

2.2 HLLC Riemann 求解器

为了减小 HLL 方法的数值粘性,提高该格式对接触间断和剪切波的分辨率,Toro, Spruce 和 Speares^[3]对其进行改进,在两波系中间增加了一个接触波 S_* ,得到了 HLLC 方法.对于求解二维 Euler 方程的完整波近似的 HLLC 数值通量为

$$\Phi_{\text{HLLC}} = \begin{cases} \mathbf{H}_k(\mathbf{U}_L), & 0 \leq S_L, \\ \mathbf{H}_k(\mathbf{U}_L) + S_L(\mathbf{U}_{*L} - \mathbf{U}_L), & S_L \leq 0 \leq S_*, \\ \mathbf{H}_k(\mathbf{U}_R) + S_R(\mathbf{U}_{*R} - \mathbf{U}_R), & S_* \leq 0 \leq S_R, \\ \mathbf{H}_k(\mathbf{U}_R), & 0 \geq S_R. \end{cases} \quad (11)$$

其中波速 S_L, S_R 的近似见式(9), \mathbf{U}_{*K} 如下 ($K = L, R$):

$$\mathbf{U}_{*K} = \rho_K \left(\frac{S_K - u_K}{S_K - S_*} \right) \left[1, S_*, v_K, E_K + (S_* - u_K) \left(S_* + \frac{P_K}{\rho_K(S_K - u_K)} \right) \right]^T. \quad (12)$$

关于 S_* , Toro 等给出了它的估计式^[3]:

$$S_* = \frac{p_R - p_L + \rho_L u_L (S_L - u_L) - \rho_R u_R (S_R - u_R)}{\rho_L (S_L - u_L) - \rho_R (S_R - u_R)}. \quad (13)$$

HLLC Riemann 求解器可以对波速进行调整,从而具有可调的粘性,这与 Roe 方法是不同的,且该 Riemann 求解器对接触间断和激波都有较高的分辨率.

3 旋转混合 Riemann 求解器

3.1 旋转 Riemann 求解器的一般形式

对于标准的有限体积方法,无论怎么求解 Riemann 问题,一维问题的方向完全是由网格的几何性质所决定.明显地,“网格相关”法方向不一定总是与迎风方向相一致.提出旋转 Riemann 方法的初衷是为了能够自由地选择一维 Riemann 问题的方向,从而提高精度^[12].本文的主要目的是为了获得鲁棒性,然而对方向的巧妙选择也可以达到更高精度.

旋转 Riemann 求解器是基于将法向量 \mathbf{n} 分解成两个方向正交的单位向量.假设已经选择 \mathbf{n}_1 ,那么取与之正交的方向为 \mathbf{n}_2 ,即 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$, $|\mathbf{n}_1| = |\mathbf{n}_2| = 1$.单元交界面法向量 \mathbf{n} 就被投影到这两个正交方向上:

$$\mathbf{n} = \alpha_1 \mathbf{n}_1 + \alpha_2 \mathbf{n}_2, \quad \alpha_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1, \quad \alpha_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_2. \quad (14)$$

那么交界面的通量被分解为

$$\Phi = \Phi(\mathbf{n}) = \alpha_1 \Phi(\mathbf{n}_1) + \alpha_2 \Phi(\mathbf{n}_2). \quad (15)$$

为了定义交界面通量,需要求解两个方向上的 Riemann 问题,以此得到两个方向上的数值通量.如果在两个方向上都采用 Roe Riemann 求解器,那么就可以得到 Ren 的旋转 Riemann 求解器^[13],它的性质依赖于对方向 \mathbf{n}_1 的选择.例如, Ren 将旋转格式的迎风方向 \mathbf{n}_1 取为控制体界

面两侧速度差矢量的方向,该格式在线性区域产生更多耗散,能够完全消除基于 Riemann 求解器的通量差分分裂格式存在的“红斑现象”。

3.2 新的旋转混合 Riemann 求解器

在式(15)中,两个正交方向上分别采取 HLL 通量与 HLLC 通量,便得到新的通量函数.具体地, HLL 通量(见式(10))应用于 \mathbf{n}_1 方向上, HLLC 通量(见式(11))应用于 \mathbf{n}_2 方向上,如此新的通量函数将会提高激波捕捉能力,保持了 HLL Riemann 求解器对孤立的激波间断的捕捉能力.新的旋转混合 Riemann 求解器的通量函数为

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{HHLLC}} &= \alpha_1 \Phi_{\text{HLL}}(\mathbf{n}_1) + \alpha_2 \Phi_{\text{HLLC}}(\mathbf{n}_2) = \\ &= \frac{\alpha_1}{2} [\mathbf{H}_1(\mathbf{U}_L) + \mathbf{H}_1(\mathbf{U}_R)] + \alpha_1 \frac{S_R^+ S_L^-}{S_R^+ - S_L^-} \Delta \mathbf{U} - \\ &= \frac{\alpha_1}{2} \frac{S_R^+ + S_L^-}{S_R^+ - S_L^-} \Delta \mathbf{H}_1 + \alpha_2 \Phi_{\text{HLLC}}(\mathbf{n}_2), \end{aligned} \quad (16)$$

其中 S_R^+, S_L^- 是 \mathbf{n}_1 方向计算得到的.

新格式并没有依赖于由旋转机制自身所引起的额外耗散,而是将一个无红斑现象的通量函数 HLL 直接应用于 \mathbf{n}_1 方向.在另一个方向上,采用 HLLC 求解器来阻止产生过多耗散,提高对接触间断及剪切波的分辨率.这意味着混合型格式的通量在垂直于激波方向是无红斑通量,较少耗散的 HLLC 通量穿过剪切层.因此,最终的通量是无红斑、边界层高分辨率的,显然比 HLL 有更高的分辨率.本文将新格式称为 HLL 与 HLLC 的旋转混合型通量(rotated-HHLLC).

3.3 \mathbf{n}_1 方向的选择

在旋转混合 Riemann 求解器(16)的数值计算中, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 是不知道的,总是假设 \mathbf{n}_2 与 \mathbf{n}_1 互相垂直.可以通过相邻两个网格的速度差分向量来近似估计 \mathbf{n}_1 :

$$\mathbf{n}_1 = \begin{cases} \frac{\Delta \mathbf{q}}{\|\Delta \mathbf{q}\|}, & \|\Delta \mathbf{q}\| > \varepsilon, \\ \mathbf{n}, & \text{other,} \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$\Delta \mathbf{q} = (\Delta u, \Delta v) = (u_R - u_L, v_R - v_L), \quad \|\Delta \mathbf{q}\| = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2},$$

ε 是一个较小参数.即 \mathbf{n}_1 是激波法向.

已知非线性不稳定性是由横向扰动引起的,因此一个耗散通量应该应用于平行于激波的方向^[6].只要存在垂直于单元交界面的速度差矢量方向,就在该方向上利用 HLL Riemann 求解器,故新的旋转混合 Riemann 求解器总是比 HLLC 通量具有更多耗散.另一方面,横向扰动是由垂直于激波的一个扰动引起的,也就是说垂直于激波的耗散通量抑制了非线性不稳定性.由此,本文的旋转通量在垂直于激波方向直接采用 HLL 通量来消除非线性不稳定性.数值实验表明新的旋转 Riemann 求解器完全消除了激波不稳定现象,至少对于激波衍射问题、双 Mach (马赫)反射问题是这样的.

可以将此旋转 Riemann 求解器直接推广到三维问题上,只是相当于定义 \mathbf{n}_2 垂直于主方向 \mathbf{n}_1 .例如,有如下形式:

$$\mathbf{n}_2 = \frac{(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}_1}{\|(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}_1\|}. \quad (18)$$

这可以应用于任意类型的单元,比如说六面体或者四面体.很明显,本文的旋转通量只适用于多维问题.

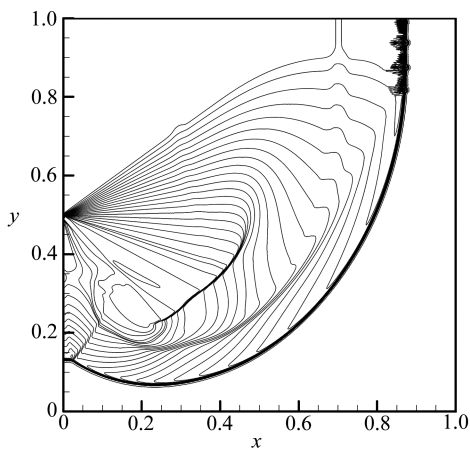
4 数值算例

算例 1 激波衍射问题

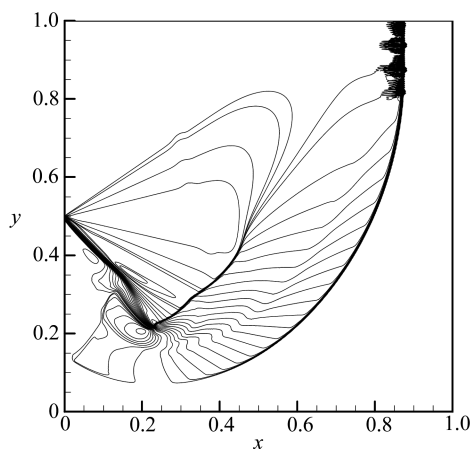
激波衍射问题是一个对许多 Godunov 型格式都失效的数值试验.在这个问题中,一个 Mach 数为 5.09 的向右行正激波环绕一个 90° 角发生衍射.计算区域是正方形 $[0,1] \times [0,1]$,将其剖分为 400×400 的均匀网格.为简单起见,将角选择在左边界的中点,则左边下半部分取为固定壁,而左边上半部分设为流入条件,上边界也取为固定壁,右边界及下边界都取为出流条件.在计算中, $C_{\text{CFL}} = 0.95$,时间推进到 $t = 0.18$.激波右边的初始条件为

$$(\rho, u, v, p) = \left(1, 0, 0, \frac{1}{1.4}\right),$$

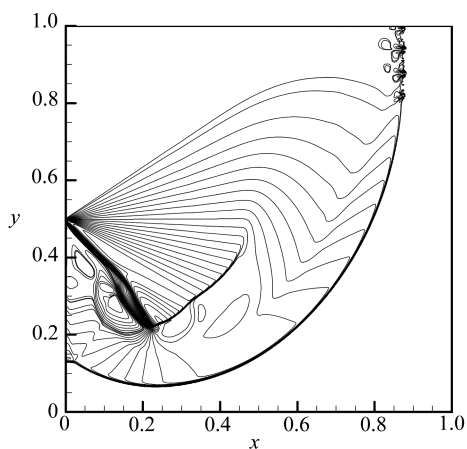
激波左边的初始条件由移动激波关系给出.



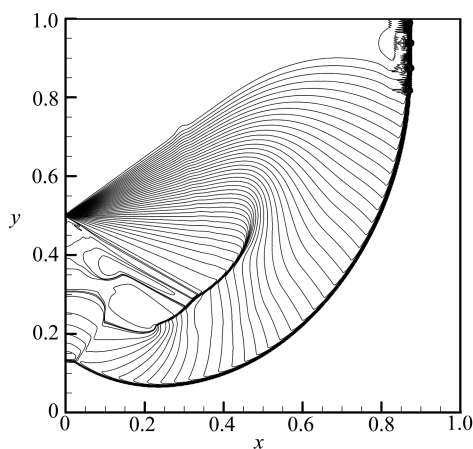
(a) 密度
(a) Density



(b) x -方向速度 u
(b) x -direction velocity u



(c) y -方向速度 v
(c) y -direction velocity v



(d) 压强
(d) Pressure

图 1 HLLC 格式求解激波衍射问题的结果图

Fig.1 Numerical results of the shock wave diffraction problem computed with the HLLC scheme

图 1 是采用 HLLC 格式计算的密度、速度、压强结果图.我们可以看到出现了很明显的激波不稳定现象.图 2 中是采用本文的二阶旋转混合型格式计算的密度、速度、压强结果图.可以发现该格式很好地捕捉了超音速激波,消除了红斑现象.

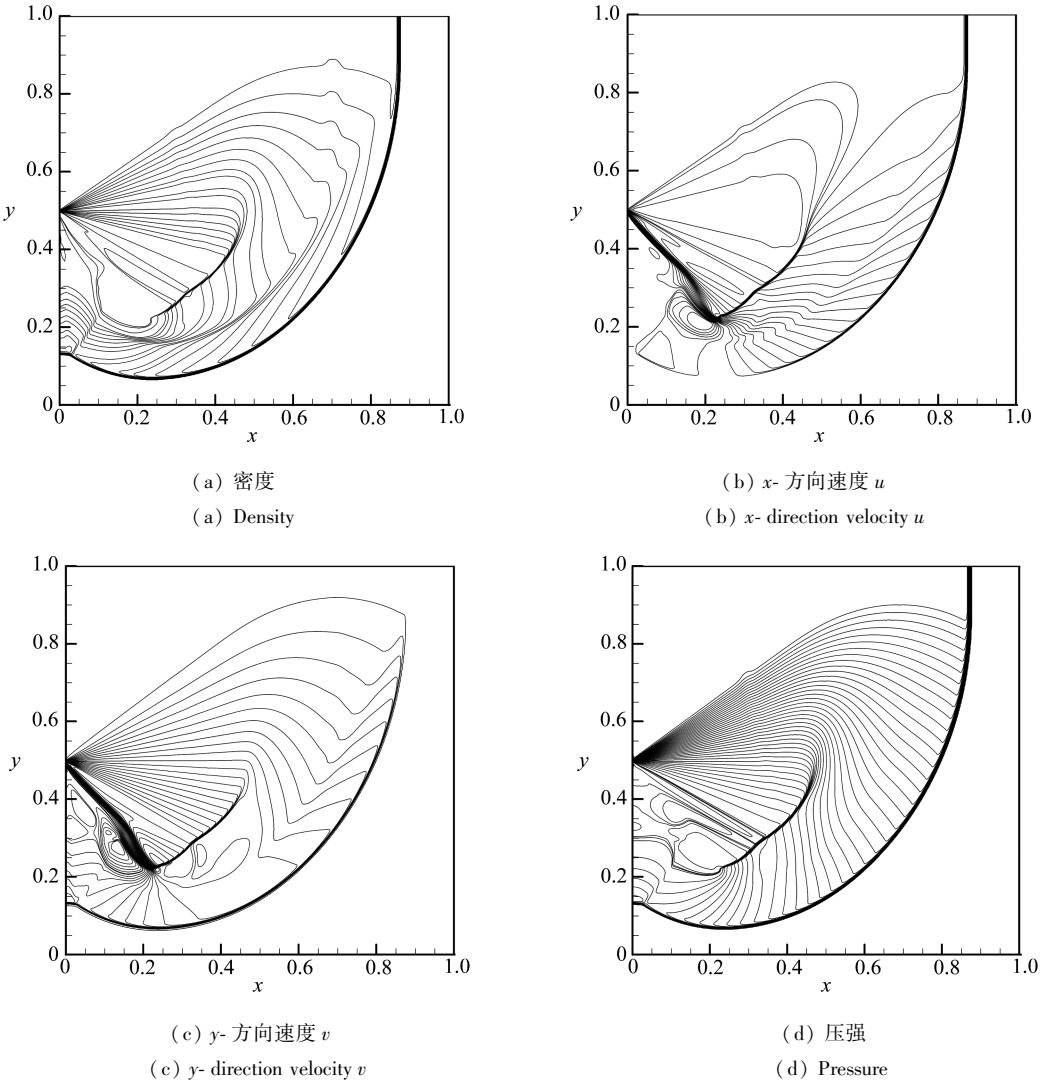


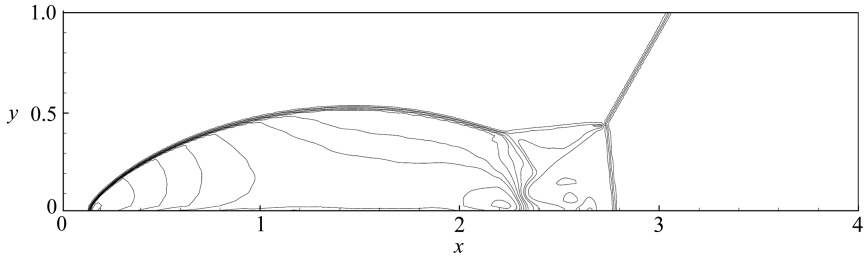
图 2 二阶旋转混合型格式(rotated-HLLC)求解激波衍射问题的结果图

Fig.2 Numerical results of the shock wave diffraction problem computed with the second-order rotated-HLLC scheme

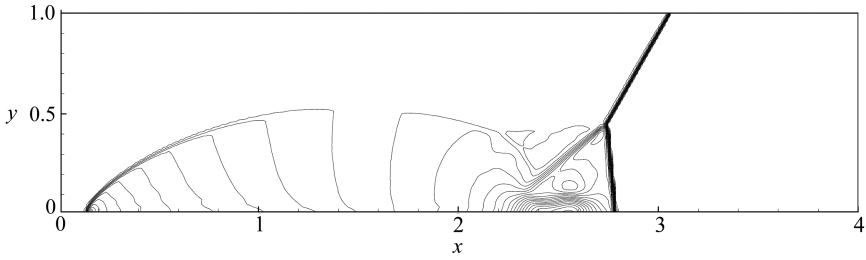
算例 2 双 Mach 反射问题

这个问题最早由 Woodward 和 Colella^[17]提出,之后被广泛地用来测试激波的稳定性.

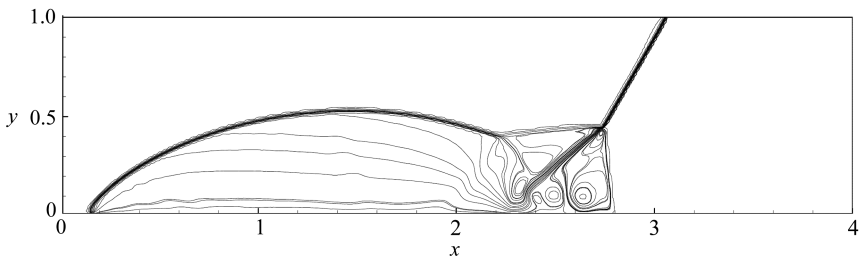
众所周知,Roe 格式、HLLC 格式求解该问题会出现很明显的的不稳定现象.计算区域为 $[0, 4] \times [0, 1]$,在其底部有一个开始于 $x = 1/6$ 的墙.计算开始时刻,一个 Mach 数为 10 的右行激波通过 $(x = 1/6, y = 0)$ 并且和 x -轴成 60° 角,激波右侧的初始条件为 $(\rho, u, v, p) = (1.4, 0, 0, 1)$.计算区域的网格为 320×80 ,左边界设为流入条件,右边界取为出口条件,上边界需考虑激波运动,下边界始于 $x = 1/6$ 部分采用无穿透绝热条件.在计算中, $C_{CFL} = 0.7$,时间推进到 $t = 0.2$.计算结果见图 3,可以看出本文的二阶旋转混合型格式能以高分辨率捕捉激波并且没有表现出任何不稳定性.



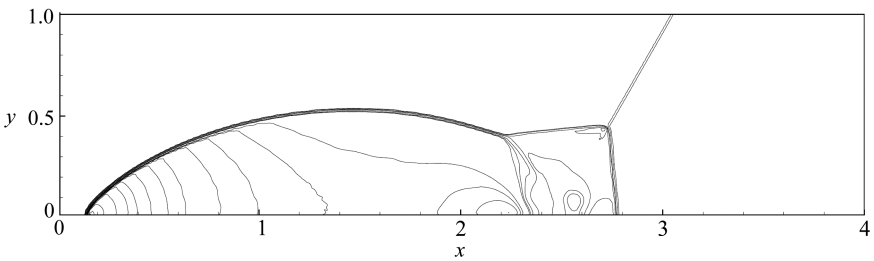
(a) 密度
(a) Density



(b) x -方向速度 u
(b) x -direction velocity u



(c) y -方向速度 v
(c) y -direction velocity v



(d) 压强
(d) Pressure

图3 二阶旋转混合型格式(rotated-HHLLC)求解双 Mach 反射问题的结果图
Fig.3 The numerical results of double-Mach reflection problem computed with the second-order rotated-HHLLC scheme

算例3 二维 Euler 方程的 Riemann 问题

二维 Euler 方程的 Riemann 问题,初值为

$$U_0(x, y, 0) = \begin{cases} (\rho_1, u_1, v_1, p_1), & x > 0.5, y > 0.5, \\ (\rho_2, u_2, v_2, p_2), & x < 0.5, y > 0.5, \\ (\rho_3, u_3, v_3, p_3), & x < 0.5, y < 0.5, \\ (\rho_4, u_4, v_4, p_4), & x > 0.5, y < 0.5. \end{cases}$$

根据稀疏波 (\vec{R})、激波 (\vec{S}) 和接触间断 (J^\pm) 等 3 类一维中心波的结构, 多元气体的 Riemann 问题共有 19 种不同的容许结构^[18-19], 箭头 ($\vec{\cdot}$) 和 ($\overleftarrow{\cdot}$) 表示正向波和反向波, J^\pm 表示正负接触间断. 本文只考虑下列 4 种初值问题^[20]:

① 两稀疏波、两接触间断结构

$$\begin{array}{ccc} & J_{21}^- & \\ \vec{R}_{32} & & \vec{R}_{41}, \\ & J_{34}^+ & \end{array}$$

初值

$$U_0 = \begin{cases} (1, 0, 0.4297, 1), \\ (0.5, 0, 0.6076, 1), \\ (0.2281, 0, -0.6076, 0.3333), \\ (0.4562, 0, -0.4297, 0.3333); \end{cases}$$

② 单激波、单稀疏波、两接触间断结构

$$\begin{array}{ccc} & \overleftarrow{R}_{21} & \\ J_{32}^- & & \vec{S}_{41}, \\ & J_{34}^+ & \end{array}$$

初值

$$U_0 = \begin{cases} (0.5313, 0.1, 0.1, 0.4), \\ (1.0222, -0.6179, 0.1, 1), \\ (0.8, 0.1, 0.1, 1), \\ (1, 0.1, 0.8276, 1); \end{cases}$$

③ 单激波、单稀疏波、两接触间断结构

$$\begin{array}{ccc} & J_{21}^+ & \\ \overleftarrow{S}_{32} & & \vec{R}_{41}, \\ & J_{34}^+ & \end{array}$$

初值

$$U_0 = \begin{cases} (1, 0, 1, 1), \\ (2, 0, -0.3, 1), \\ (1.0625, 0, 0.2145, 0.4), \\ (0.5197, 0, 0.2741, 0.4); \end{cases}$$

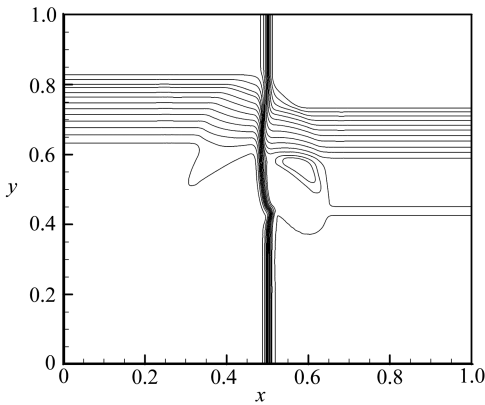
④ 单激波、单稀疏波、两接触间断结构

$$\begin{matrix} J_{21}^+ \\ \overleftarrow{S}_{32} \quad \overrightarrow{R}_{41}, \\ J_{34}^- \end{matrix}$$

初值

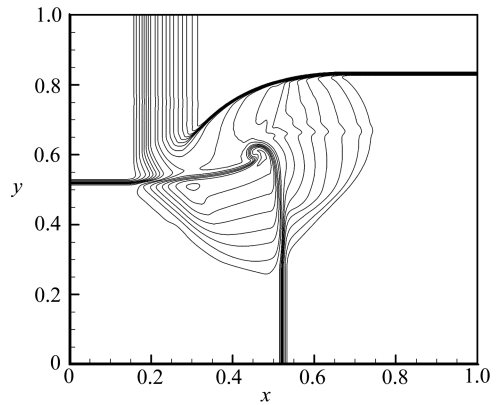
$$U_0 = \begin{cases} (1, 0, 0.3, 1), \\ (2, 0, -0.3, 1), \\ (1.0625, 0, 0.2145, 0.4), \\ (0.5197, 0, -0.4259, 0.4). \end{cases}$$

采用 400×400 的网格, $C_{CFL} = 0.2, 0.2, 0.2, 0.3$, 时间推进到 $T = 0.15, 0.2, 0.2, 0.3$. 图 4 给出用 rotated-HHLLC 方法计算得到的密度等值线. 从计算结果可以看出, 对激波、稀疏波和接触间断都有很高的分辨率.



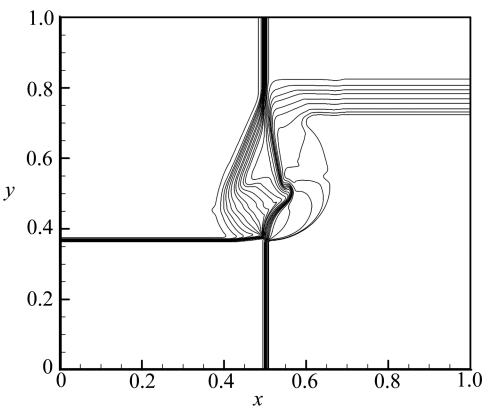
(a) 初值 ① ($T = 0.15, C_{CFL} = 0.2$)

(a) Initial data ① ($T = 0.15, C_{CFL} = 0.2$)



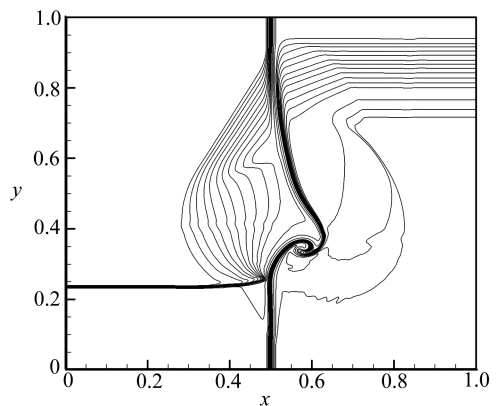
(b) 初值 ② ($T = 0.2, C_{CFL} = 0.2$)

(b) Initial data ② ($T = 0.2, C_{CFL} = 0.2$)



(c) 初值 ③ ($T = 0.2, C_{CFL} = 0.2$)

(c) Initial data ③ ($T = 0.2, C_{CFL} = 0.2$)



(d) 初值 ④ ($T = 0.3, C_{CFL} = 0.3$)

(d) Initial data ④ ($T = 0.3, C_{CFL} = 0.3$)

图 4 二阶旋转混合格式 (rotated-HHLLC) 求解二维 Euler 方程 Riemann 问题的结果图

Fig.4 Numerical results of the Riemann problems of two-dimensional Euler equations computed with the second-order rotated-HHLLC scheme

5 总 结

本文提出了一个用于求解多维 Euler 方程的二阶旋转混合型格式.该格式具有强大的激波捕捉能力.数值算例的有效性、鲁棒性及精确性表明该格式可以快速有效地避免“红斑现象”.本文只是通量函数的一个特殊组合,其它的组合将在后续的文章中详述.

参考文献(References):

- [1] Quirk J J. A contribution to the great Riemann solver debate[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1994, **18**(6): 555-574.
- [2] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, **43**(2): 357-372.
- [3] Toro E F, Spruce M, Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver[J]. *Shock Waves*, 1994, **4**(1): 25-34.
- [4] Pandolfi M, D' Ambrosio D. Numerical instabilities in upwind methods: analysis and cures for the “carbuncle” phenomenon[J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, **166**(2): 271-301.
- [5] Chauvat Y, Moschetta J-M, Gressier J. Shock wave numerical structure and the carbuncle phenomenon[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005, **47**(8/9): 903-909.
- [6] Liou M S. Mass flux schemes and connection to shock instability[J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, **160**(2): 623-648.
- [7] XU Kun, LI Zuo-wu. Dissipative mechanism in Godunov-type schemes[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2001, **37**(1): 1-22.
- [8] Kim S-S, Kim C, Rho O-H, Hong S K. Cures for the shock instability: development of a shock-stable Roe scheme[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, **185**(2): 342-374.
- [9] Dumbser M, Morschetta J-M, Gressier J. A matrix stability analysis of the carbuncle phenomenon[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, **197**(2): 647-670.
- [10] Ismail F. Toward a reliable prediction of shocks in hypersonic flows: resolving carbuncles with entropy and vorticity control[D]. PhD Thesis. Ann Arbor, MI: University of Michigan, 2009.
- [11] Nishikawa H, Kitamura K. Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers[J]. *Journal of Computational Physics*, 2008, **227**(4): 2560-2581.
- [12] Levy D W, Powell K G, Van Leer B. Use of a rotated Riemann solver for the two-dimensional Euler equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, **106**(2): 201-214.
- [13] REN Yu-xin. A robust shock-capturing scheme based on rotated Riemann solver for the two-dimensional Euler equations[J]. *Computers and Fluids*, 2003, **32**(11): 1379-1403.
- [14] Janhunen P. A positive conservative method for magnetohydrodynamics based on HLL and Roe methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, **160**(2): 649-661.
- [15] Einfeldt B, Munz C D, Roe P L. On Godunov-type methods near low densities[J]. *Journal of Computational Physics*, 1991, **92**(2): 273-295.
- [16] Harten A, Lax P D, Van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *SIAM Review*, 1983, **25**(1): 35-61.
- [17] Woodward P, Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong

- shocks[J]. *Journal of Computational Physics*, 1984, **54**(1): 115-173.
- [18] Kurganov A, Tadmor E. Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics without Riemann problem solvers [J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2002, **18**(5): 584-608.
- [19] 陈建忠. 浅水方程高分辨率有限差分方法研究[D]. 博士学位论文. 西安: 西北工业大学, 2006. (CHEN Jian-zhong. Research on high-resolution finite-difference methods for the shallow water equations[D]. PhD Thesis. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2006. (in Chinese))
- [20] 胡彦梅, 陈建忠, 封建湖. 双曲型守恒律的一种五阶半离散中心迎风格式[J]. 计算物理, 2008, **25**(1): 29-35. (HU Yan-mei, CHEN Jian-zhong, FENG Jian-hu. A fifth-order semi-discrete central-upwind scheme for hyperbolic conservation laws[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2008, **25**(1): 29-35. (in Chinese))

A Second-Order Rotated-Hybrid Scheme for Solving Multi-Dimensional Compressible Euler Equations

LIU You-qiong, FENG Jian-hu, REN Jiong, GONG Cheng-qi
(School of Sciences, Chang'an University, Xi'an 710064, P.R.China)

Abstract: A second-order Euler flux function based on the rotated Riemann solver approach was presented. This scheme was different from the grid-aligned finite-volume method or the finite-difference method based on dimensional splitting. It was a hybrid numerical scheme developed through particular combination of the HLLC scheme and HLL scheme. The HLL scheme was applied in the direction normal to shock waves to suppress the carbuncle phenomenon and the HLLC scheme was applied across shear layers to avoid excessive numerical dissipation. Numerical experiments show that the new rotated-hybrid scheme is extremely simple, carbuncle-free and highly efficient.

Key words: numerical shock wave instability; Euler equation; carbuncle-free; rotated-hybrid scheme

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11171043)