文章编号:1000-0887(2015)03-0325-07

关于 D- 半预不变凸性的某些新性质*

唐莉萍[1], 杨新民[2]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200444;
2. 重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 400047)

(我刊编委杨新民来稿)

摘要: 研究了锥意义下的半预不变凸性的新性质.首先,对彭再云等的文献(彭再云, 李科科, 唐平, 黄应全. 向量值 D-半预不变真拟凸映射的判定与性质[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2014, **31**(5): 18-25.)中的例 4 进行了修正,使其满足条件 E .然后,给出了条件 E_1 的一个重要性质,并在此基础上结合稠密性结果,分别利用 D- 半严格半预不变真拟凸性和 D- 严格半预不变真拟凸性建立了 D- 半预不变凸性的刻画.最后利用 D- 半预不变真拟凸性给出了 D- 半预不变凸性的刻画.

关 键 词: D- 半预不变凸; D- 半严格半预不变真拟凸; D- 严格半预不变真拟凸; D- 半预不变真拟凸

中图分类号: O221.6　　**文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.03.010

引　言

凸性和广义凸性在数理经济、工程管理和最优化理论中起着非常重要的作用,有关凸性和广义凸性的研究是数学规划中重要的方向之一.Hanson[1] 在 1981 年引入了一类重要的可微广义凸性——不变凸.1988 年 Weir 和 Mond[2], Weir 和 Jeyakumar[3] 将可微的不变凸性推广到了不可微的情形,引入了预不变凸性的概念.为研究不变凸性与预不变凸性间的关系, Mohan 和 Neogy[4] 引入了一个假设条件——条件 C .随后,Yang 和 Li[5] 在条件 C 下建立了预不变凸性的一些刻画.Yang 和 Li[6] 通过引入严格预不变凸和半严格预不变凸性,在条件 C 下讨论了其与预不变凸性间的关系.最近,Yang 等[7] 在条件 C 的一个重要性质[8] 下利用中间点预不变凸性和半严格预拟不变凸性刻画了预不变凸性.另一方面,Yang 和 Chen[9] 提出了半预不变凸性的概念.彭再云等[10] 提出了向量值情形下的 D- 半预不变凸性、D- 半严格半预不变凸性和 D- 严格半预不变凸性的概念,在条件 E 下讨论了这几类广义凸性间的关系.进一步地,彭再云等在文献[11]中提出了 D- 半预不变真拟凸性、D- 半严格半预不变真拟凸性和 D- 严格半预不变真拟凸性的概念.并建立了这 3 类广义凸性间的关系.

* **收稿日期:** 2014-12-09; **修订日期:** 2014-12-24
基金项目: 国家自然科学基金(重点项目)(11431004);国家自然科学基金(11271391)
作者简介: 唐莉萍(1985—),女,四川资中人,博士生(E-mail: tanglipings@163.com);
杨新民(1960—),男,四川泸州人,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: xmyang@cqnu.edu.cn).

受文献[7-8, 10-11]的启发,本文考虑 D- 半预不变凸性的刻画.首先对文献[11]中的例 4 进行了修正,使其满足条件 E;然后给出条件 E_1 的一个重要性质,在此基础上结合稠密性结果,分别利用 D- 半严格半预不变真拟凸性和 D- 严格半预不变真拟凸性建立 D- 半预不变凸性的充要条件;最后利用 D- 半预不变真拟凸性给出了 D- 半预不变凸性的刻画.

1　基本概念

设 X, Y 是 R^n 中的非空子集,D 是 Y 中具有非空内部的点闭凸锥,f:$X \to Y$ 和 η: $X \times X \times [0, 1] \to X$ 均是向量值映射.

定义 1.1[9]　称 X 是关于 η 的半不变凸集,是指 $\forall x, y \in X$, $\forall \alpha \in [0, 1]$, $\forall \lambda \in [0, 1]$,$y + \alpha\eta(x, y, \lambda) \in X$.

下面均假设 X 是关于 η 的半不变凸集.

定义 1.2[10]　称向量值映射 f 在 X 上关于 η 是 D- 半预不变凸的,是指 $\forall x, y \in X$, $\forall \alpha \in [0, 1]$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f(y + \alpha\eta(x, y, \lambda)) \in \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - D$.

定义 1.3[11]　称向量值映射 f 在 X 上关于 η 是 D- 半预不变真拟凸的,是指 $\forall x, y \in X$, $\forall \alpha \in [0, 1]$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f(y + \alpha\eta(x, y, \lambda)) \in f(x) - D$ 或 $f(y + \alpha\eta(x, y, \lambda)) \in f(y) - D$.

定义 1.4[11]　称向量值映射 f 在 X 上关于 η 是 D- 半严格(严格)半预不变真拟凸的,是指 $\forall x, y \in X$, $f(x) \neq f(y)$ $(x \neq y)$, $\forall \alpha \in (0, 1)$, $\forall \lambda \in (0, 1)$,

$$f(y + \alpha\eta(x, y, \lambda)) \in f(x) - \operatorname{int} D \text{ 或 } f(y + \alpha\eta(x, y, \lambda)) \in f(y) - \operatorname{int} D.$$

注 1.1　文献[10]中的 D- 半预不变凸性和文献[11]中的 D- 半严格(严格)半预不变真拟凸性均要求 $\lim_{\alpha \to 0} \alpha\eta(x, y, \lambda) = 0$.但由于条件“$\lim_{\alpha \to 0} \alpha\eta(x, y, \lambda) = 0$”只是在应用中用到,故本文所涉及的广义凸性的概念中均没有这一假设条件.

定义 1.5[11]　称向量值映射 η:$X \times X \times [0, 1] \to X$ 满足条件 E,是指 $\forall x, y \in X$, $\forall \alpha \in [0, 1]$, $\forall \lambda \in [0, 1]$,

(E_1) $\eta(y, y + \alpha\eta(x, y, \lambda), \lambda) = -\alpha\eta(x, y, \lambda)$;

(E_2) $\eta(x, y + \alpha\eta(x, y, \lambda), \lambda) = (1 - \alpha)\eta(x, y, \lambda)$.

下面引理是彭再云等[10]利用中间点处的 D- 半预不变凸性得到了一个稠密性结果.

引理 1.1[10]　设 η:$X \times X \times [0, 1] \to X$ 是满足条件 E 的向量值映射, X 是关于 η 的半不变凸集.如果 f 满足:

(i) $f(y + \eta(x, y, \lambda)) \in f(x) - D$, $\forall x, y \in X$, $\forall \lambda \in [0, 1]$;

(ii) $\exists \alpha \in (0, 1)$, s.t.

$$f(y + \alpha\eta(x, y, \lambda)) \in \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - D, \quad \forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in [0, 1];$$

则集合

$$A = \{\gamma \in [0, 1]: f(y + \gamma\eta(x, y, \lambda)) \in \gamma f(x) + (1 - \gamma)f(y) - D, \quad \forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in [0, 1]\}$$

在区间[0, 1]中稠密.

注 1.2　事实上,引理 1.1 中的条件(ii)放宽为“$\forall x, y \in X$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\exists \alpha \in (0, 1)$, s.t. $f(y + \alpha\eta(x, y, \lambda)) \in \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - D$.”

集合 A 仍稠密于$[0, 1]$区间.其证明同文献[10]中引理1的证明.

2 主要结果

首先我们指出文献[11]中的例4不满足条件E, 如取 $x = 0$, $y = 1$, $\lambda = 1/2$, $\alpha = 1/2$, 故对例4进行了修正,如下:

例 2.1 设 $X = \mathbf{R}$, 取

$$\eta(x, y, \lambda) = \begin{cases} x - y, & x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ x - y, & x < 0, y < 0, \\ -\dfrac{1}{2} - y, & x > 0, y < 0, \\ \dfrac{1}{2} - y, & x < 0, y \geqslant 0, \\ -\lambda - y, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

易检验 η 满足条件 E .

类似于文献[8]中对条件C建立的性质,可得到关于条件 E_1 的一个重要结果.

性质 2.1 若向量值函数 $\eta: X \times X \times [0, 1] \to X$ 满足条件 E_1, 则

$$\eta(y + \alpha_1\eta(x, y, \lambda), y + \alpha_2\eta(x, y, \lambda), \lambda) = (\alpha_1 - \alpha_2)\eta(x, y, \lambda),$$
$$\forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in [0, 1], \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]. \tag{1}$$

证明 分3种情况考虑.

(i) 当 $\alpha_1 = \alpha_2$ 时,结论显然成立.

(ii) 当 $\alpha_1 > \alpha_2$ 时,

$$\begin{aligned} &\eta(y + \alpha_1\eta(x, y, \lambda), y + \alpha_2\eta(x, y, \lambda), \lambda) = \\ &\quad \eta(y + \alpha_1\eta(x, y, \lambda), y + \alpha_1\eta(x, y, \lambda) + (\alpha_2 - \alpha_1)\eta(x, y, \lambda), \lambda) = \\ &\quad \eta(y + \alpha_1\eta(x, y, \lambda), y + \alpha_1\eta(x, y, \lambda) + \\ &\quad \eta(y, y + (\alpha_1 - \alpha_2)\eta(x, y, \lambda), \lambda), \lambda) = \\ &\quad -\eta(y, y + (\alpha_1 - \alpha_2)\eta(x, y, \lambda), \lambda) = \\ &\quad (\alpha_1 - \alpha_2)\eta(x, y, \lambda). \end{aligned}$$

(iii) 当 $\alpha_1 < \alpha_2$ 时,

$$\begin{aligned} &\eta(y + \alpha_1\eta(x, y, \lambda), y + \alpha_2\eta(x, y, \lambda), \lambda) = \\ &\quad \eta(y + \alpha_1\eta(x, y, \lambda), y + \alpha_1\eta(x, y, \lambda) + (\alpha_2 - \alpha_1)\eta(x, y, \lambda), \lambda) = \\ &\quad -(\alpha_2 - \alpha_1)\eta(x, y, \lambda) = \\ &\quad (\alpha_1 - \alpha_2)\eta(x, y, \lambda). \end{aligned}$$

综上,式(1)成立.

彭再云等在文献[10]中利用 $*$-上半连续性和中间点 D- 半预不变凸性刻画了 D- 半预不变凸性;并分别讨论了 D- 半预不变凸性与 D- 严格半预不变凸性和 D- 半严格半预不变凸性间的关系.文献[11]中,彭再云等进一步引入了 D- 半预不变真拟凸性和 D- 半严格(严格)半预不变真拟凸性,研究了 D- 半预不变真拟凸性的刻画,利用 D- 半预不变真拟凸性给出了 D- 严格半预不变真拟凸性的一个充分条件;利用 D- 半严格半预不变真拟凸性给出了 D- 半预不变真拟凸性的充分条件.

接下来,本文在性质2.1和条件E的基础上,分别利用 D- 半严格半预不变真拟凸性、D- 严

格半预不变真拟凸性和 D- 半预不变真拟凸性给出 D- 半预不变凸性的刻画.

定理 2.1 设 $\eta: X \times X \times [0, 1] \to X$ 是满足条件 E 的向量值函数, X 是关于 η 的半不变凸集.如果 f 满足:

(a) $f(y + \eta(x, y, \lambda)) \in f(x) - D,\ \forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in [0, 1]$;

(b) f 是关于 η 的 D- 半严格半预不变真拟凸函数.

则 f 是关于 η 的 D- 半预不变凸函数,当且仅当 $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0, 1], \exists \alpha \in (0, 1)$, s.t.

$$f(y + \alpha\eta(x, y, \lambda)) \in \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) - D.$$

证明 必要性显然成立,故只需证充分性.利用反证法证明.反设存在 $x, y \in X, \lambda \in (0, 1), \beta \in (0, 1)$ 使得

$$f(y + \beta(x, y, \lambda)) \notin \beta f(x) + (1 - \beta) f(y) - D. \tag{2}$$

由引理 1.1 中的 A 在$[0, 1]$中的稠密性知,存在 $u, w \in A$ 满足 $0 < u < \beta < w < 1$ 使得

$$f(z_\beta) \notin u f(x) + (1 - u) f(y) - D, \tag{3}$$

$$f(z_\beta) \notin w f(x) + (1 - w) f(y) - D, \tag{4}$$

其中, $z_\beta = y + \beta\eta(x, y, \lambda)$.

令

$$t_1 = \frac{\beta - u}{1 - u} < \beta,\ t_2 = \frac{\beta}{w} > \beta.$$

由条件 E_2 和性质 2.1, 有

$$z_\beta = z_{t_1} + u\eta(x, z_{t_1}, \lambda),\ z_\beta = y + w\eta(z_{t_2}, y, \lambda),$$

其中 $z_{t_1} = y + t_1\eta(x, y, \lambda)$, $z_{t_2} = y + t_2\eta(x, y, \lambda)$.

因 $u, w \in A$, 故

$$f(z_\beta) \in u f(x) + (1 - u) f(z_{t_1}) - D, \tag{5}$$

$$f(z_\beta) \in w f(z_{t_2}) + (1 - w) f(y) - D. \tag{6}$$

分别结合式(3)和(4),则有

$$f(z_{t_1}) \notin f(y) - D, \tag{7}$$

$$f(z_{t_2}) \notin f(x) - D. \tag{8}$$

下面分两种情况证明:

(i) $f(x) \neq f(y)$ 的情形.由 f 的 D- 半严格半预不变真拟凸性,且结合式(7)和(8),有

$$f(z_{t_1}) \in f(x) - \operatorname{int} D,\ f(z_{t_2}) \in f(y) - \operatorname{int} D.$$

上两式分别结合式(5)和(6),得

$$f(z_\beta) \in f(x) - \operatorname{int} D,\ f(z_\beta) \in f(y) - \operatorname{int} D.$$

从而

$$f(z_\beta) \in \beta f(x) + (1 - \beta) f(y) - \operatorname{int} D.$$

这与式(2)矛盾.

(ii) $f(x) = f(y)$ 的情形.由式(2), $f(z_\beta) \neq f(y)$.注意到由性质 2.1 可得

$$z_{t_1} = y + \frac{\beta - u}{\beta(1 - u)} \eta(z_\beta, y, \lambda).$$

由 f 的 D- 半严格半预不变真拟凸性和式(7),得到

$$f(z_{t_1}) \in f(z_\beta) - \operatorname{int} D;$$

结合式(5),得

$$f(z_\beta) \in uf(x) + (1-u)f(z_\beta) - \operatorname{int} D.$$

从而,

$$f(z_\beta) \in f(x) - \operatorname{int} D = \beta f(x) + (1-\beta)f(x) - \operatorname{int} D = \beta f(x) + (1-\beta)f(y) - \operatorname{int} D.$$

这与式(2)矛盾.

综上,结论得证.

下面,举例说明定理 2.1.

例 2.2 设 $X = \mathbf{R}$,

$$\eta(x, y, \lambda) = \begin{cases} x - y, & x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ x - y, & x \leqslant 0, y \leqslant 0, \\ -x - y - \lambda, & x > 0, y < 0, \\ -x - y + \lambda, & x < 0, y > 0, \end{cases}$$

$f: X \to R^2$, 其中 $f_1(x) = -|x|$, $f_2(x) = -2|x|$.$D = R_+^2$.

易检验 η 满足条件 E, X 是关于 η 的预不变凸集, f 满足定理 2.1 中的条件(a)和(b), 同时 f 是 X 上关于 η 的 D- 半预不变凸函数.

由定义可知 D- 严格半预不变真拟凸性一定是 D- 半严格半预不变真拟凸性,故由定理 2.1, 可得到如下的一个推论.

推论 2.1 设 $\eta: X \times X \times [0, 1] \to X$ 是满足条件 E 的向量值函数, X 是关于 η 的半不变凸集.如果 f 满足:

(a) $f(y + \eta(x, y, \lambda)) \in f(x) - D$, $\forall x, y \in X$, $\forall \lambda \in [0, 1]$;

(b) f 是关于 η 的 D- 严格半预不变真拟凸函数.

则 f 是关于 η 的 D- 半预不变凸函数,当且仅当 $\forall x, y \in X$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\exists \alpha \in (0, 1)$, s.t.

$$f(y + \alpha\eta(x, y, \lambda)) \in \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - D.$$

最后本文利用 D- 半预不变真拟凸性给出 D- 半预不变凸性的一个刻画.

定理 2.2 设 $\eta: X \times X \times [0, 1] \to X$ 是满足条件 E 的向量值函数, X 是关于 η 的半不变凸集.如果 f 满足:

(a) $f(y + \eta(x, y, \lambda)) \in f(x) - D$, $\forall x, y \in X$, $\forall \lambda \in [0, 1]$;

(b) f 是关于 η 的 D- 半预不变真拟凸函数.

则 f 是关于 η 的 D- 半预不变凸函数,当且仅当 $\forall x, y \in X$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\exists \alpha \in (0, 1)$, s.t.

$$f(y + \alpha\eta(x, y, \lambda)) \in \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - D.$$

证明 必要性显然成立,故只需证充分性.类似于定理 2.1, 利用反证法证明.反设存在 $x, y \in X$, $\beta \in (0, 1)$, $\lambda \in (0, 1)$ 使得

$$f(y + \beta(x, y, \lambda)) \notin \beta f(x) + (1-\beta)f(y) - D. \tag{9}$$

且存在 $u, w \in A$ 满足 $0 < u < \beta < w < 1$ 使得

$$z_\beta = z_{(\beta-u)/(1-u)} + u\eta(x, z_{(\beta-u)/(1-u)}, \lambda), \quad z_\beta = y + w\eta(z_{\beta/w}, y, \lambda),$$

其中 $z_\beta = y + \beta\eta(x, y, \lambda)$, $z_{(\beta-u)/(1-u)} = y + \dfrac{\beta - u}{1 - u}\eta(x, y, \lambda)$, $z_{\beta/w} = y + \dfrac{\beta}{w}\eta(x, y, \lambda)$.

因 $u, w \in A$, 故

$$f(z_\beta) \in uf(x) + (1-u)f(z_{(\beta-u)/(1-u)}) - D, \tag{10}$$

$$f(z_\beta) \in wf(z_{\beta/w}) + (1-w)f(y) - D. \tag{11}$$

式(10)和(11)分别结合式(9),有

$$f(z_{(\beta-u)/(1-u)}) \notin f(y) - D, \tag{12}$$

$$f(z_{\beta/w}) \notin f(x) - D. \tag{13}$$

注意到

$$z_{(\beta-u)/(1-u)} = y + \frac{\beta - u}{\beta(1-u)} \eta(z_\beta, y, \lambda),$$

$$z_{\beta/w} = z_\beta + \frac{\beta(1-w)}{w(1-\beta)} \eta(x, z_\beta, \lambda).$$

由 f 的 D- 半预不变真拟凸性以及式(12)和(13),有

$$f(z_{(\beta-u)/(1-u)}) \in f(z_\beta) - D \text{ 且 } f(z_{\beta/w}) \in f(z_\beta) - D.$$

分别结合式(10)和(11),则有

$$f(z_\beta) \in f(x) - D \text{ 且 } f(z_\beta) \in f(y) - D.$$

从而与式(9)矛盾.

3 结 语

本文研究了 D- 半预不变凸性的某些新性质.由条件 E_1 获得了一个重要性质,并在此基础上分别利用 D- 半严格半预不变真拟凸性、D- 严格半预不变真拟凸性和 D- 半预不变真拟凸性给出了 D- 半预不变凸性的刻画.所得结果推广了文献[10-11]中相应结果.对应于文献[12]中提出的 D-η-E 半预不变凸性,将 D- 半预不变真拟凸性推广到 D-η-E 半预不变真拟凸性上并研究其在向量优化问题中的应用,这将是有待研究的后续课题.

参考文献(References):

[1] Hanson M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1981, **80**(2): 545-550.

[2] Weir T, Mond B. Pre-invex functions in multiple objective optimization[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1988, **136**(1): 29-38.

[3] Weir T, Jeyakumar V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J]. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1988, **38**(2): 177-189.

[4] Mohan S R, Neogy S K. On invex sets and preinvex functions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1995, **189**(3): 901-908.

[5] Yang X M, Li D. On properties of preinvex functions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, **256**(1): 229-241.

[6] Yang X M, Li D. Semistrictly preinvex functions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, **258**(1): 287-308.

[7] Yang J, Yang X. Two new characterizations of preinvex functions[J]. *Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems B*, 2012, **19**(3): 405-410.

[8] Yang X. A note on preinvexity[J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2014, **10**(4): 1319-1321.

[9] Yang X Q, Chen G Y. A class of nonconvex functions and pre-variational inequalities[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1992, **169**(2): 359-373.

[10] 彭再云, 王堃颖, 赵勇, 张石生. D-η-半预不变凸映射的性质与应用[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(2): 202-211.(PENG Zai-yun, WANG Kun-ying, ZHAO Yong, ZHANG Shi-sheng.

Characterizations and applications of D-η-semipreinvex mappings[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(2): 202-211.(in Chinese))

[11] 彭再云, 李科科, 唐平, 黄应全. 向量值 D-半预不变真拟凸映射的判定与性质[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2014, **31**(5): 18-25.(PENG Zai-yun, LI Ke-ke, TANG Ping, HUANG Ying-quan. Characterizations and criterions of D-semiprequasi-invex mappings[J]. *Journal of Chongqing Normal University*(*Natural Science*), 2014, **31**(5): 18-25.(in Chinese))

[12] 彭再云, 李科科, 张石生. 向量 D-η-E-半预不变凸映射与向量优化[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(9): 1020-1032.(PENG Zai-yun, LI Ke-ke, ZHANG Shi-sheng. D-η-E-Semipreinvex vector mappings and vector optimization[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(9): 1020-1032. (in Chinese))

A Note on Some New Characteristics of D-Semi-Preinvexity

TANG Li-ping[1], YANG Xin-min[2]

(1. *Department of Mathematics*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200444, *P.R.China*;

2. *College of Mathematics Science*, *Chongqing Normal University*, *Chongqing* 400047, *P.R.China*)

(Contributed by YANG Xin-min, M. AMM Editorial Board)

Abstract: Some new properties of semi-preinvexity in the sense of cones were studied. Firstly, Example 4 in the paper of PENG Zai-yun, etc.(PENG Zai-yun, LI Ke-ke, TANG Ping, HUANG Ying-quan. Characterizations and criterions of D-semiprequasi-invex mappings[J]. *Journal of Chongqing Normal University*(*Natural Science*), 2014, **31**(5): 18-25.) was modified to satisfy condition E. Then, an important property of condition E_1 was obtained. Based on this property and the results of density, two characterizations of D-semi-preinvexity were established by means of D-semi-strict semi-prequasiinvexity and D-strict semi-prequasiinvexity, respectivley. In the end, D-semi-preinvexity was characterized with D-semi-prequasiinvexity.

Key words: D-semi-preinvexity; D-semi-strict semi-prequasiinvexity; D-strict semi-prequasiinvexity; D-semi-prequasiinvexity

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (Key Program) (11431004); The National Natural Science Foundation of China (11271391)