

# 转子动力学的非线性数值求解\*

徐小明, 钟万勰

(大连理工大学 工程力学系; 工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116024)

(本刊编委钟万勰来稿)

**摘要:** 将 Euler(欧拉)角表示引入转子动力学系统,用以描述转子的非线性旋转运动,并与时间有限元相结合,进而提出了包含非线性因素的转子动力学保辛数值求解方法.以此方法为基础,分析了悬臂梁-圆盘转子系统的涡动行为,数值结果证明该数值解法的有效性与正确性,可用于各种转子系统涡动行为分析.

**关键词:** 转子动力学; 非线性; 涡动; 陀螺; Euler 角

**中图分类号:** TP391.9; O347.6      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.07.001

## 引言

旋转机械被广泛应用于包括燃气轮机,航空发动机等各种机械装置中,在电力、航空、化工、机械等国计民生相关的领域中起着非常重要的作用.与之紧密相关的转子系统及其动力特性的研究也十分活跃<sup>[1]</sup>.经过数十年发展,旋转轴系统建模与分析计算方法、转子系统的临界转速、振型与不平衡响应分析等,已经形成了一套行之有效的理论体系.旋转轴系统振动的研究还不够充分,尤其对于高速旋转机组,例如在汽轮发电机组、工业汽轮机组、喷气发动机等方面<sup>[1-2]</sup>.现行教材基本上在线性振动的范围内推导振动方程,著作[3]的方法是通行的,中文教材[4-6]基本是与之并行的.转子系统的线性近似模型,为分析转子的动力学特性提供了有效的方法.在此基础上,可以对转子系统的临界转速、涡动运动进行分析,也可依托该模型对转子的碰摩响应<sup>[7]</sup>、弯扭耦合情况下的组合共振<sup>[8-9]</sup>等进行分析.

然而实际的转子动力学问题绝大多数是非线性的.早期由于数学理论和计算条件的限制,往往将非线性问题线性化以得到近似的结果,但这样做往往会导致大的误差.转轴的涡动性质,需要在非线性动力学的范围内认真考虑,理论模型要无可争辩,本文将讨论此问题.采用分析结构力学方法对所述模型进行保辛数值求解<sup>[10-11]</sup>.保辛数值解也要无可争议,这样可有助于不同的近似理论和方法.本文主要讨论悬臂高速转动圆盘的横向振动.转动圆盘是陀螺,连接的悬臂是弹性元件.陀螺的特性必然是非线性的<sup>[6]</sup>.

\* 收稿日期: 2015-02-08; 修订日期: 2015-06-05

基金项目: 国家自然科学基金(面上项目)(11472067)

作者简介: 徐小明(1986—),男,辽宁东港人,博士生(通讯作者. E-mail: xxm@mail.dlut.edu.cn);  
钟万勰(1934—),男,浙江德清人,教授,中科院院士(E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn).

# 1 基本方程的未知数

如图 1 所示,转子系统由一轻质柔轴与  $n_p$  个刚体圆盘组成,圆盘位于轻质柔轴中央。 $O$ - $XYZ$  表示绝对坐标系,不随  $OZ$  轴旋转。无扰动变形时,圆盘中心位于水平轴  $OZ$  上,并以角速度  $\Omega$  绕  $Z$  轴作自转。由于扰动,各盘心将发生横向偏移,柔轴发生变形。图 2 给出了第  $i$  个圆盘转子的局部示意图。 $O'$ - $x_z y_z z_z$  为以  $O'$  点为原点的贴旋转轴的坐标(贴轴坐标),固定在旋转轴上,并以角速度  $\Omega$  随轴一同旋转,  $\psi_{xi}, \psi_{yi}$  分别表示在贴轴坐标  $(x_z, z_z)$  及  $(y_z, z_z)$  平面内的转角。 $O'$ - $x_p y_p z_p$  是贴盘坐标,  $\mathbf{n} = \psi_{xi} \mathbf{i}_z + \psi_{yi} \mathbf{j}_z$  为圆盘的法线方向,其中  $\mathbf{i}_z, \mathbf{j}_z$  为贴轴系沿  $x_z$  轴与  $y_z$  轴的基矢量。 $O'z_z$  是旋转轴方向,  $X_{pi}, Y_{pi}$  则是圆盘质心  $O'$  在绝对坐标系下的位移。势能就是轴段梁的变形能,由于盘心位移  $X_{pi}, Y_{pi}$  和转角  $\psi_{xi}, \psi_{yi}$  比较小,所以可用线性梁理论。为简单起见,本文只考虑一个圆盘的课题,因此仅考虑  $X_p, Y_p, \psi_x, \psi_y$ 。

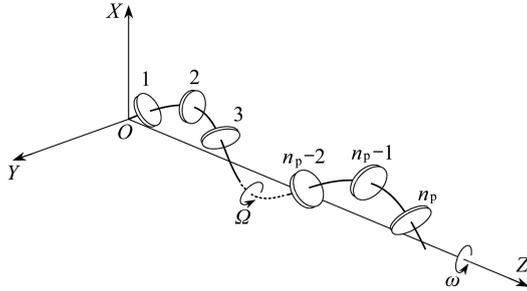


图 1 多转子系统:  $O$ - $XYZ$  系为惯性坐标系

Fig. 1 A multi-rotor system:  $O$ - $XYZ$  denotes the inertial coordinate system

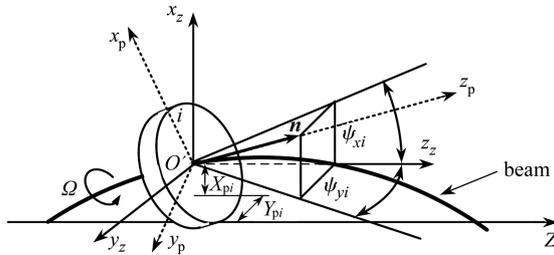


图 2 单转子系统

Fig. 2 A single rotor system

在线性理论框架下<sup>[6]</sup>,图 2 所示圆盘的运动动能由其质心的位置以及截面转角确定。另一方面,旋转轴段的势能则通常被简化为梁模型(例如 Timoshenko 梁),梁的变形能由  $x_z$  与  $y_z$  方向的线位移  $q_x, q_y$  以及角位移  $\psi_x, \psi_y$  决定,在贴轴坐标系  $O'$ - $x_z y_z z_z$  中描述; $z_z$  方向的线位移  $q_z$  因为不考虑拉伸变形影响而忽略不计。从绝对坐标系到贴轴坐标系的变换矩阵为

$$\mathbf{T}_z = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & 0 \\ -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

通过上式,可将圆盘与梁的运动统一在贴轴坐标系下进行描述,对应的齐次无阻尼线性振动方程是

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_s \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

对上述方程进行特征分析,可得到系统的临界频率等参数,但线性方程表示的陀螺特征不够全

面,因为其忽略了非线性项的影响。

涡动是陀螺运动的特征.围绕圆盘轴心的转动位移可表示为  $(\phi, \theta, \psi)$ , 统称 Euler 角<sup>[12]</sup>, 分别是圆盘的进动角 (precession)、章动角 (azimuth) 以及自旋角 (rotation), 以描述从绝对坐标到圆盘贴体坐标 (贴盘坐标) 的转动.如图 2 所示,  $O'-x_p y_p z_p$  表示贴盘坐标系, 圆盘贴盘坐标系下的刚体角速度可表示为

$$\begin{cases} \omega_{xp} = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_{yp} = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_{zp} = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}, \end{cases} \quad (3)$$

与式(2)相比较,上式已经成为非线性方程.如果忽略转轴的扭转变形,则必然有  $\omega_{zp} = \Omega$ , 其中  $\Omega$  是轴的给定转速.即认为有非完整的约束条件:

$$\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \Omega. \quad (4)$$

将  $(\phi, \theta, \psi)$  纳入圆盘的位移向量之中,这样构成单个圆盘在绝对坐标系下的位移向量:

$$\mathbf{q}_i = \{X_{pi}, Y_{pi}; \phi_i, \theta_i, \psi_i\}^T. \quad (5)$$

在这种表述形式下,角速度已经不再是通过角度的微商来线性近似,而是由式(3)表示.在式(5)中,由于约束条件式(4)的引入,本来 3 个独立的 Euler 角,实际上只有 2 个是真正独立的.对于单个圆盘的转轴振动,  $i = 1$ , 上述问题成为普通的单个陀螺带上弹性梁的振动,是保守系统.梁的变形能只是位移的函数,将其记为  $U(\mathbf{q}, t)$ .将  $U(\mathbf{q}, t)$  表示清楚,变为带有变形能函数的高速旋转速度为  $\Omega$  的陀螺,保辛数值求解是有把握的。

在梁理论中,变形能  $U$  在贴轴坐标系中描述,而角速度则在贴盘坐标系中描述.所以还应给出贴盘坐标与贴轴坐标之间的转换关系.用 Euler 角描述的绝对坐标系与贴盘坐标系之间的转换关系为<sup>[12]</sup>

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (6)$$

原来在绝对坐标系中的向量  $\mathbf{d}$ , 转换到贴盘坐标系中为  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{d}$ .而从贴盘坐标到绝对(惯性)坐标的转换阵则是  $\mathbf{T}^T$ .转换矩阵  $\mathbf{T}$  是时间  $t$  的函数.根据式(1),容易得到贴盘坐标到贴轴坐标的转换阵  $\mathbf{T}_{pz}$ :

$$\mathbf{T}_{pz} = \mathbf{T}_z \mathbf{T}^T. \quad (7)$$

本文先用  $(\phi, \theta, \psi)$  做单个圆盘的陀螺系统,以便推广到多个圆盘陀螺系统.将转轴涡动做非线性数值积分。

## 2 动力方程及其积分

动力学方程的推导,用 Lagrange 函数  $L = T - U$  描述比较方便.设已对空间坐标完成了离散.对于势能函数  $U(\mathbf{q}, t)$ , 横向振动的势能公式可采用 Timoshenko 理论的梁,每个节点  $i$  的位移为  $\{q_{xi} \ q_{yi} \ \psi_{yi} \ \psi_{xi}\}^T$ .以下,按 Euler-Bernoulli 理论梁的变形能可表示为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI_{xz} (\partial^2 q_x / \partial z_x^2)^2 dx + \int_0^L EI_{yz} (\partial^2 q_y / \partial z_y^2)^2 dx, \quad (8)$$

其中  $L$  为梁的长度,  $I_{xz}$  与  $I_{yz}$  分别为  $x_z$  与  $y_z$  方向上梁的截面惯性矩,线位移与角位移之间满足关系

$$\psi_x(z_z) = \partial q_x / \partial z_z, \quad \psi_y(z_z) = \partial q_y / \partial z_z. \quad (9)$$

如图3所示,可将梁划分为若干个有限单元,其中在第*i*个节点上附加圆盘.上述是在贴轴坐标系下描述的变形能.能量与坐标系无关,所以也可以在绝对坐标系下描述,只需将贴轴系中的位移、转角变量通过式(1)转换到绝对坐标系下即可.对于本文,由于采用的是轴对称梁( $I_{xz} = I_{yz}$ ),经过旋转变换,变形能的表达形式不变.所以将式(8)中的位移( $q_x, q_y$ )用( $X_p, Y_p$ )替换,转角( $\psi_x, \psi_y$ )用绝对坐标系下的转角( $\bar{\psi}_x, \bar{\psi}_y$ )替换,就可得到绝对坐标系下的变形能表达式.这样便可以在绝对坐标系下统一研究梁与圆盘的运动.

根据有限单元法,对于单元*i*,设*X, Y*方向的位移可近似表示为<sup>[6]</sup>

$$X_p(z) = Nq_{e1}, \quad Y_p(z) = Nq_{e2}, \quad (10)$$

其中

$$N = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\},$$

$$N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad N_2 = l_i(\xi - 2\xi^2 + \xi^3),$$

$$N_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad N_4 = l_i(-\xi^2 + \xi^3), \quad \xi = z/l_i,$$

以及

$$\mathbf{q}_{e1} = \{X_{p(i-1)} \quad \bar{\psi}_{x(i-1)} \quad X_{pi} \quad \bar{\psi}_{xi}\}^T, \quad \mathbf{q}_{e2} = \{Y_{p(i-1)} \quad \bar{\psi}_{y(i-1)} \quad Y_{pi} \quad \bar{\psi}_{yi}\}^T. \quad (11)$$

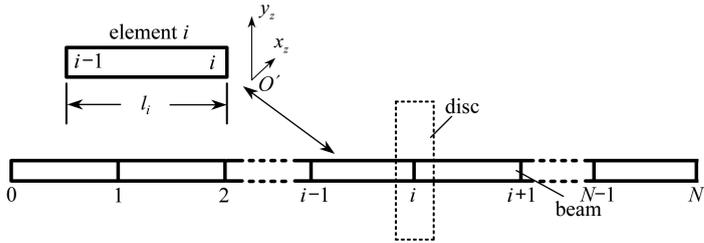


图3 转子系统有限元剖分

Fig. 3 FEM meshing of the rotor system

将式(10)代入式(8),并将*L*替换为*l<sub>i</sub>*,则可得到单元*i*的单元刚度阵:

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ex} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ey} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{K}_{ex} = \int_0^{l_i} EI_{xz} N''^T N'' dz = \frac{EI_{xz}}{l_i^3} \begin{bmatrix} 12 & & & \text{sym} \\ 6l_i & 4l_i^2 & & \\ -12 & -6l_i & 12 & \\ 6l_i & 2l_i^2 & -6l_i & 4l_i^2 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$\mathbf{K}_{ey}$ 的表达式与 $\mathbf{K}_{ex}$ 的表达式形式基本相同,只需将 $I_{xz}$ 替换为 $I_{yz}$ .这样可得到梁的总变形能:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{q}}_i \mathbf{K}_i \bar{\mathbf{q}}_i, \quad (14)$$

其中*N*为梁划分的总单元数,

$$\bar{\mathbf{q}}_i = \{\mathbf{q}_{e1}^T \quad \mathbf{q}_{e2}^T\}^T \quad (15)$$

为梁的单元位移向量.

$\bar{\psi}_{xi}, \bar{\psi}_{yi}$ 分别是圆盘在绝对坐标(*X, Z*)及(*Y, Z*)平面内的转角,要用 Euler 角来表示.从贴

盘坐标到绝对坐标系的转换阵是  $\mathbf{T}^T$ . 根据式(6), 图2中贴盘坐标中柔轴在  $O'$  点的法线方向向量为  $\mathbf{n} = \{0 \ 0 \ 1\}^T$ , 转换到绝对坐标可表示为  $\mathbf{T}^T \mathbf{n}$ . 故有

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{xi} = T_{31} = \sin \theta_i \sin \phi_i, \\ \bar{\psi}_{yi} = T_{32} = -\sin \theta_i \cos \phi_i, \end{cases} \quad (16)$$

这样便建立起了  $\bar{\psi}_{xi}, \bar{\psi}_{yi}$  与 Euler 角之间的对应关系.

从几何角度看贴轴坐标与贴盘坐标的差别. 从 Euler 角的角度看, 贴盘坐标是  $(\phi, \theta, \psi)$ , 其中章动角  $\theta$  很小; 如果取  $\theta = 0$  则就成为贴轴坐标系中的 Euler 角. 若进动了  $\phi$  角, 同时章动角  $\theta = 0$  再自旋  $\psi$ , 就得到贴轴坐标的正交变换阵, 所以贴轴坐标的 Euler 角是  $(\phi, \theta = 0, \psi)$ , 此时  $\phi + \psi = \Omega t$ . 自旋角  $\psi$  与式(6)表示的  $\mathbf{T}$  阵的第3行无关, 即与圆盘的法线方向无关, 因此轴线的切线方向确定. 梁理论的的变形能就是用来描述法线方向的变化.

下面分析转子系统的动能. 由于梁的质量相比于转盘的质量较小, 这里将梁的质量忽略不计, 只分析圆盘的动能. 如图3所示, 在梁的  $i$  点嵌入一个圆盘, 其位移可由式(5)表示. 在绝对坐标系中, 质心运动产生的动能可以表示为

$$T_q = m(\dot{X}_{pi}^2 + \dot{Y}_{pi}^2). \quad (17)$$

由于将圆盘近似为刚体, 除去质心动能  $T_q$  外, 还应分析圆盘的转动动能. 刚体的转动动能可以表示为

$$T_E = \frac{1}{2} [I_{xp} \omega_{xp}^2 + I_{yp} \omega_{yp}^2 + I_{zp} \omega_{zp}^2] = \frac{1}{2} [I_2(\omega_{xp}^2 + \omega_{yp}^2) + I_1 \omega_{zp}^2], \quad (18)$$

其中,  $I_1$  为贴盘坐标系中轴向(法线方向)的转动惯量,  $I_2$  为环向转动惯量. 将角速度的具体表达式(3)代入上式得

$$T_E = \frac{1}{2} I_{i1} [\dot{\phi}_i \cos \theta_i + \dot{\psi}_i]^2 + \frac{1}{2} I_{i2} [\dot{\theta}_i^2 + \dot{\phi}_i^2 \sin^2 \theta_i], \quad (19)$$

下标  $i$  表示节点  $i$  处的圆盘. 所以圆盘的总动能是与速度有关的函数.

$$T(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = T(X_{pi}, Y_{pi}, \psi_i, \theta_i, \phi_i; \dot{X}_{pi}, \dot{Y}_{pi}, \dot{\psi}_i, \dot{\theta}_i, \dot{\phi}_i) = T_E + T_q, \quad (20)$$

其中,  $\mathbf{q}_i$  由式(5)定义. 假设  $S$  表示如图3所示嵌入圆盘的点的集合, 则可以用 Lagrange 函数的形式表示为

$$L = \sum_{i \in S} T(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) - U, \quad (21)$$

由于圆盘的动能表述是非线性的, 所以要进行非线性动力学积分. 将整个转子系统的位移向量统一表示为

$$\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_0^T \ \mathbf{q}_1^T \ \mathbf{q}_2^T \ \cdots \ \mathbf{q}_N^T\}^T, \quad (22)$$

这样, Lagrange 函数式(21)可以重新写为

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (23)$$

组成上式的位移向量  $\mathbf{q}$  全部是独立无关的. 表达为独立变量的 Lagrange 函数, 再加上约束条件(4), 就可以用时间有限元方法进行数值积分了. 非完整约束的动力学积分, 文献[13]提供了离散的基于祖冲之类算法的求解. 如果不考虑非完整约束(4), 同样可以参考时间有限元<sup>[14-15]</sup>构造保辛算法. 与带有非完整约束的算法相比, 两种数值结果相差较小. 本文采用带有非完整约束的算法进行计算.

### 3 数值例题

本例题只考虑单转盘运动.设悬臂的单圆盘转子如图 4 所示,长度方向坐标是  $Z$ . $Z = 0$  的根部是夹住,即横向位移与转角给定,梁长为  $l = 0.2$  m,梁的直径为  $d = 0.01$  m.梁的惯性矩为  $I_{xz} = I_{yz} = \pi d^4/64$ ,弹性模量为  $E = 210$  GPa;圆盘的质量为  $m = 10$  kg,径向转动惯量为  $I_2 = 0.72$  kg·m<sup>2</sup>,轴向转动惯量  $I_1 = 2I_2$ .转子的初值状态是沿  $Z$  轴的无振动高速旋转  $\Omega$ .在本文中,设  $\Omega = 314$  rad/s.分别对左端施加初始转角与右端施加初始力扰动的两种情况进行模拟.

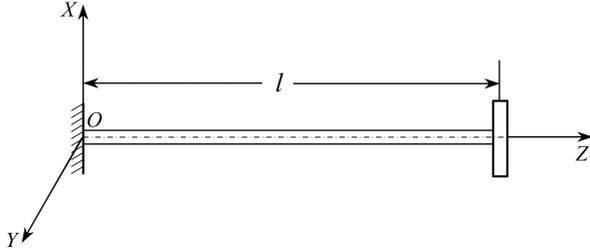
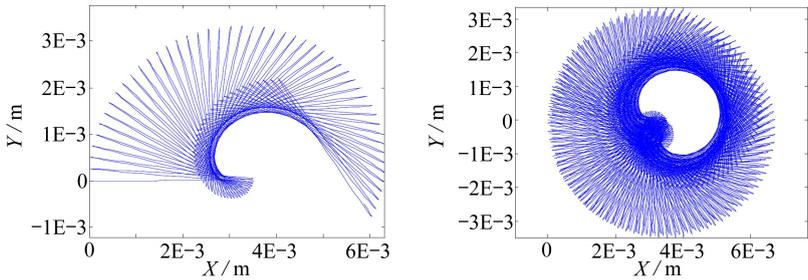


图 4 悬臂梁-圆盘转子模型

Fig. 4 The cantilever-disc rotor model

**情况 1** 考虑  $t = 0$  时,在  $Z = 0$  的轴根部,给出绝对坐标  $(X, Z)$  面内的小初始转角  $\psi_x(0, t) = \vartheta_0$ ,例如  $\vartheta_0 = \pi/180$  rad.在  $t > 0$  就发生振动及涡动.图 5~7 给出了涡动的数值模拟结果.

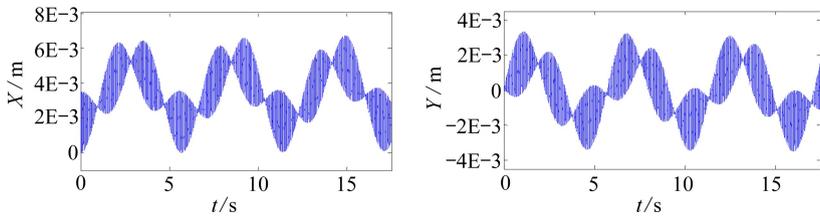


(a) 0~2.5 s 轨迹  
(a) The trajectory of 0~2.5 s

(b) 0~17.5 s 轨迹  
(b) The trajectory of 0~17.5 s

图 5 质心轨迹在 XOY 平面投影

Fig. 5 The mass centre trajectory projection on plane XOY



(a) X 坐标  
(a) X-coordinate

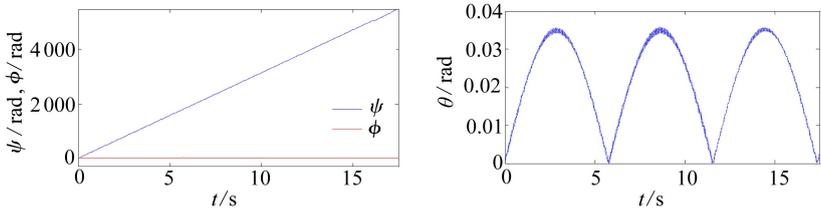
(b) Y 坐标  
(b) Y-coordinate

图 6 质心坐标随时间变化曲线

Fig. 6 The mass centre coordinate curves vs. time

图 5 给出了在左端施加一转角扰动后圆盘质心的涡动轨迹在  $X$ - $Y$  平面上的投影.由于扰动的出现,质心从静止逐渐振动起来,并在整体上作圆周运动,也就是涡动.图 6 给出了质心

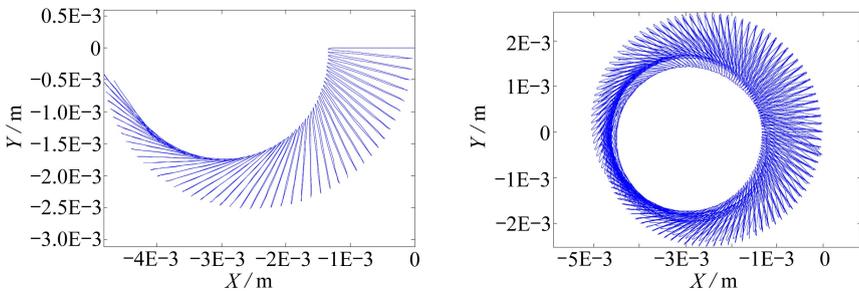
$X, Y$  轴坐标随时间的变化规律.从图中可以看出质心在局部高频振动的同时,整体上也进行着低频运动,这种低频的、拟周期运动在  $X-Y$  平面上的投影就是涡动,涡动的频率很低.图 7 给出了圆盘的 Euler 角随时间的变化规律.从图 7(a)可以看出,自旋角速度  $\dot{\psi} \approx \Omega$ , 图 7(b) 显示章动角  $\theta$  呈现周期性的增大与减小,其频率与涡动频率接近.



(a) 自旋角  $\psi$  与进动角  $\phi$   
 (a) Rotation  $\psi$  and precession  $\phi$   
 (b) 章动角  $\theta$   
 (b) Azimuth  $\theta$

图 7 Euler 角随时间变化曲线

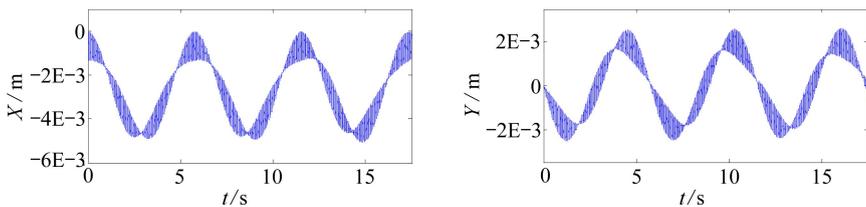
Fig. 7 Euler angle coordinate curves vs. time



(a) 0~2.5 s 轨迹  
 (a) The trajectory of 0~2.5 s  
 (b) 0~17.5 s 轨迹  
 (b) The trajectory of 0~17.5 s

图 8 质心轨迹在  $XOY$  平面投影

Fig. 8 The mass centre trajectory projection on plane  $XOY$



(a) X 坐标  
 (a) X-coordinate  
 (b) Y 坐标  
 (b) Y-coordinate

图 9 质心坐标随时间变化曲线

Fig. 9 The mass centre coordinate curves vs. time

**情况 2** 考虑初始时刻圆盘绕  $Z$  轴作无振动高速旋转, 旋转角速度为  $\Omega$ . 然后在  $Z = l$  端, 在  $X$  方向上持续受  $F = -mg$  的重力作用, 其中  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  为重力加速度. 图 8 给出了涡动的形态图. 从图 8(a) 可见, 质心整体作圆涡动, 涡动形态与第一个算例类似. 图 8(b) 显示质心沿着涡动圆轨迹进行高频的局部振动. 图 9 给出了质心  $X, Y$  轴坐标随时间的变化规律. 比较图 6 与图 9 可知, 在给定初始角扰动与力扰动情况下, 虽然涡动形态有所变化, 然而涡动的频率基本相同. 图 10 给出了 Euler 角随时间的变化规律, 从图中可见  $\dot{\psi} \approx \Omega$ . 章动角在  $-0.04 \sim 0 \text{ rad}$  之间不断变化, 而在情况 1 给定初始转角扰动情况下, 章动角为正值.

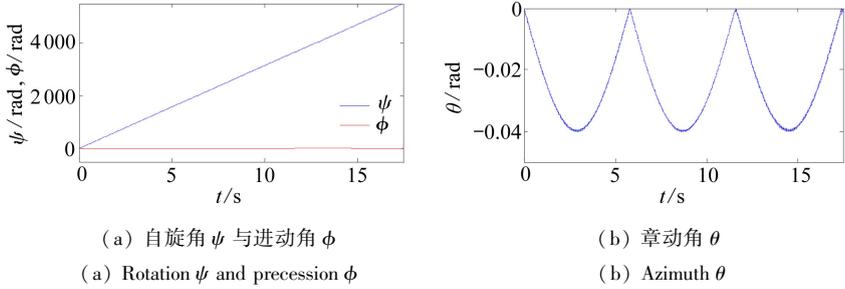


图 10 Euler 角随时间变化曲线

Fig. 10 The Euler angle coordinate curves vs. time

通过两种不同初始条件下的数值模拟比较,可以发现不同的定常自旋扰动,仅改变涡动的具体形状,而对于涡动频率则几乎没有影响。通过大量的数值实验还可以发现,涡动的频率与转子系统的参数密切相关。具体来说:涡动频率随圆盘质量增加而呈现指数衰减;涡动频率随圆盘转动惯量增加而呈现指数增长;涡动频率随梁半径增加而呈现指数增长;涡动频率随梁长增加而呈现指数衰减。

## 4 结 论

本文基于刚体动力学与转子动力学,将陀螺动力学 Euler 角引入,用以描述转子的刚体旋转,进而提出了包含非线性因素的转子动力学保辛数值求解方法。在此基础上本文研究了单圆盘-悬臂梁系统的涡动行为。研究表明实际无阻尼转子系统的涡动多以较低频率的涡动与较高频率的横向振动乘法组成,涡动的频率与圆盘的质量、转动惯量以及梁的惯性矩和梁长均有关系,频率相差很大。本文所提非线性数值算法可以与线性近似理论比对并加以借鉴,对于辅助“梁-轴”转子系统的工程设计具有实际意义。

## 参考文献 (References):

- [1] 高颢, 张新江, 张勇. 非线性转子动力学问题研究综述[J]. 东南大学学报, 2002, **32**(3): 443-451. (GAO Wei, ZHANG Xin-jiang, ZHANG Yong. Review of nonlinear rotor-dynamics[J]. *Journal of Southeast University*, 2002, **32**(3): 443-451. (in Chinese))
- [2] 孟光. 转子动力学研究的回顾与展望[J]. 振动工程学报, 2002, **15**(1): 1-9. (MENG Guang. Retrospect and prospect to the research on rotordynamics[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2002, **15**(1): 1-9. (in Chinese))
- [3] Rao J S. *Rotor Dynamics*[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1983.
- [4] 虞烈, 刘恒. 轴承-转子系统动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2000. (YU Lie, LIU Heng. *Bearing-Rotor Dynamics*[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2000. (in Chinese))
- [5] 袁惠清. 转子动力学基础[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2013. (YUAN Hui-qing. *Rotor Dynamics* [M]. Beijing: Metallurgical Industry Press, 2013. (in Chinese))
- [6] 张文. 转子动力学理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1990. (ZHANG Wen. *Basic Theory of Rotor Dynamics*[M]. Beijing: Science Press, 1990. (in Chinese))
- [7] 张华彪, 陈予恕, 李军. 弹性支承-刚性转子系统同步全周碰摩的分岔响应[J]. 应用数学和力学, 2012, **33**(7): 812-827. (ZHANG Hua-biao, CHEN Yu-shu, LI Jun. Bifurcation on the synchronous full annular rub of a rigid-rotor elastic-support system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **33**(7): 812-827. (in Chinese))

- [8] 李军, 陈予恕. 低压-发电机转子系统弯扭耦合情况下的组合共振研究[J]. 应用数学和力学, 2011, **32**(8): 895-911. (LI Jun, CHEN Yu-shu. Study on combined resonance of low pressure cylinder-generator rotor system with bending-torsion coupling[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, **32**(8): 895-911. (in Chinese))
- [9] 孙政策, 徐健学, 周桐, 谭宁. 碰摩转子中弯扭耦合作用的影响分析[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(11): 1163-1169. (SUN Zheng-ce, XU Jian-xue, ZHOU Tong, TAN Ning. Study on combined resonance of low pressure cylinder-generator rotor system with bending-torsion coupling[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, **24**(11): 1163-1169. (in Chinese))
- [10] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006. (ZHONG Wan-xie. *Symplectic Method in Applied Mechanics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese))
- [11] 钟万勰, 高强, 彭海军. 经典力学——辛讲[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2013. (ZHONG Wan-xie, GAO Qiang, PENG Hai-jun. *Classical Mechanics—Its Symplectic Description* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2013. (in Chinese))
- [12] Goldstein H. *Classical Mechanics* [M]. 2nd ed. San Francisco: Addison Wesley, 1980.
- [13] 高强, 钟万勰. 非完整约束动力系统的离散积分方法[J]. 动力学与控制学报, 2012, **10**(3): 193-198. (GAO Qiang, ZHONG Wan-xie. Numerical algorithms for dynamic system with non-holonomic constrains[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2012, **10**(3): 193-198. (in Chinese))
- [14] 钟万勰, 姚征. 时间有限元与保辛[J]. 机械强度, 2005, **27**(2): 178-183. (ZHONG Wan-xie, YAO Zheng. Time domain FEM and symplectic conservation [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2005, **27**(2): 178-183. (in Chinese))
- [15] 徐小明, 钟万勰. 刚体动力学的四元数表示及保辛积分[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(1): 1-11. (XU Xiao-ming, ZHONG Wan-xie. Symplectic integration of rigid body motion by quaternion parameters[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(1): 1-11. (in Chinese))

## Nonlinear Numerical Simulation of Rotor Dynamics

XU Xiao-ming, ZHONG Wan-xie

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment  
(Dalian University of Technology); Department of Engineering Mechanics,  
Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)  
(Contributed by ZHONG Wan-xie, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** A symplectic numerical method using the finite element algorithm in time scheme was proposed for rotor dynamics involving nonlinear factors, in which the Euler angle representation was introduced into the dynamic rotor system for the description of the nonlinear motion of rotation. The swirling motion of the rotor system including the beam-disc combination was analyzed. The numerical results demonstrate the validity and correctness of the proposed method, which can be used for the analysis of swirling motion of rotor systems in various situations.

**Key words:** rotor dynamics; nonlinear; swirling motion; gyro; Euler angle

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (General Program)  
(11472067)