

一种修正的 Laplace-同伦摄动算法*

彭 博, 唐 烁

(合肥工业大学 数学学院, 合肥 230009)

摘要: 在 NDLT-HPM(非线性分布 Laplace-同伦摄动算法)的基础上,通过引入参数 h , 提出了一种修正的 NDLT-HPM(简称 MNDLT-HPM), 参数的引入使得求解更加灵活, 且能调节和控制级数解的收敛域, 克服了 NDLT-HPM 在嵌入参数 $p = 1$ 处级数解可能不收敛的局限性, 使得级数解可以有效地收敛至精确解, 从而获得足够精确的解析近似解, 两个数值实例表明了该算法的优越性和精确性。

关键词: NDLT-HPM; MNDLT-HPM; 参数; 微分方程

中图分类号: O189.33 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.07.009

引 言

客观世界中大多数自然现象究其本质而言是非线性的, 然而, 一般而言, 非线性问题很难求得精确解, 所以数值方法就成为人们解决非线性问题的主要手段。

几乎所有传统解析方法都是将一个非线性问题以某种方式转化为一系列线性子问题, 并利用这些子问题之解的线性组合来逼近原始非线性问题的解。对一些非线性数学物理方程, 特别是一些可积的非线性系统, 已建立了许多求其精确解或特解的方法, 如函数展开法^[1], Darboux(达布)变换法^[2], 双线性导数法^[3], 反散射变换方法^[4]等等。摄动法^[5-8]是使用最为广泛的解析近似方法, 已经成功地解决了科学和工程中的许多问题。本质上, 摄动法将非线性方程之解按照某个物理小参数展为无穷级数, 并以该物理小参数为基础进行量级分析, 将原始非线性问题转化为一系列线性子问题, 但摄动法有一些致命的缺陷, 如过分依赖小参数, 仅限于弱非线性问题, 对于强非线性问题往往失效等。

为了克服摄动法的局限性, 一些非摄动法被逐渐提出, 如 Adomian 分解法^[9-10], Lyapunov 人工参数法^[11], δ 展开法^[12]等, 然而并没有从根本上克服这些局限性, 且收敛半径有限, 没有提供一个方便有效的途径确保级数解收敛到原始方程之解, 而且这些非摄动法通常也只适用于弱非线性问题。

直到 1992 年廖士俊首次将拓扑理论中同伦思想用于求解非线性微分方程近似解^[13], 1997 年, 廖士俊对同伦分析进一步完善, 提出“广义同伦”的概念^[14], 从而克服了摄动法和非

* 收稿日期: 2014-12-24; 修订日期: 2015-03-09

基金项目: 国家自然科学基金(61272024)

作者简介: 彭博(1989—), 男, 安徽阜阳人, 硕士(通讯作者. E-mail: 1083283508@qq.com);

唐烁(1964—), 男, 安徽巢湖人, 教授, 硕士生导师。

摄动法的局限性.

受同伦分析思想的启发,本文在 Filobello-Nino 等^[15]提出的 NDLT-HPM 的基础上引入参数 h ,对 NDLT-HPM 做了修正(简记 MNDLT-HPM).通过适当地选取参数 h 可确保级数解在 $p = 1$ 处收敛,克服了 NDLT-HPM 在 $p = 1$ 处可能不收敛的局限性,并且提供了一条调节和控制级数解收敛区域和收敛速度的途径.和 NDLT-HPM 相比更加灵活和自由,且很容易证明 NDLT-HPM 仅为 MNDLT-HPM 在引入参数 $h = 1$ 时的一个特例.由此可以看出 MNDLT-HPM 的优越性和合理性,并通过具体的例子验证该算法的可行性和优越性.

1 同伦摄动法^[15]

设微分方程有如下形式:

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega, \quad B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma,$$

其中 A 是一个普通微分算子, B 是一边界算子, $f(r)$ 是已知解析函数, Γ 是区域 Ω 的边界.若 A 可以分成 L, N 两个算子,其中 L 是线性算子, N 是非线性算子,则可写为

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0.$$

建立同伦映射:

$$u(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}.$$

于是可以得到

$$H(U, p) = (1 - p)[L(U) - L(u_0)] + p[L(U) + N(U) - f(r)] = 0, \\ p \in [0, 1], \quad r \in \Omega,$$

其中 p 是同伦嵌入参数, u_0 是初始近似值.易知当 p 从 0 变化到 1 的过程中, U 从初始近似值 u_0 变化到原始方程的解 u ,在拓扑学的同伦理论中,这种连续变化称为同伦变形.若方程的解写成 p 的幂级数的形式:

$$U = v_0 + v_1 p + v_2 p^2 + v_3 p^3 + \dots,$$

通过比较方程两边 p 的次幂确定其系数.当 $p \rightarrow 1$ 时,原始方程近似解可表示为

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} U = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots.$$

2 MNDLT-HPM 的提出

2012 年 Vazquez-Leal 等^[16]提出了一种同伦摄动算法的修正版本,即

$$H(U, p) = (1 - p)[L(U) - L(u_0)] + p[L(U) + N(U, p) - f(r, p)] = 0.$$

将嵌入参数 p 加入到非线性算子和已知解析函数中,这样做的好处是有时可以降低运算的复杂性,增加其灵活性.显然,当 $p \rightarrow 1$ 时,上式变形为传统的同伦摄动算法.

2014 年 Filobello-Nino 等将 Laplace 变换和上式结合到一起,提出了尤其对于含有非齐次项的微分方程有效的一种算法(简称 NDLT-HPM).

本文受同伦分析思想的启发,引入了参数 h ,提出了一种修正的 NDLT-HPM(简记 MNDLT-HPM).

$$H(U, p) = (1 - p)[L(U) - L(u_0)] + ph[L(U) + N(U, p) - f(r, p)] = 0,$$

即

$$L(U) - L(u_0) - pL(U) + pL(u_0) + phL(U) + phN(U, p) - phf(r, p) = 0.$$

将上述方程变形并两边由 Laplace 变换可得

$$\mathfrak{S}[(1 - p + hp)L(U)] = \mathfrak{S}[L(u_0) - pL(u_0) + ph(f(r, p) - N(U, p))],$$

即

$$[1 + (h - 1)]U = \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{S^n} \right) [1 + (h - 1)p] \left(\sum_{i=0}^{n-1} S^{n-1-i} U^{(i)}(0) \right) + \left(\frac{1}{S^n} \right) \mathfrak{S} [L(u_0) - pL(u_0) + ph(f(r, p) - N(U, p))] \right\}.$$

令

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} v_n p^n, f(r, p) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(r) p^m,$$

则上式变形为

$$\begin{aligned} & v_0 + [v_1 + (h - 1)v_0]p + [v_2 + (h - 1)v_1]p^2 + \\ & [v_3 + (h - 1)v_2]p^3 + \cdots + [v_j + (h - 1)v_{j-1}]p^j + \cdots = \\ & \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{S^n} \right) \left[\sum_{i=0}^{n-1} S^{n-1-i} U^{(i)}(0) \right] + \mathfrak{S} [L(u_0)] \right\} p^0 + \\ & \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{S^n} \right) \left((h - 1) \left[\sum_{i=0}^{n-1} S^{n-1-i} U^{(i)}(0) \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. \mathfrak{S} [L(u_0) + hf_0(r) - hN(v_0)] \right) \right\} p^1 + \\ & \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \left(\frac{h}{S^n} \right) \mathfrak{S} [f_0(r) + f_1(r)p - N(v_0 + v_1 p, p)] \right\} p^2 + \\ & \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \left(\frac{h}{S^n} \right) \mathfrak{S} [f_0(r) + f_1(r)p + f_2(r)p^2 - N(v_0 + v_1 p + v_2 p^2, p)] \right\} p^3 + \cdots + \\ & \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \left(\frac{h}{S^n} \right) \mathfrak{S} \left[\sum_{m=0}^{j-1} f_m(r) p^m \right] - N \left(\sum_{n=0}^{j-1} v_n p^n, p \right) \right\} p^j + \cdots. \end{aligned}$$

通过比较 p 的次数可知

$$\begin{aligned} p^0: v_0 &= \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{S^n} \right) \left[\sum_{i=0}^{n-1} S^{n-1-i} U^{(i)}(0) \right] + \mathfrak{S} [L(u_0)] \right\}, \\ p^1: v_1 + (h - 1)v_0 &= \\ & \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{S^n} \right) \left((h - 1) \left[\sum_{i=0}^{n-1} S^{n-1-i} U^{(i)}(0) \right] - \mathfrak{S} [L(u_0) + hf_0(r) - hN(v_0)] \right) \right\}, \\ p^2: v_2 + (h - 1)v_1 &= \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \left(\frac{h}{S^n} \right) \mathfrak{S} [f_0(r) + f_1(r)p - N(v_0 + v_1 p, p)] \right\}, \\ p^3: v_3 + (h - 1)v_2 &= \\ & \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \left(\frac{h}{S^n} \right) \mathfrak{S} [f_0(r) + f_1(r)p + f_2(r)p^2 - N(v_0 + v_1 p + v_2 p^2, p)] \right\}, \\ & \vdots \\ p^j: v_j + (h - 1)v_{j-1} &= \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \left(\frac{h}{S^n} \right) \mathfrak{S} \left[\sum_{m=0}^{j-1} f_m(r) p^m - N \left(\sum_{n=0}^{j-1} v_n p^n, p \right) \right] \right\}, \\ & \vdots \end{aligned}$$

不妨令 $U^{(i)}(0) = \alpha_i (i = 0, 1, \dots, n - 1)$, α_i 为常数, 则原方程级数解可表示为

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} U = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots.$$

3 数值实例与参数曲线

例 1 已知 $V(t)$ 满足 $V'(t) + V^2(t) = 1, V(0) = 0$, 求解 $V(t)$ 的近似解.

利用文献[15]提出的 NDLT-HPM 来求方程的近似解, 可知:

由该微分方程形式我们可选取 $V_0(t) = t$ 作为 $V(t)$ 的初始解, 线性算子 $L(V) = V'(t)$, 非线性算子 $N(V) = V^2(t)$, 则

$$(1-p)(V'(t) - V_0'(t)) + p(V'(t) + V^2(t) - 1) = 0,$$

$$V'(t) = 1 - pV^2(t).$$

两边由 Laplace 变换可得

$$SF(S) = \mathfrak{S}(1 - pV^2(t)),$$

即

$$V(t) = \mathfrak{S}^{-1} \left[\left(\frac{1}{S} \right) \mathfrak{S}(1 - pV^2(t)) \right].$$

设

$$V(t) = v_0 + v_1 p + v_2 p^2 + v_3 p^3 + \dots,$$

即

$$v_0 + v_1 p + v_2 p^2 + v_3 p^3 + v_4 p^4 =$$

$$\mathfrak{S}^{-1} \left[\left(\frac{1}{S} \right) \mathfrak{S} \left[1 - v_0^2 p - 2v_0 v_1 p^2 - (v_1^2 + 2v_0 v_2) p^3 - (2v_0 v_3 + 2v_1 v_2) p^4 \right] \right],$$

即

$$p^0: v_0 = \mathfrak{S}^{-1} \left[\left(\frac{1}{S} \right) \mathfrak{S}(1) \right] = t,$$

$$p^1: v_1 = \mathfrak{S}^{-1} \left[\left(\frac{1}{S} \right) \mathfrak{S}(-v_0^2) \right] = -\frac{1}{3} t^3,$$

$$p^2: v_2 = \mathfrak{S}^{-1} \left[\left(\frac{1}{S} \right) \mathfrak{S}(-2v_0 v_1) \right] = \frac{2}{15} t^5,$$

$$p^3: v_3 = \mathfrak{S}^{-1} \left[\left(\frac{1}{S} \right) \mathfrak{S}(-v_1^2 - 2v_0 v_2) \right] = -\frac{17}{315} t^7,$$

$$p^4: v_4 = \mathfrak{S}^{-1} \left[\left(\frac{1}{S} \right) \mathfrak{S}(-2v_0 v_3 - 2v_1 v_2) \right] = \frac{62}{2 \cdot 835} t^9,$$

则该微分方程的 4 阶近似解可表示为

$$v(t) = \lim_{p \rightarrow 1} V(t) = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 =$$

$$t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{2}{15} t^5 - \frac{17}{315} t^7 + \frac{62}{2 \cdot 835} t^9.$$

接下来, 利用本文提出的 MNDLT-HPM 来求解方程的近似解.

选取 $V_0(t) = t$ 作为 $V(t)$ 的初始解, 线性算子 $L(V) = V'(t)$, 非线性算子 $N(V) = V^2(t)$, 则

$$(1-p)(V'(t) - V_0'(t)) + hp(V'(t) + V^2(t) - 1) = 0,$$

即

$$[1 + (h-1)p]V'(t) = 1 - p + hp - hpV^2(t).$$

两边由 Laplace 变换可得

$$[1 + (h - 1)p]V(t) = \mathfrak{S}^{-1} \left[\left(\frac{1}{S} \right) \mathfrak{S}(1 - p + hp - hpV^2(t)) \right].$$

设

$$V(t) = v_0 + v_1p + v_2p^2 + v_3p^3 + v_4p^4 + \dots,$$

则

$$\begin{aligned} &v_0 + [v_1 + (h - 1)v_0]p + [v_2 + (h - 1)v_1]p^2 + \\ &[v_3 + (h - 1)v_2]p^3 + [v_4 + (h - 1)v_3]p^4 = \\ &\mathfrak{S}^{-1} \left[\left(\frac{1}{S} \right) \mathfrak{S}[1 + (h - 1 - hv_0^2)p - 2hv_0v_1p^2 - \right. \\ &\left. h(v_1^2 + 2v_0v_2)p^3 - 2h(v_0v_3 + 2v_1v_2)p^4] \right], \end{aligned}$$

$$p^0: v_0 = \mathfrak{S}^{-1} \left[\left(\frac{1}{S} \right) \mathfrak{S}(1) \right] = t,$$

$$p^1: v_1 + (h - 1)v_0 = \mathfrak{S}^{-1} \left[\left(\frac{1}{S} \right) \mathfrak{S}(h - 1 - hv_0^2) \right] = -(1 - h)t - \frac{h}{3}t^3,$$

$$p^2: v_2 + (h - 1)v_1 = \mathfrak{S}^{-1} \left[\left(\frac{1}{S} \right) \mathfrak{S}(-2hv_0v_1) \right] = \frac{2h^2}{15}t^5,$$

$$p^3: v_3 + (h - 1)v_2 = \mathfrak{S}^{-1} \left[\left(\frac{1}{S} \right) \mathfrak{S}(-hv_1^2 - 2hv_0v_2) \right] = \frac{2h^2(1 - h)}{15}t^5 - \frac{17h^3}{315}t^7,$$

$$\begin{aligned} p^4: v_4 + (h - 1)v_3 = &\mathfrak{S}^{-1} \left[\left(\frac{1}{S} \right) \mathfrak{S}(-2hv_0v_3 - 4hv_1v_2) \right] = \\ &-\frac{2h^2(1 - h)^2}{15}t^5 - \frac{34h^3(1 - h)}{315}t^7 + \frac{62h^4}{2 \cdot 835}t^9. \end{aligned}$$

通过比较 p 的次数可知

$$v_0 = t,$$

$$v_1 = -\frac{h}{3}t^3,$$

$$v_2 = \frac{2h^2}{15}t^5 - \frac{h(1 - h)}{3}t^3,$$

$$v_3 = -\frac{17h^3}{315}t^7 + \frac{4h^2(1 - h)}{15}t^5 - \frac{h(1 - h)^2}{3}t^3,$$

$$v_4 = \frac{62h^4}{2 \cdot 835}t^9 - \frac{17h^3(1 - h)}{105}t^7 + \frac{2h^2(1 - h)^2}{15}t^5 - \frac{h(1 - h)^3}{3}t^3.$$

显然当 $h = 1$ 时,该微分方程的 4 阶近似解可表示为

$$v(t) = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \frac{62}{2 \cdot 835}t^9.$$

故易知 NDLT-HPM 仅为 MNDLT-HPM 在 $h = 1$ 时一个特例.对于 m 阶近似解

$$V(t) \approx \sum_{k=0}^m v_k(t) = \sum_{n=0}^m u_0^{m,n}(h) a_{2n+1} t^{2n+1},$$

其中 a_{2n+1} 与 NDLT-HPM 中对应系数一样,且 a_{2n+1} 可以定义如下:

$$u_0^{m,n}(h) = \sum_{j=0}^{m-n} \binom{n-1+j}{j} h^n (1-h)^j.$$

易知 $u_0^{m,n}(1) = 1, n \leq m$, 且对于任意有限整数 n 有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_0^{m,n} = \begin{cases} 1, & |1 - h| < 1, \\ \infty, & |1 - h| > 1, \end{cases}$$

则解级数收敛的必要条件为 $|1 - h| < 1$, 即 $0 < h < 2$. 通过绘制 h 曲线可以选取更加精确的 h 的有效区域, 从而选取有效的 h 值, 如图 1 所示. 收敛区域依赖于 h 的值, 收敛区域为 $0 \leq t \leq \rho_0 \sqrt{2/|h| - 1}$, 其中 ρ_0 为由 NDLT-HPM 求得级数解的收敛半径, $\rho_0 \approx 1.5$. 因此我们可以看出,

选取适当的 h 值可以调节和控制级数解的收敛区域. 以 4 阶为例, 通过选取不同的 h 值, 得到几条不同逼近曲线, 如图 2 所示. 通过比较很容易发现当 $h = 0.8$ 比当 $h = 1$, 即比用 NDLT-HPM 得到的逼近效果要好, 在这里, $h = 0.8$ 并不是最优的取值, 只是说明 NDLT-HPM 不是最优的算法, 还有改进的地方. 关于 h 的最优取值问题目前主要有以下 3 种方法: h 曲线法^[17]、Marinca 法^[18-19]和单步优化方法^[20]. 为了更加直观和简便, 采用绘制 h 曲线的方法来估计 h 的有效值, 为了更具体地观察不同 h 值对应的误差, 可以查看误差曲线及误差表格, 如图 3 及表 1 所示.

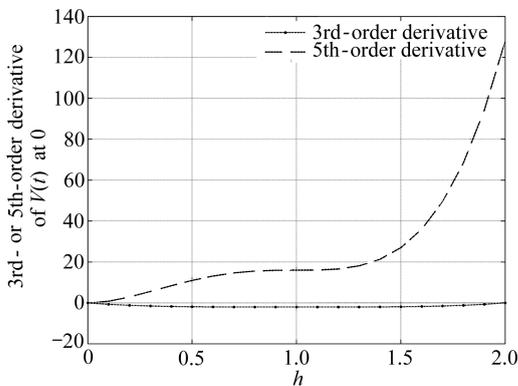


图 1 例 1 中的 h - 曲线

Fig. 1 The h - curves in case 1

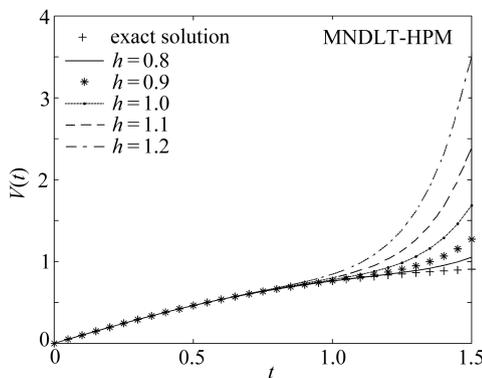


图 2 例 1 中利用修正的 Laplace-同伦摄动算法 (MNDLT-HPM) 绘制的不同的 h 值所对应的逼近曲线

Fig. 2 The corresponding approximate curves for different h values with the modified Laplace-homotopy perturbation method(MNDLT-HPM) in case 1

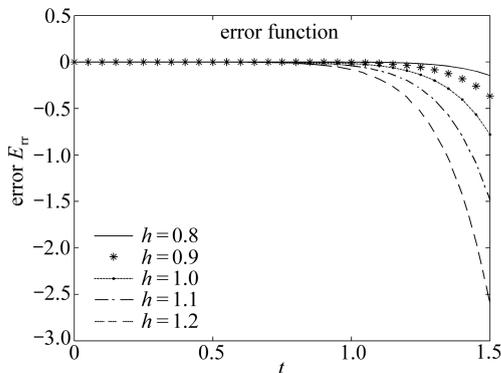


图 3 例 1 中的不同 h 值对应的误差曲线

Fig. 3 The corresponding error curves for different h curves in case 1

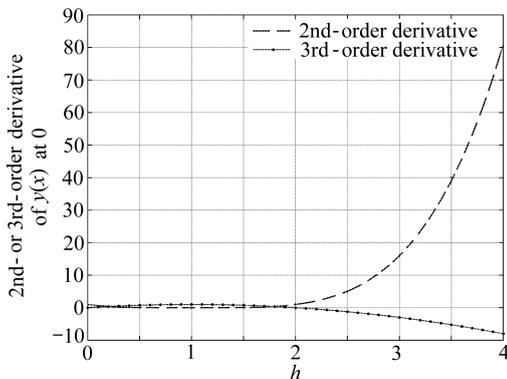


图 4 例 2 中的 h - 曲线

Fig. 4 The h - curves in case 2

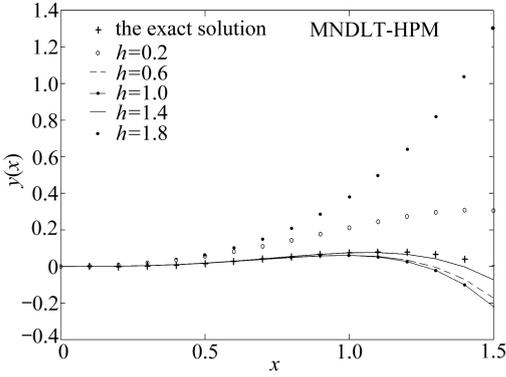


图5 例2中利用修正的 Laplace-同伦摄动算法(MNDLT-HPM)绘制的不同的 h 值所对应的逼近曲线

Fig. 5 The corresponding approximate curves for different h values with the MNDLT-HPM in case 2

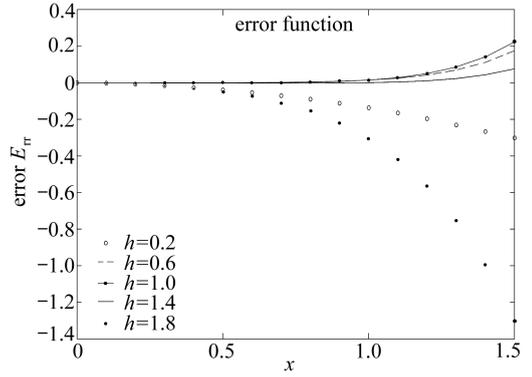


图6 例2中的不同 h 值对应的误差曲线

Fig. 6 The corresponding error curves for different h curves in case 2

表1 不同 h 值对应的误差的绝对值

Table 1 The corresponding absolute value errors for different h values

t	h				
	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
0	0	0	0	0	0
0.1	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
0.2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
0.3	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
0.4	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 1
0.5	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 1	0.000 5
0.6	0.000 0	0.000 0	0.000 1	0.000 5	0.001 7
0.7	0.000 1	0.000 1	0.000 5	0.001 9	0.005 2
0.8	0.000 1	0.000 4	0.001 9	0.005 8	0.014 2
0.9	0.000 0	0.001 7	0.005 9	0.015 8	0.035 6
1.0	0.000 9	0.005 3	0.016 2	0.039 4	0.083 3
1.1	0.003 6	0.014 8	0.040 3	0.091 4	0.183 1
1.2	0.011 0	0.036 9	0.092 5	0.198 4	0.380 6
1.3	0.028 8	0.084 7	0.199 0	0.407 1	0.753 2
1.4	0.067 4	0.181 3	0.404 1	0.795 1	1.427 5
1.5	0.145 6	0.366 0	0.780 7	1.486 7	2.602 2

例2 已知 $y(x)$ 满足 $d^2y/dx^2 + y = x\cos(2x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, 求解 $y(x)$.

由该方程是线性微分方程, 易知该微分方程的精确解为

$$y(x) = -\frac{5}{9} \sin x - \frac{1}{3} x\cos(2x) + \frac{4}{9} \sin(2x) .$$

接下来采用 MNDLT-HPM 来处理该方程的近似解, 选取线性算子 $L(y) = y''$, 非线性算子 $N(y) = y - x\cos(2x)$, 初始值选取 $y_0 = x^2/2$,

$$(1 - p)(y'' - y_0'') + hp(y'' + y - x\cos(2x)) = 0,$$

令 $\cos(2x) = p^2(1 - 2x^2)$, 则上式变形为

$$[1 + (h - 1)p]y'' = 1 - p - hpy + hx(1 - 2x^2)p^3.$$

设

$$y(x) = v_0 + v_1p + v_2p^2 + v_3p^3 + v_4p^4 + \dots,$$

两边由 Laplace 变换可知

$$[1 + (h - 1)p]S^2F(S) = \mathfrak{S}[1 - p - hp(v_0 + v_1p + v_2p^2 + v_3p^3 + \dots) + hx(1 - 2x^2)p^3].$$

由 Laplace 逆变换可知

$$[1 + (h - 1)p]y = \mathfrak{S}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{S^2}\right)\mathfrak{S}[1 + (-1 - hv_0)p - hv_1p^2 + (hx - 2hx^3 - hv_2)p^3 - hv_3p^4]\right\}.$$

通过比较 p 的次数可知

$$\begin{aligned} p^0: v_0 &= \mathfrak{S}^{-1}\left[\left(\frac{1}{S^2}\right)\mathfrak{S}(1)\right], \\ p^1: v_1 + (h - 1)v_0 &= \mathfrak{S}^{-1}\left[\left(\frac{1}{S^2}\right)\mathfrak{S}(-hv_0 - 1)\right], \\ p^2: v_2 + (h - 1)v_1 &= \mathfrak{S}^{-1}\left[\left(\frac{1}{S^2}\right)\mathfrak{S}(-hv_1)\right], \\ p^3: v_3 + (h - 1)v_2 &= \mathfrak{S}^{-1}\left[\left(\frac{1}{S^2}\right)\mathfrak{S}(hx - 2hx^3 - hv_2)\right], \\ p^4: v_4 + (h - 1)v_3 &= \mathfrak{S}^{-1}\left[\left(\frac{1}{S^2}\right)\mathfrak{S}(-hv_3)\right]. \end{aligned}$$

经计算,该微分方程的 4 阶近似解为

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \\ &= \frac{(h - 1)^4}{2}t^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{h}{6}\right)ht^3 + \frac{h(h - 1)^3}{6}t^4 + \left(\frac{11h}{120} - \frac{1}{5}\right)ht^5 + \\ &= \frac{h^2(h - 1)^2}{120}t^6 + \frac{h^2}{420}t^7 + \frac{h^3(h - 1)}{10\,080}t^8 + \frac{h^4}{3\,828\,800}t^{10}. \end{aligned}$$

当 $h = 1$ 时,该微分方程的 4 阶近似解可表示为

$$v(t) = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \frac{1}{6}t^3 - \frac{13}{120}t^5 + \frac{1}{420}t^7 + \frac{1}{3\,628\,800}t^{10},$$

即为利用 NDLT-HPM 所求近似解。

通过观察可以发现,级数解的收敛区域和收敛速度由参数 h 决定,因此辅助参数提供了一个调节和控制级数解之收敛区域和收敛速度的简便途径,通过选取适当的辅助参数,可以大大扩展解析近似解的收敛区间和近似精度.当其它解析方法给出的解发散时,选取适当的辅助参数,用 MNDLT-HPM 可得到收敛的解.通过绘制 h 曲线(如图 4)找出 h 的有效区域,通过选取 h 的有效值可以绘制出针对不同 h 值的逼近曲线,如图 5.同时可根据图 6 或表 2 观察相应的误差曲线和误差表格,就所取的 5 个 h 值而言,当 $h = 1.4$ 时总体逼近和收敛效果是最好的。

表 2 不同 h 值对应的误差的绝对值Table 2 The corresponding absolute value errors for different h values

x	h				
	0.2	0.6	1.0	1.4	1.8
0	0	0	0	0	0
0.1	0.001 9	0.000 1	0.000 0	0.000 1	0.002 0
0.2	0.007 3	0.000 3	0.000 0	0.000 3	0.007 6
0.3	0.015 6	0.000 4	0.000 0	0.000 6	0.016 9
0.4	0.026 2	0.000 4	0.000 0	0.000 8	0.030 4
0.5	0.038 9	0.000 0	0.000 1	0.001 0	0.049 1
0.6	0.053 6	0.000 8	0.000 4	0.001 2	0.074 6
0.7	0.070 3	0.002 2	0.001 3	0.001 3	0.109 5
0.8	0.089 5	0.004 5	0.003 2	0.001 3	0.156 8
0.9	0.111 3	0.008 3	0.007 1	0.000 8	0.220 5
1.0	0.136 3	0.014 6	0.014 6	0.000 6	0.305 5
1.1	0.164 7	0.025 2	0.028 0	0.003 9	0.417 7
1.2	0.196 4	0.042 3	0.050 4	0.017 0	0.564 2
1.3	0.230 8	0.069 6	0.086 2	0.023 0	0.753 2
1.4	0.266 6	0.111 8	0.141 3	0.043 6	0.994 5
1.5	0.301 5	0.175 4	0.223 0	0.076 2	1.299 6

4 结 论

本文在 NDLT-HPM 的基础上提出了 MNDLT-HPM, 较前者相比有明显的优势. 参数 h 的引入使得该算法更加灵活多变, 且 NDLT-HPM 仅为 MNDLT-HPM 在 $h = 1$ 的一个特例, 在此体现了该算法的合理性. 通过绘制 h 曲线, 让我们更加直观地知道 h 的有效区域, 在此有效区域内选取一个 h 值, 就可以确保相应的级数解收敛, 克服了 NDLT-HPM 在 $p = 1$ 处可能不收敛的局限性, 且提供了一条调节和控制级数解收敛区域和收敛速度的途径. 作为加快收敛的方法之一, Padé 逼近被广泛采用, 本文在考虑非齐次项时用 Taylor 公式来进行逼近, 当然我们也可以不用 Padé 逼近来近似表示非齐次项, 在此不再详述. 本文也有一些不足之处, 如当 Laplace 变换不存在时, MNDLT-HPM 是无效的, 故 MNDLT-HPM 是建立在 Laplace 变换存在的基础上的.

参考文献 (References):

- [1] 楼森岳, 唐晓艳. 非线性数学物理方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2006. (LOU Sen-yue, TANG Xiao-yan. *The Method of Nonlinear Mathematical and Physical* [M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese))
- [2] 谷超豪, 胡和生, 周子翔. 孤生子理论中的达布变换及其几何应用 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1999. (GU Chao-hao, HU He-sheng, ZHOU Zi-xiang. *Darboux Transformation in Soliton Theory and Its Geometric Applications* [M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1999. (in Chinese))
- [3] 陈登远. 孤子引论 [M]. 北京: 科学出版社, 2006. (CHEN Deng-yuan. *Soliton Introduction* [M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese))

- [4] Ablowitz M J, Clarkson P A. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* [M]. 世界图书出版公司北京公司, 2000.
- [5] Golbabai A, Javidi M. A third-order Newton type method for nonlinear equations based on modified homotopy perturbation method[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **191**(1): 199-205.
- [6] WANG Fei, LI Wei, ZHANG Hong-qing. A new extended homotopy perturbation method for nonlinear differential equations[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2012, **55**(3/4): 1471-1477.
- [7] HE Ji-huan. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2003, **135**(1): 73-79.
- [8] Biazar J, Ghazvini H. Convergence of the homotopy perturbation method for partial differential equations[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, **10**(6): 2633-2640.
- [9] Adomian G. Nonlinear stochastic differential equations[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1976, **12**(55): 441-452.
- [10] Adomian G, Adomian G E. A global method for solution of complex systems[J]. *Mathematical Modelling*, 1984, **5**(4): 251-263.
- [11] Lyapunov A M. *The General Problem on Stability of Motion* [M]. London: Taylor & Francis, 1992.
- [12] Skirmishing A V, Zhukov A T, Kolovos V G. *Methods of Dynamics Calculation and Testing for Thin-Walled Structures* [M]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1990.
- [13] LIAO Shi-jun. The proposed homotopy analysis technique for the solutions of nonlinear problems[D]. PhD Thesis. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 1992.
- [14] LIAO Shi-jun. A kind of approximate solution technique which does not depend upon small parameters—II: an application in fluid mechanics[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1997, **32**(5): 815-822.
- [15] Filobello-Nino U, Vazquez-Leal H, Benhammouda B, Hernandez-Martinez L, Hoyos-Reyes C, Perez-Sesma J A, Jimenez-Fernandez V M, Pereyra-Diaz D, Marin-Hernandez A, Diaz-Sanchez A, Huerta-Chua J, Cervantes-Perez J. Nonlinearities distribution Laplace transform-homotopy perturbation method[J]. *Springer Plus*, 2014, **28**(3): 1-13.
- [16] Vazquez-Leal H, Sarmiento-Reyes A, Khan Y, Flabella-Nino U, Diaz-Sanchez A. Rational biparameter homotopy perturbation method and Laplace-Padé coupled version[J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, **23**(21): 456-467.
- [17] LIAO Shi-jun. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* [M]. Chapman & Hall/Croppers, 2003.
- [18] Marinca V, Harrison N. Application of optimal homotopy asymptotic method for solving nonlinear equations arising in heat transfer[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2008, **35**(6): 710-715.
- [19] Marinca V, HERSANU N. An optimal homotopy asymptotic method applied to the steady flow of a fourth-grade fluid past a porous plate[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2009, **22**(2): 245-251.
- [20] 牛照. 非线性问题中的优化同伦分析方法[D]. 硕士学位论文. 上海: 上海交通大学, 2010.(NIU Zhao. Optimized homotopy method in nonlinear problem [D]. Master Thesis. Shanghai:

Shanghai Jiao Tong University, 2010. (in Chinese)

A Modified Laplace-Homotopy Perturbation Algorithm

PENG Bo, TANG Shuo

(*School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, P.R.China*)

Abstract: A modified NDLT-HPM (MNDLT-HPM for short) was proposed through introduction of a parameter into the NDLT-HPM (nonlinearities distribution Laplace transform-homotopy perturbation method). This parameter makes the solving process for the nonlinear differential equations more flexible and is able to adjust and control the convergence region of the series solution, meanwhile overcomes the limitations of the NDLT-HPM that the series solution may be non-convergent when embedded parameter p equals 1. The present algorithm gives series solutions which converge well to the corresponding exact ones, thus obtaining sufficiently accurate approximate analytical solutions. 2 numerical examples show the advantage and accuracy of this method.

Key words: NDLT-HPM; MNDLT-HPM; parameter; differential equation

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(61272024)