文章编号:1000-0887(2014)09-1020-13

向量 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸映射与向量优化*

彭再云[1], 李科科[1,2], 张石生[3]

(1. 重庆交通大学 理学院, 重庆 400074;
2. 重庆师范大学 数学学院, 重庆 400047;
3. 云南财经大学 数学与统计学院, 昆明 650224)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 提出了一类新的向量值映射—— D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸映射, 它是 E- 预不变凸映射与 D-$\boldsymbol{\eta}$- 半预不变凸映射的真推广.首先, 用例子说明了 E- 半不变凸集、D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸映射的存在性;然后,给出了 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸映射的判定定理, 并讨论了 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半预不变凸映射与 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 严格/半严格半预不变凸映射的关系;最后,得到了 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半严格半预不变凸映射在隐约束优化问题中的一个重要应用,并举例验证了所得结果.

关 键 词: E- 半不变凸集; D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸映射; 判定定理; 优化问题; 应用
中图分类号: O221.1 **文献标志码**: A
doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.09.008

引 言

凸性和广义凸性在数理经济、管理科学和最优化理论中起着非常重要的作用, 有关凸性和广义凸性的研究是数学规划最重要的方向之一.近年来一批学者在广义凸性与数学规划方面取得了较好成果.1981 年,Hanson[1]给出了不变凸函数的概念.其后, 大量文献借助于此类函数讨论了数学规划问题解的最优性条件.随后 Ben-Israel 和 Mond[2]考虑了一类较重要的非可微函数, Weir 和 Jeyakumar[3]将其称为预不变凸函数.Yang 和 Li[4]在条件 C 下讨论了预不变凸函数的一些性质.Yang 和 Li[5]给出了严格预不变凸函数、半严格预不变凸函数的概念, 并讨论了它与预不变凸函数间的相互关系.1992 年, Yang 和 Chen[6]给出了半预不变凸函数的定义, 它是预不变凸函数的真推广.Peng 和 Chang[7]提出了 G- 半预不变凸函数的概念,从而统一了 G- 预不变凸函数[8] 与半预不变凸函数,并讨论了 G- 半预不变凸函数的性质及其重要刻画.Kazmi[9]提出了向量值情形下的 D- 预不变凸映射的重要概念.Peng 和 Zhu[10]给出了 D- 预不变凸映射的一些性质,并讨论了 D- 预不变凸性、D- 严格预不变凸性和 D- 半严格预不变凸性之间的关系.而后,一些文献[11-13]继续对向量广义凸映射进行了研究.2009 年,Fulga 和 Preda[14]给出了 E- 预不变凸性和局部 E- 预不变凸性的定义和一些性质,并讨论了在 E- 预不变凸性和局

* **收稿日期**: 2014-04-05; **修订日期**: 2014-06-27
基金项目: 国家自然科学基金(11301571; 11271389); 重庆市自然科学基金(CSTC2012jjA00016); 重庆市教委科技项目(KJ130428)
作者简介: 彭再云(1980—),男,重庆人,副教授,博士(E-mail: pengzaiyun@126.com);
张石生(1934—),男,云南曲靖人,教授(通讯作者. E-mail: changss@yahoo.cn).

部 E- 预不变凸性条件下局部有效解和全局有效解之间的关系.彭再云等[15] 给出了向量 D-$\boldsymbol{\eta}$-半预不变凸映射的一些性质,并讨论了 D-$\boldsymbol{\eta}$- 半预不变凸性、D-$\boldsymbol{\eta}$- 严格预不变凸性和 D-$\boldsymbol{\eta}$- 半严格预不变凸性之间的关系.

受文献[12-13,15]的启发, 本文提出了一类新的向量值广义凸映射—— D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸映射, 它是 E- 预不变凸映射与 D-$\boldsymbol{\eta}$- 预不变凸映射的真推广.首先, 用例子说明了 D-$\boldsymbol{\eta}$-E-半预不变凸映射的存在性, 并举例说明了它区别于 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半严格半预不变凸映射;然后,给出了 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸映射的判定定理, 并建立了 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸映射与 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 严格半预不变凸映射、D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半严格半预不变凸映射间的关系;最后, 讨论了 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半严格半预不变凸映射在一类隐约束向量优化问题中的重要应用, 并举例验证了所得结论的正确性.所得结果推广了文献[10,12-15]中的相应结果.

1　定义及其例子

本文均假定 $X,Y\subseteq R^n$,K 是 X 中给定的任意非空子集,D 是 Y 中的非空点闭凸锥,$f:K\to Y$ 是向量值映射.D 的对偶锥 D^* 为 $D^*=\{f\in Y^*\mid f(y)\geqslant 0,\forall y\in D\}$.同时,假设映射 $E:K\to K$,$\boldsymbol{\eta}:R^n\times R^n\times[0,1]\to R^n$.

为了后面研究的需要,先回顾如下的定义.

定义 1.1[14]　称集合 K 是 X 中(关于 $\boldsymbol{\eta}$) 的 E- 不变凸集,若存在向量值映射 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\to X$(当 $x\neq y$ 时 $\boldsymbol{\eta}\neq\mathbf{0}$),$E(\cdot):K\to K$,使得 $\forall x,y\in K,\forall\lambda\in[0,1]$.有

$$E(y)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y))\in K.$$

定义 1.2[6]　称集合 K 是 X 中(关于 $\boldsymbol{\eta}$) 的半不变凸集,若对向量值映射 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to X$(当 $x\neq y$ 时 $\boldsymbol{\eta}\neq\mathbf{0}$),使得 $\forall x,y\in K,\forall\alpha\in[0,1],\forall\lambda\in[0,1]$.有

$$y+\alpha\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda)\in K.$$

定义 1.3[14]　设 K 是 X 中关于 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\to X$ 的 E- 不变凸集,$E(\cdot):K\to K$,称向量值映射 $f:K\to R$ 在 K 上(关于 $\boldsymbol{\eta}$) 是 D-E- 预不变凸函数,如果对 $\forall x,y\in K,\forall\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(E(y)+\lambda\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y)))\in\lambda f(E(x))+(1-\lambda)f(E(y)).$$

定义 1.4[15]　设 K 是 X 中关于 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to X$ 的半不变凸集,称向量值映射 $f:K\to Y$ 在 K 上(关于 $\boldsymbol{\eta}$) 是 D-$\boldsymbol{\eta}$- 半预不变凸的, 如果对 $\forall x,y\in K,\forall\alpha\in[0,1],\forall\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(y+\alpha\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda))\in\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-D,$$

其中　$\lim_{\alpha\to 0}\alpha\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda)=0.$

下面,给出本文将要用到的几个重要定义.

定义 1.5　称集合 K 是 X 上(关于 $\boldsymbol{\eta}$) 的 E- 半不变凸集,若存在向量值映射 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to X$(当 $x\neq y$ 时 $\boldsymbol{\eta}\neq\mathbf{0}$),$E(\cdot):K\to K$,使得 $\forall x,y\in K,\forall\alpha\in[0,1],\forall\lambda\in[0,1]$, 有

$$E(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)\in K.$$

定义 1.6　设 K 是 X 中关于 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to X$ 的 E- 半不变凸集,$E(\cdot):K\to K$.称向量值映射 $f:K\to Y$ 在 K 上(关于 $\boldsymbol{\eta}$) 是 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸的, 如果对 $\forall x,y\in K,\forall\alpha\in[0,1]$, $\forall\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(E(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))\in\alpha f(E(x))+(1-\alpha)f(E(y))-D,$$

其中　$\lim_{\alpha\to 0}\alpha\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)=0.$

定义 1.7　设 K 是 X 中关于 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to X$ 的 E- 半不变凸集,$E(\cdot):K\to K$,称向量值映射 $f:K\to Y$ 在 K 上(关于 $\boldsymbol{\eta}$) 是 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半严格半预不变凸的, 如果对 $\forall x,y\in K$,

$f(E(x)) \neq f(E(y))$, $\forall \alpha \in (0,1)$, $\forall \lambda \in (0,1)$ 有

$$f(E(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)) \in \alpha f(E(x))+(1-\alpha)f(E(y))-\operatorname{int} D.$$

其中

$$\lim_{\alpha\to 0}\alpha\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)=0.$$

定义 1.8 设 K 是 X 中关于 $\boldsymbol{\eta}: X\times X\times[0,1]\to X$ 的 E- 半不变凸集,$E(\cdot): K\to K$.称向量值映射 $f: K\to Y$ 在 K 上(关于 $\boldsymbol{\eta}$) 是 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 严格半预不变凸的, 如果对任意的 $\forall x,y\in K$, $x\neq y$, $\forall \alpha\in(0,1)$, $\forall \lambda\in(0,1)$, 有

$$f(E(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)) \in \alpha f(E(x))+(1-\alpha)f(E(y))-\operatorname{int} D,$$

其中

$$\lim_{\alpha\to 0}\alpha\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)=0.$$

注 1 显然,当 $\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)=\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda)$(即 $E(x)=x$)时,D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸映射就退化为 D-$\boldsymbol{\eta}$- 半预不变凸映射[15],即 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸映射是 D-$\boldsymbol{\eta}$- 半预不变凸映射的真推广.

注 2 当 $\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)=\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y))$ 且 $f: K\to\mathbf{R}$ 时, D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸映射退化为 E- 预不变凸函数[14],显然 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸映射是 E- 预不变凸函数(映射) 的真推广.

下面通过例子来说明 E- 半不变凸集的存在性.

例 1 设 $K=[-2,2]\subset\mathbf{R}$,

$$\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda)=\begin{cases}0, & x=-y,\\ x-y+\lambda, & \text{other}.\end{cases} \qquad E(x)=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant 1,\\ -1, & \text{other}.\end{cases}$$

根据定义 1.5,易知 K 是 X 中(关于 η) 的 E- 半不变凸集.

下面通过例 2 来说明向量值 D-η-E- 半预不变凸映射是大量存在的.

例 2 令 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$, $\boldsymbol{f}(x)=(f_1(x), f_2(x))$, 其中

$$f_1(x)=-3|x|,\ f_2(x)=-6|x|,$$

$$E(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ 2x, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda)=\begin{cases}x-y+\lambda, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\\ x-y-\lambda, & x\leqslant 0,\ y\leqslant 0;\\ y-x+\lambda, & x\leqslant 0,\ y\geqslant 0;\\ y-x-\lambda, & x\geqslant 0,\ y\leqslant 0.\end{cases}$$

容易验证 $K=R$ 是(关于 η) 的 E- 半不变凸集,且根据定义 1.6 容易验证 $\boldsymbol{f}$ 是 K 上的 D-η-E- 半预不变凸映射.

下面用例 3 说明定义 1.7 所定义向量 D-η-E- 半严格半预不变凸映射可能既不是关于同一 η 的 D-η-E- 半预不变凸映射也不是关于同一 η 的 D-η-E- 严格半预不变凸映射.

例 3 令 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$,$\boldsymbol{f}(x)=(f_1(x), f_2(x))$, 其中

$$f_1(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}|x|, & |x|\leqslant 1;\\ -\dfrac{1}{2}, & |x|\geqslant 1,\end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases}-3|x|, & |x|\leqslant 1;\\ -3, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$$

$$E(x)=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 0,\\ 2x-3, & x<0,\end{cases}$$

$$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases} x-y+\lambda, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\\ x-y-\lambda, & x\leqslant 0,\ y\leqslant 0;\\ x-y+\lambda, & x>1,\ y<-1;\\ x-y-\lambda, & x<-1,\ y>1;\\ y-x+\lambda, & -1\leqslant x\leqslant 0,\ y\geqslant 0;\\ y-x-\lambda, & -1\leqslant y\leqslant 0,\ x\geqslant 0;\\ y-x-\lambda, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ y\leqslant 0;\\ y-x+\lambda, & 0\leqslant y\leqslant 1,\ x\leqslant 0. \end{cases}$$

容易验证 $K=R$ 是一个 E- 半不变凸集,由定义 1.7 不难验证 f 是 K 上的 D-η-E- 半严格半预不变凸映射.然而,当取 $x=7, y=-3/2, \alpha=1/2, \lambda=1/2$ 时, 有

$$f(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y),\lambda))=f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{1}{8},\ -\frac{3}{4}\right),$$

$$f(E(x))=f(6)=\left(-\frac{1}{2},\ -3\right)=f(E(y))=f(-6).$$

即有

$$f(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y),\lambda))\notin\alpha f(E(x))+(1-\alpha)f(E(y))-D,$$

及

$$f(E(y)+\alpha\eta(E(x),E(y),\lambda))\notin\alpha f(E(x))+(1-\alpha)f(E(y))-\operatorname{int}D.$$

据定义 1.6 与定义 1.8, f 在 K 上既不是 D-η-E- 半预不变凸映射也不是 D-η-E- 严格半预不变凸映射.

注 3　由例 2 可知向量 D-η-E- 半预不变凸映射是大量存在的, 由例 3 可以发现 D-η-E- 半预不变凸映射与 D-η-E- 半严格半预不变凸映射是不相同的.

定义 1.9[13]　称向量值映射 $f:K\to Y$ 是 $*$- 上半连续的,如果对任意的 $q\in D^*$, $q(f)(\cdot)$ 在 K 上是上半连续的.

定义 1.10[13]　称向量值映射 $f:K\to Y$ 是 $*$- 下半连续的,如果对任意的 $q\in D^*$, $q(f)(\cdot)=\langle q,f(\cdot)\rangle$ 在 K 上是下半连续的.

2　向量 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸映射的判定

在文献[15]中,作者引入了如下的条件 B.

条件 B[15]　称向量值映射 $\boldsymbol{\eta}:K\times K\times[0,1]\to K$ 满足条件 B,若对 $\forall x,y\in K$,任意的 $\alpha\in[0,1]$, $\lambda\in[0,1]$, 有

$$\begin{cases} (\mathrm{B}_1) & \boldsymbol{\eta}(y,y+\alpha\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda),\lambda)=-\alpha\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda),\\ (\mathrm{B}_2) & \boldsymbol{\eta}(x,y+\alpha\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda),\lambda)=(1-\alpha)\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda). \end{cases}$$

在本节,为了研究向量值 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸性的需要, 引入一个新的假设——条件 H.

条件 H　称向量值映射 $\boldsymbol{\eta}:K\times K\times[0,1]\to K$ 满足条件 H, $E(\cdot):K\to K$,若对任意的 x, $y\in K$,任意的 $\alpha\in[0,1]$, $\lambda\in[0,1]$, 有

$$\begin{cases} (\mathrm{H}_1) & \boldsymbol{\eta}(E(y),E(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),\lambda)=-\alpha\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),\\ (\mathrm{H}_2) & \boldsymbol{\eta}(E(x),E(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),\lambda)=(1-\alpha)\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda). \end{cases}$$

注 4　如果映射 $E(\cdot):K\to K$ 为满射,且向量值映射 $\boldsymbol{\eta}$ 满足条件 H,则向量值映射 $\boldsymbol{\eta}$ 满足条件 B.

下面用例 4 说明满足条件 H 的向量值映射 $\boldsymbol{\eta}$ 是大量存在的.

例 4 令 $K = R$,

$$E(x)=\begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ 2x-1, & x < 0. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda)=\begin{cases} x-y, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ x-y, & x < 0,\ y < 0, \\ -\dfrac{1}{2}-y, & x \geqslant 1,\ y < 0, \\ \dfrac{1}{2}-y, & x < 0,\ y \geqslant 0, \\ -\dfrac{1}{2}-y-2\lambda, & x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

根据以上定义,可以验证向量值映射 $\boldsymbol{\eta}$ 是满足条件 H 的.

引理 2.1 设 K 是 X 中关于 $\boldsymbol{\eta}: X \times X \times [0,1] \to X$ 的 E- 半不变凸集,其中 $\boldsymbol{\eta}$ 满足条件 H,映射 $E(\cdot): K \to K$ 为满射,若 $f: K \to Y$ 满足:对 $\forall x,y \in K,\lambda \in [0,1]$ 有 $f(E(y)+\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)) \in f(E(x)) - D$ 且对 $\forall x,y \in K,\lambda \in [0,1]$,存在 $\alpha \in (0,1)$, 使得

$$f(E(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)) \in \alpha f(E(x)) + (1-\alpha)f(E(y)) - D,$$

则集合

$$A = \{\gamma \in [0,1] \mid f(E(y)+\gamma\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)) \in \gamma f(E(x)) + (1-\gamma)f(E(y)) - D\}$$

在区间 $[0,1]$ 中稠密.

证明 由 $f(E(y)) \in f(E(y)) - D$ 及条件 $f(E(y)+\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)) \in f(E(x)) - D$ 可知, $0,1 \in A$.下用反证法证之.反设 A 在区间 $[0,1]$ 中不稠密,则存在 $\gamma_0 \in (0,1)$ 和 γ_0 的邻域 $N(\gamma_0)$ 使得 $N(\gamma_0) \cap A = \varnothing$.定义 $\gamma_1 = \inf\{\gamma \in A \mid \gamma \geqslant \gamma_0\}$, $\gamma_2 = \sup\{\gamma \in A \mid \gamma \leqslant \gamma_0\}$,则有 $0 \leqslant \gamma_2 < \gamma_1 \leqslant 1$.因为 $\{\alpha,(1-\alpha)\} \subset (0,1)$,所以可选择 $v_1,v_2 \in A$ 满足 $v_1 \geqslant \gamma_1$, $v_2 \leqslant \gamma_2$ 使得 $\max\{\alpha,(1-\alpha)\}(v_1-v_2) < \gamma_1-\gamma_2$.于是 $v_2 \leqslant \gamma_2 < \gamma_1 \leqslant v_1$.令 $\bar{\gamma} = \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2$,由条件 H,以及映射 $E(\cdot): K \to K$ 为满射,有

$$\begin{aligned}
&E(y)+v_2\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)+\alpha\boldsymbol{\eta}(E(y)+ \\
&\quad v_1\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),E(y)+v_2\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),\lambda)= \\
&\quad E(y)+v_2\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)+ \\
&\quad \alpha\boldsymbol{\eta}(E(y)+v_1\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),E(y)+v_1\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)- \\
&\quad (v_1-v_2)\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),\lambda)= \\
&\quad E(y)+v_2\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)+ \\
&\quad \alpha\boldsymbol{\eta}\Big(E(y)+v_1\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),E(y)+v_1\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)+ \\
&\quad \frac{v_1-v_2}{v_1}\boldsymbol{\eta}(E(y),E(y)+v_1\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),\lambda),\lambda\Big)= \\
&\quad E(y)+v_2\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)- \\
&\quad \alpha\frac{v_1-v_2}{v_1}\boldsymbol{\eta}(E(y),E(y)+v_1\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),\lambda)=
\end{aligned}$$

$$E(y)+(v_2+\alpha(v_1-v_2))\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)=$$
$$E(y)+\bar{\gamma}\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda).$$

于是有

$$\begin{aligned}&f(E(y)+\bar{\gamma}\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))=\\&\quad f(E(y)+v_2\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)+\\&\quad \alpha\boldsymbol{\eta}(E(y)+v_1\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),E(y)+v_2\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),\lambda))\in\\&\quad \alpha f(E(y)+v_1\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))+\\&\quad (1-\alpha)f(E(y)+v_2\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))-D\subset\\&\quad \alpha[v_1f(E(x))+(1-v_1)f(E(y))-D]+\\&\quad (1-\alpha)[v_2f(E(x))+(1-v_2)f(E(y))-D]-D=\\&\quad [\alpha v_1+(1-\alpha)v_2]f(E(x))+\{1-[\alpha v_1+(1-\alpha)v_2]\}f(E(y))-D-D\subset\\&\quad \bar{\gamma}f(E(x))+(1-\bar{\gamma})f(E(y))-D,\end{aligned}$$

即有 $\bar{\gamma}\in A$.

如果 $\bar{\gamma}\geqslant\gamma_0$,则 $\bar{\gamma}-v_2=\alpha(v_1-v_2)<\gamma_1-\gamma_2$.从而 $\bar{\gamma}<\gamma_1$.因为 $\bar{\gamma}\geqslant\gamma_0$ 和 $\bar{\gamma}\in A$,这与 γ_1 的定义矛盾.

如果 $\bar{\gamma}\leqslant\gamma_0$,则 $\bar{\gamma}-v_1=(1-\alpha)(v_1-v_2)>\gamma_2-\gamma_1$.所以 $\bar{\gamma}>\gamma_2$.由于 $\bar{\gamma}\leqslant\gamma_0$ 和 $\bar{\gamma}\in A$,这与 γ_2 的定义矛盾.

引理 2.2[13]　$\forall q\in D^*,q(d)\geqslant 0\Leftrightarrow d\in D$.

定理 2.1　设 K 是 X 中关于 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to X$ 的开 E-半不变凸集,其中映射 $\boldsymbol{\eta}$ 满足条件 H,映射 $E(\cdot):K\to K$ 为满射.若 $f:K\to Y$ 是 $*$-上半连续的且满足对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,有 $f(E(y)+\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))\in f(E(x))-D$, 则 f 在 K 上是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 D-$\boldsymbol{\eta}$-E-半预不变凸映射的充要条件为对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得:

$$f(E(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))\in\alpha f(E(x))+(1-\alpha)f(E(y))-D.$$

证明　由 D-$\boldsymbol{\eta}$-E-半预不变凸性的定义可知此命题必要性显然成立.下证充分性.

假设 f 不是 D-$\boldsymbol{\eta}$-E-半预不变凸映射, 则存在 $x,y\in K,\bar{\alpha}\in(0,1)$ 使得

$$f(E(y)+\bar{\alpha}\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))\notin\bar{\alpha}f(E(x))+(1-\bar{\alpha})f(E(y))-D.\tag{1}$$

存在 $z\in K$,使得 $E(z)=E(y)+\bar{\alpha}\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)$,由引理 2.1 可知存在序列 $\{\alpha_n\}$ 满足 $\alpha_n\in A$ 且 $\alpha_n<\bar{\alpha}$ 使得 $\alpha_n\to\bar{\alpha}(n\to\infty)$.定义

$$E(y_n)=E(y)+\left(\frac{\bar{\alpha}-\alpha_n}{1-\alpha_n}\right)\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),$$

则 $E(y_n)\to E(y)(n\to\infty)$.注意 K 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的开 E-半不变凸集, 所以当 n 充分大时,有 $E(y_n)\in K$, 而且由条件 H, 有

$$\begin{aligned}&E(y_n)+\alpha_n\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y_n),\lambda)=\\&\quad E(y)+\left(\frac{\bar{\alpha}-\alpha_n}{1-\alpha_n}\right)\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)+\\&\quad \alpha_n\boldsymbol{\eta}\left(E(x),E(y)+\left(\frac{\bar{\alpha}-\alpha_n}{1-\alpha_n}\right)\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda),\lambda\right)=\\&\quad E(y)+\bar{\alpha}\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)=E(z).\end{aligned}$$

由于 $\alpha_n\in A$, 则有

$$f(E(z))=f(E(y)+\bar{\alpha}\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))=$$
$$f(E(y_n)+\alpha_n\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y_n),\boldsymbol{\lambda}))\in\alpha_n f(E(x))+(1-\alpha_n)f(E(y_n))-D.$$

据 f 在 K 上的 $*$- 上半连续性,可得对每一个 $q\in D^*$,$q(f)(\cdot)$ 是上半连续的.因此,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$ 使得

$$q(f)(E(y_n))\leqslant q(f)(E(y))+\varepsilon,\qquad \forall n>N.$$

于是

$$q(f)(E(z))\leqslant\alpha_n q(f)(E(x))+(1-\alpha_n)q(f)(E(y_n))\leqslant$$
$$\alpha_n q(f)(E(x))+(1-\alpha_n)[q(f)(E(y))+\varepsilon]\to$$
$$\bar{\alpha}q(f)(E(x))+(1-\bar{\alpha})[q(f)(E(y))+\varepsilon]\qquad(n\to\infty).$$

由于 $\varepsilon>0$ 可充分小,则对所有的 $q\in D^*$, 有

$$q(f)(E(z))\leqslant\bar{\alpha}q(f)(E(x))+(1-\bar{\alpha})q(f)(E(y)).$$

由 q 的线性性及引理 2.2, 可知

$$f(E(z))\in\bar{\alpha}f(E(x))+(1-\bar{\alpha})f(E(y))-D.\tag{2}$$

这与式(1)矛盾.结论得证.

注 5 当映射 $E(\cdot)$ 退化为 $E(x)=x$ 时,定理 2.1 就退化为文献[15]中 D-$\boldsymbol{\eta}$- 半预不变凸映射的判定定理;当 $\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda)=\boldsymbol{\eta}(x,y)$ 且 $f:K\to\mathbf{R}$(退化为实值情形)时, 则定理 2.1 就退化为文献[4-5]中关于预不变凸性的判定结果.

定理 2.2 设 K 是 X 中关于 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to X$ 的 E- 半不变凸集,其中映射 $\boldsymbol{\eta}$ 满足条件 H,映射 $E(\cdot):K\to K$ 为满射.若 $f:K\to Y$ 是 $*$- 下半连续的且满足:对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,有 $f(E(y)+\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))\in f(E(x))-D$, 则 f 在 K 上是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸映射的充要条件为对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得

$$f(E(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))\in\alpha f(E(x))+(1-\alpha)f(E(y))-D.$$

证明 由 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸性的定义可知命题必要性显然成立.下证充分性.

由假设以及引理 2.1 可知,集合

$$A=\{\gamma\in[0,1]\,|\,f(E(y)+\gamma\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))\in$$
$$\gamma f(E(x))+(1-\gamma)f(E(y))-D\}$$

在区间[0,1]中稠密.即有 $\bar{A}\supset[0,1]$.由 $f(E(y))\in f(E(y))-D$ 及条件

$$f(E(y)+\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))\in f(E(x))-D$$

可知, $0,1\in A$.于是对 $\bar{\alpha}\in(0,1)$, $\exists\{\alpha_n\}\subset A$,使得 $\alpha_n\to\bar{\alpha}(n\to\infty)$, 于是有

$$f(E(y)+\alpha_n\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))\in\alpha_n f(E(x))+(1-\alpha_n)f(E(y))-D.$$

对 $\forall q\in D^*$,以及 q 的线性性质有

$$q(f)(E(y)+\alpha_n\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))\leqslant$$
$$\alpha_n q(f)(E(x))+(1-\alpha_n)q(f)(E(y)).$$

又由于 $f:K\to Y$ 是 $*$- 下半连续的,即对每一个 $q\in D^*$,$q(f)(\cdot)$ 是下半连续的,从而

$$q(f)(E(y)+\bar{\alpha}\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))\leqslant$$
$$\underline{\lim}_{n\to\infty}q(f)(E(y)+\alpha_n\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))\leqslant$$
$$\overline{\lim}_{n\to\infty}q(f)(E(y)+\alpha_n\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))\leqslant$$
$$\lim_{n\to\infty}[\alpha_n q(f)E(x)+(1-\alpha_n)q(f)(E(y))]=$$

$$\bar{\alpha}q(f)E(x)+(1-\bar{\alpha})q(f)E(y).$$

故有

$$f(E(y)+\bar{\alpha}\boldsymbol{\eta}(E(x),E(y),\lambda))\in \bar{\alpha}q(f)E(x)+(1-\bar{\alpha})q(f)(E(y))-D.$$

于是,f 在 K 上是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 D-$\boldsymbol{\eta}$-E- 半预不变凸映射.

3　向量 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半预不变凸性映射之间的关系

本节将对 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半预不变凸映射与 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 严格半预不变凸映射、D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半严格半预不变凸映射的几类关系进行讨论.

定理 3.1　设 K 是 X 上关于 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to X$ 的非空 $\boldsymbol{E}$- 半不变凸集, 其中 $\boldsymbol{\eta}$ 满足条件 H,映射 $\boldsymbol{E}(\cdot):K\to K$ 为满射.假设 $f:K\to Y$ 是 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半预不变凸映射, 对 $\forall x,y\in K,x\neq y,\forall\lambda\in(0,1),\exists\alpha\in(0,1)$, 使得

$$f(\boldsymbol{E}(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda))\in\alpha f(\boldsymbol{E}(x))+(1-\alpha)f(\boldsymbol{E}(y))-\operatorname{int}D,$$

则 f 在 K 上是 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 严格半预不变凸映射.

证明　假设 f 不是 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 严格半预不变凸映射,则 $\exists x,y\in K(x\neq y),\lambda\in(0,1)$,对 $\forall\gamma\in(0,1)$ 有

$$f(\boldsymbol{E}(y)+\gamma\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda))\notin\gamma f(\boldsymbol{E}(x))+(1-\gamma)f(\boldsymbol{E}(y))-\operatorname{int}D.$$

选取 β_1,β_2 满足 $0<\beta_1<\beta_2<1$ 使得 $\gamma=\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2$.

因为映射 $\boldsymbol{E}(\cdot):K\to K$ 为满射,于是存在 $\bar{x},\bar{y}\in K$, 使得

$$\boldsymbol{E}(\bar{x})=\boldsymbol{E}(y)+\beta_1\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda),$$
$$\boldsymbol{E}(\bar{y})=\boldsymbol{E}(y)+\beta_2\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda).$$

因为 f 是 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半预不变凸的, 则有

$$\begin{cases}f(\boldsymbol{E}(\bar{x}))\in\beta_1 f(\boldsymbol{E}(x))+(1-\beta_1)f(\boldsymbol{E}(y))-D,\\ f(\boldsymbol{E}(\bar{y}))\in\beta_2 f(\boldsymbol{E}(x))+(1-\beta_2)f(\boldsymbol{E}(y))-D.\end{cases}\tag{3}$$

由条件 H,以及映射 $\boldsymbol{E}(\cdot):K\to K$ 为满射,可知

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(\bar{y})+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(\bar{x}),\boldsymbol{E}(\bar{y}),\lambda)=\\&\quad\boldsymbol{E}(y)+\beta_2\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda)+\\&\quad\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(y)+\beta_1\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda),\boldsymbol{E}(y)+\beta_1\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda)+\\&\quad(\beta_2-\beta_1)\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda),\lambda)=\\&\quad\boldsymbol{E}(y)+\beta_2\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda)+\\&\quad\alpha\boldsymbol{\eta}\Big(\boldsymbol{E}(y)+\beta_1\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda),\boldsymbol{E}(y)+\beta_1\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda)+\\&\quad\frac{\beta_2-\beta_1}{1-\beta_1}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y)+\beta_1\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda),\lambda),\lambda\Big)=\\&\quad\boldsymbol{E}(y)+\beta_2\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda)-\\&\quad\alpha\frac{\beta_2-\beta_1}{1-\beta_1}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y)+\beta_1\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda),\lambda)=\\&\quad\boldsymbol{E}(y)+(\beta_2-\alpha(\beta_2-\beta_1))\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda)=\\&\quad\boldsymbol{E}(y)+\gamma\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda).\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{E}(\bar{y})+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(\bar{x}),\boldsymbol{E}(\bar{y}),\lambda)=\boldsymbol{E}(y)+\gamma\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda).$$

根据假设有

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{E}(y)+\gamma\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda))=\\&\quad f(\boldsymbol{E}(\bar{y})+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(\bar{x}),\boldsymbol{E}(\bar{y}),\lambda))\in\\&\quad \alpha f(\boldsymbol{E}(\bar{x}))+(1-\alpha)f(\boldsymbol{E}(\bar{y}))-\operatorname{int}D.\end{aligned}\tag{4}$$

于是由式(3)、(4)可得

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{E}(y)+\gamma\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda))\in\\&\quad\alpha[\beta_1 f(\boldsymbol{E}(x))+(1-\beta_1)f(\boldsymbol{E}(y))-D]+\\&\quad(1-\alpha)[\beta_2 f(\boldsymbol{E}(x))+(1-\beta_2)f(\boldsymbol{E}(y))-D]-\operatorname{int}D\subset\\&\quad(\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2)f(\boldsymbol{E}(x))+(1-\alpha\beta_1-(1-\alpha)\beta_2)f(\boldsymbol{E}(y))-\operatorname{int}D=\\&\quad\gamma f(\boldsymbol{E}(x))+(1-\gamma)f(\boldsymbol{E}(y))-\operatorname{int}D.\end{aligned}$$

这与假设矛盾,所以 f 在 K 上是 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 严格半预不变凸映射.

注 6 定理 3.1 分别将文献[15]、[13]中关于 D-$\boldsymbol{\eta}$- 半预不变凸、D-$\boldsymbol{\eta}$- 预不变凸映射情形推广到 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半预不变凸情形,且去掉了文献[13] 中定理 5.3.1 所必需的 $f(y+\boldsymbol{\eta}(x,y))\in f(x)-D(\forall x,y\in K)$ 类型假设.

定理 3.2 设 K 是 X 中关于 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\to X$ 的非空 $\boldsymbol{E}$- 半不变凸集, 其中 $\boldsymbol{\eta}$ 满足条件 H,映射 $\boldsymbol{E}(\cdot):K\to K$ 为满射.$f:K\to Y$ 是 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半预不变凸映射,若对 $\forall x,y\in K,f(\boldsymbol{E}(x))\neq f(\boldsymbol{E}(y)),\forall\lambda\in(0,1),\exists\alpha\in(0,1)$, 使得

$$f(\boldsymbol{E}(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda))\in\alpha f(\boldsymbol{E}(x))+(1-\alpha)f(\boldsymbol{E}(y))-\operatorname{int}D.\tag{5}$$

则 f 是 K 上的 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半严格半预不变凸映射.

证明 由 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半预不变凸性假设,对 $\forall x,y\in K,f(\boldsymbol{E}(x))\neq f(\boldsymbol{E}(y)),\forall\lambda\in(0,1)$ 和 $\forall\gamma\in(0,1)$, 有

$$f(\boldsymbol{E}(y)+\gamma\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda))\in\gamma f(\boldsymbol{E}(x))+(1-\gamma)f(\boldsymbol{E}(y))-D.\tag{6}$$

(Ⅰ) 若 $\gamma\leqslant\alpha$, 则由条件 H,映射 $\boldsymbol{E}(\cdot):K\to K$ 为满射,有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(y)+\frac{\gamma}{\alpha}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda),\boldsymbol{E}(y),\lambda)=\\&\quad\boldsymbol{E}(y)+\frac{\gamma}{\alpha}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda),\boldsymbol{E}(y)+\\&\quad\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda)-\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda),\lambda)=\\&\quad\boldsymbol{E}(y)+\frac{\gamma}{\alpha}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda),\boldsymbol{E}(y)+\\&\quad\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda)+\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(y),\boldsymbol{E}(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda),\lambda),\lambda)=\\&\quad\boldsymbol{E}(y)-\frac{\gamma}{\alpha}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(y),\boldsymbol{E}(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda),\lambda)=\\&\quad\boldsymbol{E}(y)+\gamma\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda).\end{aligned}$$

由式(5)、(6)及 f 的 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半预不变凸性, 可得

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{E}(y)+\gamma\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda))=\\&\quad f\left(\boldsymbol{E}(y)+\frac{\gamma}{\alpha}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda),\boldsymbol{E}(y),\lambda)\right)\in\\&\quad\frac{\gamma}{\alpha}f(\boldsymbol{E}(y)+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda))+\left(1-\frac{\gamma}{\alpha}\right)f(\boldsymbol{E}(y))-D\subset\end{aligned}$$

$$\frac{\gamma}{\alpha}[\alpha f(\boldsymbol{E}(x)) + (1-\alpha)f(\boldsymbol{E}(y)) - \operatorname{int} D] + \left(1-\frac{\gamma}{\alpha}\right)f(\boldsymbol{E}(y)) - D \subset$$
$$\gamma f(\boldsymbol{E}(x)) + (1-\gamma)f(\boldsymbol{E}(y)) - \operatorname{int} D.$$

(Ⅱ) 若 $\gamma > \alpha$，即有 $0 < (1-\gamma)/(1-\alpha) < 1$. 由条件 H，映射 $\boldsymbol{E}(\cdot): K \to K$ 为满射，得

$$\boldsymbol{E}(y) + \alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda) + \left(1-\frac{1-\gamma}{1-\alpha}\right)\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y) + \alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda),\lambda) = \boldsymbol{E}(y) + \gamma\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda).$$

根据式(5)、(6)及 f 的 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半预不变凸性可得

$$f(\boldsymbol{E}(y) + \gamma\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda)) =$$
$$f\left(\boldsymbol{E}(y) + \alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda) + \left(1-\frac{1-\gamma}{1-\alpha}\right)\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y) + \alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda),\lambda)\right) \in$$
$$\frac{1-\gamma}{1-\alpha}f(\boldsymbol{E}(y) + \alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda)) + \left(1-\frac{1-\gamma}{1-\alpha}\right)f(\boldsymbol{E}(x)) - D \subset$$
$$\frac{1-\gamma}{1-\alpha}[\alpha f(\boldsymbol{E}(x)) + (1-\alpha)f(\boldsymbol{E}(y)) - \operatorname{int} D] + \left(1-\frac{1-\gamma}{1-\alpha}\right)f(\boldsymbol{E}(x)) - D \subset$$
$$\gamma f(\boldsymbol{E}(x)) + (1-\gamma)f(\boldsymbol{E}(y)) - \operatorname{int} D.$$

综上可得 f 是 K 上的 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半严格半预不变凸映射.

注 7　当 $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda) = \boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda)$（或 $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{E}(y),\lambda) = \boldsymbol{\eta}(x,y)$）时，$D$-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半预不变凸映射就退化为 D-$\boldsymbol{\eta}$- 半预不变凸映射（或 D-$\boldsymbol{\eta}$- 预不变凸映射）. 显然，上述结果推广了文献[10,15]中的相应结果.

4　向量 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半预不变凸性在向量优化中的应用

考虑如下的隐约束向量优化问题：

$$(\mathrm{VP})\ \min_{x\in K} \boldsymbol{f}(x).$$

首先给出向量优化中关于解的一个基本定义.

定义 4.1　令 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}(K)) = \cup_{x\in K}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}(x))$，$\boldsymbol{E}(\cdot): K \to K$.

(i) 称点 $\bar{x} \in K$ 是(VP)的 $\boldsymbol{E}$- 全局有效解，如果 $(f(\boldsymbol{E}(\bar{x})) - D\backslash\{0_Y\}) \cap f(\boldsymbol{E}(K)) = \varnothing$. 称点 $\bar{x} \in K$ 是(VP)的 $\boldsymbol{E}$- 局部有效解，如果存在 $\bar{x}$ 的邻域 U 使得

$$(f(\boldsymbol{E}(\bar{x})) - D\backslash\{0_Y\}) \cap f(\boldsymbol{E}(K\cap U)) = \varnothing.$$

(ii) 称 $\bar{x}$ 为(VP)的 $\boldsymbol{E}$- 全局弱有效解，如果 $\bar{x} \in K$ 且 $(f(\boldsymbol{E}(\bar{x})) - \operatorname{int} D) \cap f(\boldsymbol{E}(K)) = \varnothing$. 称 $\bar{x}$ 为(VP)的 $\boldsymbol{E}$- 局部弱有效解，如果存在 $\bar{x} \in K$ 且存在邻域 $U \subset X$，使得 $\bar{x} \in U$ 满足

$$(f(\boldsymbol{E}(\bar{x})) - \operatorname{int} D) \cap f(\boldsymbol{E}(K\cap U)) = \varnothing.$$

下面给出向量 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半预不变凸型映射在向量优化中的一个重要应用.

定理 4.1　设 K 是 X 中关于 $\boldsymbol{\eta}: X\times X\times[0,1] \to X$ 的 $\boldsymbol{E}$- 半不变凸集，$\boldsymbol{E}(\cdot): K \to K$. $f: K \to Y$ 是一向量值映射. 若 f 是 K 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半严格半预不变凸映射，则向量优化问题(VP)的 $\boldsymbol{E}$- 局部有效解也一定是(VP)的 $\boldsymbol{E}$- 全局有效解.

证明　若 $\bar{x}$ 是(VP)的 $\boldsymbol{E}$- 局部有效解，则存在 $\bar{x}$ 的邻域 U 使得

$$(f(\boldsymbol{E}(\bar{x})) - D\backslash\{0_Y\}) \cap f(\boldsymbol{E}(K\cap U)) = \varnothing. \tag{7}$$

反设 $\bar{x}$ 不是(VP)的 $\boldsymbol{E}$- 全局有效解，即$(f(\boldsymbol{E}(\bar{x}))-D\backslash\{0_Y\})\cap f(\boldsymbol{E}(K))\neq\varnothing$.则存在$x_0\in K$满足$f(\boldsymbol{E}(x_0))\in f(\boldsymbol{E}(\bar{x}))-D/\{0_Y\}$.由于 K 是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 $\boldsymbol{E}$- 半不变凸集且 $f:K\rightarrow Y$ 是 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半严格半预不变凸映射，则对 $\forall\alpha\in(0,1),\lambda\in(0,1)$，有$\boldsymbol{E}(\bar{x})+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x_0),\boldsymbol{E}(\bar{x}),\lambda)\in K$，且

$$
\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{E}(\bar{x})+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x_0),\boldsymbol{E}(\bar{x}),\lambda))\in\\
&\quad\alpha f(\boldsymbol{E}(x_0))+(1-\alpha)f(\boldsymbol{E}(\bar{x}))-\operatorname{int}D\subset\\
&\quad\alpha(f(\boldsymbol{E}(\bar{x}))-D\backslash\{0_Y\})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{E}(\bar{x}))-\operatorname{int}D\subset\\
&\quad f(\boldsymbol{E}(\bar{x}))-D\backslash\{0_Y\}.
\end{aligned}
$$

即，对 $\forall\alpha\in(0,1)$，$\forall\lambda\in(0,1)$，有

$$
f(\boldsymbol{E}(\bar{x})+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x_0),\boldsymbol{E}(\bar{x}),\lambda))\in f(\boldsymbol{E}(\bar{x}))-D\backslash\{0_Y\}. \tag{8}
$$

$\lim_{\alpha\to0}(\boldsymbol{E}(\bar{x})+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x_0),\boldsymbol{E}(\bar{x}),\lambda))=\boldsymbol{E}(\bar{x})$.因此存在$\delta(1>\delta>0)$对所有的$\alpha\in(0,\delta)$满足$\boldsymbol{E}(\bar{x})+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x_0),\boldsymbol{E}(\bar{x}),\lambda)\in\boldsymbol{E}(U\cap K)$.即$f(\boldsymbol{E}(\bar{x})+\alpha\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{E}(x_0),\boldsymbol{E}(\bar{x}),\lambda))\in f(\boldsymbol{E}(U\cap K))$.则式(7)与式(8)矛盾，因此 $\bar{x}$ 是优化问题(VP)的 $\boldsymbol{E}$- 全局有效解.结论成立.

下面通过例 5 来验证最优性结论——定理 4.1 的正确性.

例 5 令 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant0,y\geqslant0\}$，$\boldsymbol{f}(x)=(f_1(x),f_2(x))$.其中

$$
\boldsymbol{E}(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ \dfrac{1}{3}x, & x\leqslant0.\end{cases}
$$

$$
f_1(x)=\begin{cases}-|x|/2, & |x|\leqslant1;\\ -1/2, & |x|\geqslant1.\end{cases}\quad f_2(x)=\begin{cases}-2|x|, & |x|\leqslant1;\\ -2, & |x|\geqslant1.\end{cases}
$$

$$
\boldsymbol{\eta}(x,y,\lambda)=\begin{cases}
x-y+\lambda, & x\geqslant0,\ y\geqslant0,\\
3x-y-\lambda, & x\leqslant0,\ y\leqslant0,\\
x-y+\lambda, & x>1,\ y<-1,\\
x-y-\lambda, & x<-1,\ y>1,\\
y-3x+\lambda, & -1\leqslant x\leqslant0,\ y\geqslant0,\\
y-x-\lambda, & -1\leqslant y\leqslant0,\ x\geqslant0,\\
y-x-\lambda, & 0\leqslant x\leqslant1,\ y\leqslant0,\\
y-3x+\lambda, & 0\leqslant y\leqslant1,\ x\leqslant0.
\end{cases}
$$

由定义 1.7，易验证 f 是 $K=R$ 上的 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半严格半预不变凸映射.据 $\boldsymbol{E}$- 局部 / 全局有效解的定义亦可验证 $\bar{x}=1$ 是优化问题(VP)的一个 $\boldsymbol{E}$- 局部有效解，也是(VP)的 $\boldsymbol{E}$- 全局有效解，故定理 4.1 可行.

利用类似的方法，可以获得如下关于优化问题(VP)的 $\boldsymbol{E}$- 全局弱有效解的充分性条件.

推论 4.2 设 K 是 X 中关于 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\times[0,1]\rightarrow X$ 的 $\boldsymbol{E}$- 半不变凸集，$\boldsymbol{E}(\cdot):K\rightarrow K$. $f:K\rightarrow Y$ 是一向量值映射，若 f 是 K 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半严格半预不变凸映射，则向量优化问题(VP)的 E- 局部弱有效解也一定是(VP)的 E- 全局弱有效解.

5 结　　语

本文提出了向量 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半预不变凸映射，说明其存在性，给出了此类映射的判定及关系刻画，并讨论其在隐约束优化问题中的应用，所得结果推广了文献[10,12-15]中相应结果.那

么能否借助 D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- 半预不变凸映射深入研究(显／隐)约束向量优化问题的对偶刻画及解的最优性条件？这将是有趣的研究课题！

致谢　感谢重庆交通大学科研启动基金、重庆交通大学创新训练项目对本文的的资助.

参考文献(References)：

[1] Hanson M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1981, **80**(2): 545-550.

[2] Ben-Israel A, Mond B. What is invexity? [J]. *The Journal of the Australian Mathematical Society*, 1986, **28**(1): 1-9.

[3] Weir T, Jeyakumar V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J]. *Bulletin of Australian Mathematical Society*, 1998, **38**(2): 177-189.

[4] YANG Xin-min, LI Duan. On properties of preinvex functions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, **256**(1): 229-241.

[5] YANG Xin-min, LI Duan. Semistrictly preinvex functions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, **258**(1): 287-308.

[6] Yang X Q, Chen G Y. A class of nonconvex functions and pre-variational inequalities[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1992, **169**(2): 359-373.

[7] Peng Z Y, Chang S S. Some properties of semi-G-preinvex functions[J]. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2013, **17**(3): 873-884.

[8] Antczak T. G-pre-invex functions in mathematical programming [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, **217**(1): 212-226.

[9] Kazmi K R. Some remarks on vector optimization problems[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1998, **96**(1): 133-138.

[10] PENG Jian-wen, ZHU Dao-li. On D-preinvex type functions[J]. *Journal of Inequalities and Applications*, 2006, **2006**. Article ID 93532: 1-14 .

[11] Long X J, Peng Z Y, Zeng B. Remark on cone semistrictly preinvex functions[J]. *Optimization Letters*, 2009, **3**(3): 337-345.

[12] 彭建文.向量值映射 D-η- 预不变真拟凸的性质[J]. 系统科学与数学, 2003, **23**(3):306-314. (PENG Jian-wen. Properties of D-η- properly prequasinvex functions[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2003, **23**(3):306-314.(in Chinese))

[13] 彭建文. 广义凸性及其在最优化问题中的应用[D]. 博士学位论文. 呼和浩特: 内蒙古大学理工学院, 2005.(PENG Jian-wen. Generalized convexity with application optimization problems [D]. PhD Thesis. Hohhot:Inner Mongolia University,2005.(in Chinese))

[14] Fulga C, Preda V. Nonlinear programming with E-preinvex and local E-preinvex functions [J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, **192**(3): 737-743.

[15] 彭再云, 王堃颖, 赵勇, 张石生. D-η- 半预不变凸映射的性质及其应用[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(2): 202-211.(PENG Zai-yun, WANG Kun-ying, ZHAO Yong, ZHANG Shi-sheng. Characterizations and applications of D-η- semipreinvex mappings[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(2): 202-211.(in Chinese))

D-$\boldsymbol{\eta}$-E-Semipreinvex Vector Mappings and Vector Optimization

PENG Zai-yun[1], LI Ke-ke[1,2], ZHANG Shi-sheng[3]

(1. *School of Science*, *Chongqing Jiaotong University*, *Chongqing* 400074, *P.R.China*;

2. *College of Mathematics Science*, *Chongqing Normal University*, *Chongqing* 400047, *P.R.China*;

3. *School of Statistics and Mathematics*, *Yunnan University of Finance and Economics*, *Kunming* 650224, *P.R.China*)

(Contributed by ZHANG Shi-sheng, M. AMM Editorial Board)

Abstract: A class of new vector valued generalized convex mappings— D-$\boldsymbol{\eta}$-E- semipreinvex mappings, as a true generalization of the E-preinvex mappings and the D-$\boldsymbol{\eta}$-semipreinvex mappings, were given. First, several examples were presented to show the existence of the E-semi-invex sets and the D-$\boldsymbol{\eta}$-E- semipreinvex mappings. Second, a decision criterion for the D-$\boldsymbol{\eta}$-E-semipreinvex mappings was introduced, and the relationships among the D-$\boldsymbol{\eta}$-E- semipreinvexity, the D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- strict semipreinvexity and the D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- semistrict semipreinvexity were discussed. Finally, an important application of the D-$\boldsymbol{\eta}$-$\boldsymbol{E}$- semistrictly semipreinvexity to vector optimization with implicit constraint was discussed, then some examples were given to prove the main conclusions.

Key words: E-semi-invex set; D-$\boldsymbol{\eta}$-E-semipreinvex mapping; decision criterion; vector optimization; application

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11301571; 11271389)