

弹性波在星形节点周期结构蜂窝材料中的传播特性研究*

负昊¹, 邓子辰^{1,2}, 朱志韦²

(1. 西北工业大学 土木与建筑工程系, 西安 710072;

2. 西北工业大学 工程力学系, 西安 710072)

(本刊编委邓子辰来稿)

摘要: 星形节点周期结构蜂窝材料是具有负 Poisson(泊松)比效应的一种结构性材料.采用有限元方法对其离散并结合 Bloch 定理来分析弹性波在其内部传播的带隙问题.结果表明:星形节点周期结构蜂窝材料存在宽大的频率禁带且禁带的位置和大小相对稳定;同时星形节点本身的旋转共振模态是材料最低阶禁带形成的主要原因.星形节点周期结构蜂窝材料的以上带隙特性使其在工程中减震降噪方面具有潜在的应用价值.

关键词: 星形节点蜂窝材料; 负 Poisson 比效应; 频率带隙; 旋转共振模态

中图分类号: O326; O328 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.08.003

引言

负 Poisson 比材料有别于一般材料的特性是:当材料受到单向拉伸时,其垂直方向向外扩展;而当材料受到单向压缩时,其横截面向内凹陷.这种特殊的变形模式使得负 Poisson 比材料相对传统材料具有高剪切模量和抗冲击性.材料的负 Poisson 比特性与材料内部微结构的形式和变形模式有密切的联系.节点内凹构形和旋转手性构形是两种产生负 Poisson 比效应的主要微结构构形^[1].Lakes^[2]在 1987 年发现了第一种具有负 Poisson 比特性的多孔材料,这种材料内部具有大量的内凹微结构构形.随后 Prall 等^[3]在 1997 年提出具有 Poisson 比为-1 的六边形手性蜂窝材料.自此,负 Poisson 比材料引起了众多学者的兴趣.一方面寻找具有负 Poisson 比效应的新微结构形式,另一方面对负 Poisson 比材料的各种物理性质展开更深入的研究.与传统材料相比,负 Poisson 比材料具有一系列优良性质,如高剪切模量^[4],吸能效果明显^[5],同向曲率^[6]等.星形节点周期结构是内凹六边形蜂窝材料的一种衍生构形.星形 4 节点和 6 节点均具

* 收稿日期: 2015-03-13; 修订日期: 2015-06-17

基金项目: 国家自然科学基金(11172239); 高校博士点基金(20126102110023); 工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学)开放基金(GZ0802)

作者简介: 负昊(1989—),男,山西晋中人,硕士生(E-mail: 2013261017@mail.nwpu.edu.cn);
邓子辰(1964—),男,辽宁人,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn);
朱志韦(1986—),男,河北衡水人,博士生(E-mail: zhuzhiwei@mail.nwpu.edu.cn).

有负 Poisson 比效应^[7-8]。

内凹六边形及旋转手性蜂窝材料一般为二维周期结构,因此弹性波在此类蜂窝材料中传播时会出现带隙现象.Ruzzene 等^[9]在 2003 年研究发现内凹六边形更有利于面外弹性波低频方向带隙的产生.而对于面内弹性波,内凹六边形周期结构没有出现全带隙,且方向带隙与普通六边形类似^[10].2009 年,Spadoni 等^[11]就手性六边形周期结构的带隙特性进行研究,结果表明,手性六边形中心圆环的变形是产生低频带隙的重要原因.随后 Liu 等^[12]以手性六边形为基体,在圆环中添加共振物,来产生更低频全带隙.星形节点周期蜂窝结构和手性周期结构具有相类似结构特性:中心节点为一闭合的微结构,而正是这种微结构的变形使得原结构的低频带隙的产出成为可能.本文就星形 4 节点周期蜂窝材料的带隙特性进行研究.首先给出星形 4 节点周期结构的几何特性;其次通过有限元方法并结合 Bloch 定理求得结构材料的色散关系;然后分析星形节点几何参数对带隙的影响;最后为本文工作的总结。

1 星形 4 节点周期结构

星形节点由内凹箭头节点拼接而成,图 1 为星形四边形周期蜂窝材料示意图.图中基本胞体用虚线表示,单胞沿基向量(e_1, e_2)平铺得到整个周期结构.图 2 为单胞几何参数图, L 和 t 为单胞间连接梁长度及高度, L_s 和 t_s 分别为星形节点梁长度及高度;内凹箭头节点内夹角为 α ,箭头节点间夹角用 β 表示.在星形正方形结构下, $\beta = 2\alpha - 90^\circ$,其中 $\alpha \in (45^\circ, 90^\circ]$.当 $\alpha = 90^\circ$ 时,星形节点变为正方形节点。

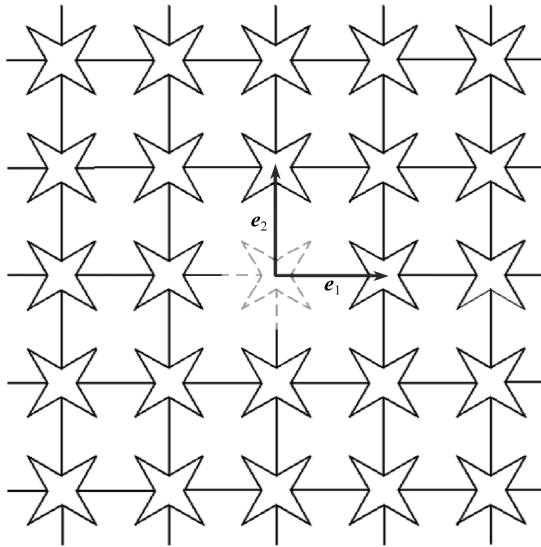


图 1 星形四边形周期蜂窝材料示意图

Fig. 1 Periodic honeycomb lattices of 4-point star-shaped configuration

2 频率带隙分析

2.1 Bloch 定理

正如所有的周期型结构中一样,任何一个点的位置都可以通过一组包括一个基元单胞和一组基向量(如图 1 中的(e_1, e_2))的组合来表示.取一个参考代表体单元作为基点,也就是研究波传播的起始点,距基点一定距离的(n_1, n_2)单胞中的 p 点就可以以(e_1, e_2)为基向量表示

出来: $\boldsymbol{\rho}_p(n_1, n_2) = \mathbf{r}_p + n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2$, 其中, \mathbf{r}_p 代表基元单胞 $(0, 0)$ 中 p 点对应的位置, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ 为基向量。

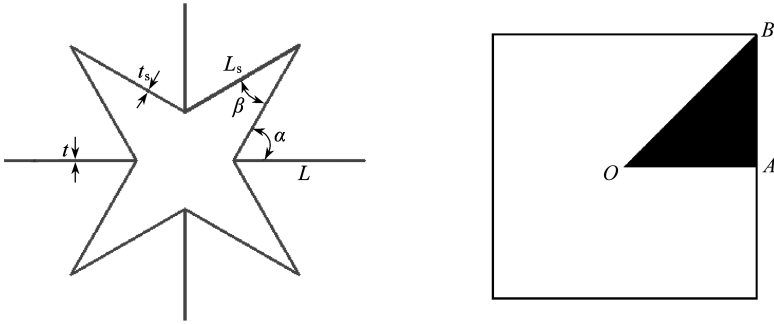


图2 单胞几何参数图

Fig. 2 The unit cell and its characteristic dimensions

如图1的这种结构中的波传播一般都应用 Bloch 定理.频率为 ω 的弹性波在参考单元胞中的 p 点的位移 \mathbf{w} 可以表示为

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}_p) = \mathbf{w}_{p_0} e^{i\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_p}, \quad (1)$$

式中 \mathbf{w}_{p_0} 表示振幅, \mathbf{k} 表示波矢.根据 Bloch 定理,位于 $\boldsymbol{\rho}_p(n_1, n_2)$ 的点的位移可以用 p 点的相对位移乘以一个由这两点位移差决定的修正量来表示,即

$$\mathbf{w}(\boldsymbol{\rho}_p) = \mathbf{w}(\mathbf{r}_p) e^{i\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\rho}_p - \mathbf{r}_p)} = \mathbf{w}(\mathbf{r}_p) e^{n_1 k_1 + n_2 k_2}, \quad (2)$$

式中 $k_i = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_i, i = 1, 2$. Bloch 定理表明波在胞结构之间传播的时候,振幅成比例的变化并不取决于胞结构在周期系统中的位置,因此可以通过研究参考单元胞来研究周期型结构的波传播特性.上式中的 $k_i = \delta_i + i\varepsilon_i (i = 1, 2)$ 是个复数,实部 δ_i 表示波从一个单胞向相邻单胞传播时振幅的衰减,虚部 ε_i 表示相位变化,因此 ε_i 常被称为相位常数.从而研究振幅没有衰减的波传播时就可以把实部设为 0,通过变化相位常数来研究它对频率的依赖性.

这个由 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ 为基向量表示的空间栅格为直观栅格,类似于 Prague 点阵,我们可以定义一个倒易空间,以 $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ 为基向量表示,这两个基的关系可以用 $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ 来表示,式中 δ_{ij} 为 Kronecker 函数,所以倒易空间的基就可以用原直观空间点阵的基表示出来.在倒易空间中,波矢 $\mathbf{k} = 2\pi\boldsymbol{\lambda}$ 可以表示为

$$\mathbf{k} = k_1 \mathbf{b}_1 + k_2 \mathbf{b}_2, \quad (3)$$

根据倒易空间的定义,可以得到波矢 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1 = k_1$.

直观的栅格结构表现了空间周期性,而倒易空间就描述了频率或者波数关系的周期性.这可以通过把 $\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\lambda} + m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 (m_1, m_2 \text{ 是整数})$ 代入 $\mathbf{k} = 2\pi\boldsymbol{\lambda}$ 后再代入式(1)中,得

$$\mathbf{w}(\boldsymbol{\rho}_p) = \mathbf{w}(\mathbf{r}_p) e^{n_1 k'_1 + n_2 k'_2}, \quad (4)$$

式中 $k'_i = 2\pi\boldsymbol{\lambda}' \cdot \mathbf{e}_i = k_i + 2\pi m_i, i = 1, 2$.

这就表明二维空间的波数在倒易空间中是关于波矢 \mathbf{k} 的周期性函数,因此,通过研究一个周期中它们的变化就可以得出波传播中波数对频率的依赖性.在二维空间中,这个周期对应于倒易空间中等于倒易单胞的区域.对应于那个周期的区域也被称为第一 Brillouin(布里渊)区.接下来的色散关系的分析运算就会用到第一 Brillouin 区.

2.2 有限元离散与色散关系

通过标准有限元离散,图2中单胞的动力控制方程可以写为

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{f}, \tag{5}$$

其中 ω 为振动频率, \mathbf{M} 和 \mathbf{K} 分别为单胞整体质量矩阵和刚度矩阵; 节点位移 $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_l, \mathbf{q}_b, \mathbf{q}_r, \mathbf{q}_u]^\top$, 节点力 $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_l, \mathbf{f}_b, \mathbf{f}_r, \mathbf{f}_u]^\top$. 在无外力作用时 $\mathbf{f}_i = \mathbf{0}$. 本文将单胞中每个连接梁离散为 6 个单元, 则单胞共有 72 个单元和 72 个节点. 离散单元类型选用 Timoshenko 梁单元, 对于一个离散节点 j , 其位移 $\mathbf{q}_j = (u_j, v_j, \theta_j)^\top$.

采用 Bloch 定理, 节点间的位移关系可表示为

$$\mathbf{q}_r = \exp(ik_1)\mathbf{q}_l, \quad \mathbf{q}_u = \exp(ik_2)\mathbf{q}_b, \tag{6}$$

其中 k_1, k_2 为相位常数, 其取值沿图 2 右图中的 $OABO$.

由式(6), 整体节点位移可以写成

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}[\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_l, \mathbf{q}_b]^\top, \tag{7}$$

其中

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\exp(ik_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}\exp(ik_2) \end{bmatrix}.$$

将式(7)代入方程(5)中, 方程两边同时乘以 \mathbf{T}^H , 可得

$$(\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}})[\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_l, \mathbf{q}_b]^\top = \tilde{\mathbf{f}}, \tag{8}$$

其中 $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^\text{H}\mathbf{K}\mathbf{T}$, $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{T}^\text{H}\mathbf{M}\mathbf{T}$, $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^\text{H}\mathbf{f}$. 经验证, $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$. 于是方程

$$(\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}})[\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_l, \mathbf{q}_b]^\top = \mathbf{0}. \tag{9}$$

方程(9)非零解要求 $\det(\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}) = 0$, 于是在给定 k_1, k_2 后就可求得频率 ω , 得到结构的色散曲线图.

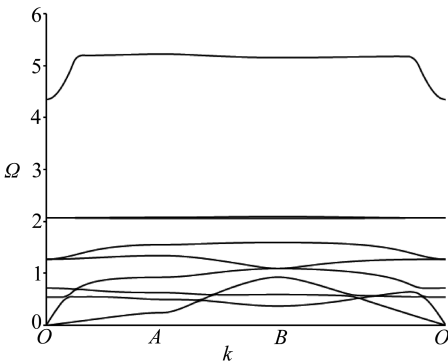


图 3 当选取 $L_s = L/2, \alpha = 50^\circ$ 时该结构的色散曲线图

Fig. 3 The dispersion curves for lattices with $L_s = L/2, \alpha = 50^\circ$

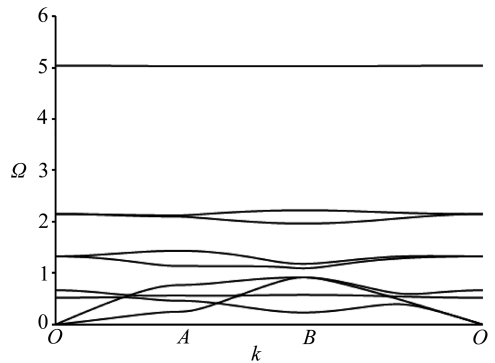


图 4 当选取 $L_s = L/2, \alpha = 70^\circ$ 时该结构的色散曲线图

Fig. 4 The dispersion curves for lattices with $L_s = L/2, \alpha = 70^\circ$

2.3 带隙结构分析

图 3 和图 4 分别为 $L_s = L/2, \alpha = 50^\circ$ 和 $\alpha = 70^\circ$ 时, 星形节点周期结构的色散曲线图. 图 3 中频率禁带出现在第 6 阶和第 7 阶色散线之间及第 8 阶和第 9 阶色散线之间, 其频率区域为 $(1.60, 2.06)$ 和 $(2.10, 4.35)$. 而在图 4 中, 有 3 个频率禁带出现, 相对于图 3, 新带隙出现在第 4

阶和第5阶色散线之间,3个频率区域分别为 $(0.92, 1.09)$ 、 $(1.44, 1.97)$ 和 $(2.22, 5.03)$ 。图3中第2个禁带区域和图4中第3个禁带区域为宽大带隙,其带隙宽度分别为2.25和2.81。宽大禁带的产生对于星形节点周期蜂窝材料在工程中的应用提供了优势。此外图3和图4中出现的平缓色散曲线,其与星形节点结构的变形有直接的联系。

图3和图4最大的区别是,最低阶禁带的出现。在 $\alpha = 50^\circ$ 时,第4阶和第5阶色散曲线在Brillouin区边界点 B 处相交,形成简并态。而此简并态在 $\alpha = 70^\circ$ 时被打开,形成频率最低的禁带。简并态的形成和打开与周期结构的对称性及微结构的变形模式有关。对于 $\alpha = 50^\circ$ 和 $\alpha = 70^\circ$ 的星形节点周期结构,其对称性并没有发生变化,于是简并态在 B 处的打开应从单胞的振动模式方面来分析。

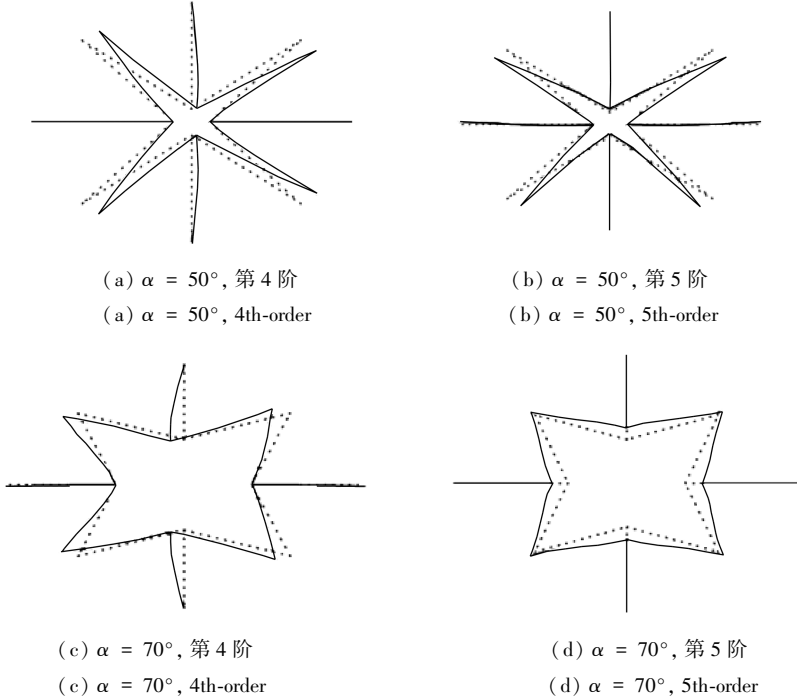


图5 当 $\alpha = 50^\circ$ 和 $\alpha = 70^\circ$ 时,星形结构单胞在第4阶和第5阶在 B 点处的模式变形图

Fig. 5 The 4th-order and 5th-order modal deformation at point B for various lattice configurations of $\alpha = 50^\circ$ and $\alpha = 70^\circ$

图5为 $\alpha = 50^\circ$ 和 $\alpha = 70^\circ$ 时,星形节点周期结构单胞在第4阶和第5阶在 B 点处的模式变形图。图中虚线为原始单胞结构图,实线为模式变形图。从图5(a)、(b)可以看出,星形节点单胞在 $\alpha = 50^\circ$ 时,其变形模式主要以星形节点梁的弯曲变形为主。图5(c)显示,星形节点单胞在 $\alpha = 70^\circ$ 时,在 B 处的第4阶振动模式的变形特征与 $\alpha = 50^\circ$ 时相似,都是以星形节点梁的弯曲变形为主;而在图5(d)中,单胞间梁没有变形,星形节点夹角 β 向外扩大,单胞整体以星形节点旋转共振模式为主。正是由于单胞变形模式的改变,使得色散图图4中第4阶和第5阶色散曲线在 B 处的分离,从而使得星形节点周期结构在 $\alpha = 70^\circ$ 时产出最低频率带隙。

3 结构参数对带隙的影响

3.1 带隙随角度 α 变化

图6为 $L_s/L = 1$ 时,星形节点周期结构频率禁带位置及宽度随夹角 α 变化趋势图。 α 的取

值范围为 $[47^\circ, 90^\circ]$.从图中可以看出,最低阶禁带在 $\alpha = 62^\circ$ 时出现,在 $\alpha = 78^\circ$ 时消失,并在 $\alpha = 72^\circ$ 时取最大值.而对第2和第3频率禁带,其带宽和位置在 $\alpha \in [64^\circ, 90^\circ]$ 范围内相对稳定.相对稳定的带隙分布使得星形节点周期蜂窝材料更具有工程应用价值.

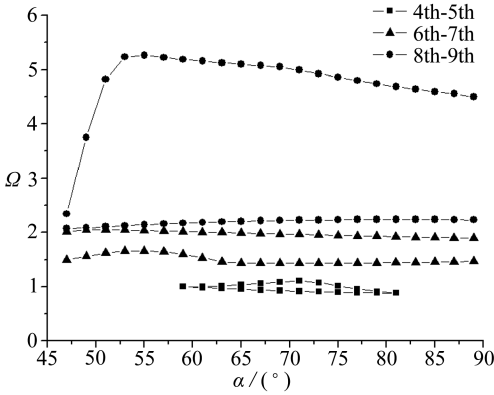


图6 当选取 $L_s/L = 1$,星形节点周期结构频率禁带位置及宽度随夹角 α 变化趋势图

Fig. 6 The bandgap locations and widths of the lattice vs. α for $L_s/L = 1$

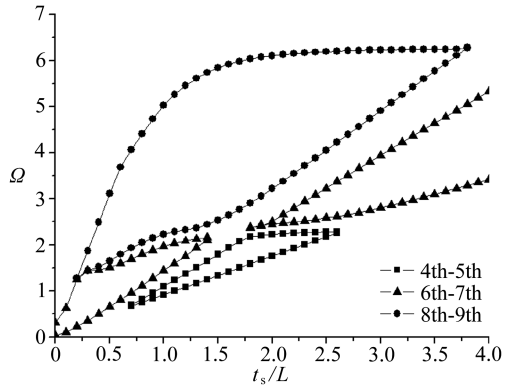


图7 当选取 $\alpha = 70^\circ$,星形节点周期结构频率禁带位置及宽度随梁长细比 t_s/L 变化图

Fig. 7 The bandgap locations and widths of the lattice vs. t_s/L for $\alpha = 70^\circ$

3.2 带隙随 t_s/L 的变化

图7为星形节点周期蜂窝材料 $\alpha = 70^\circ$ 时,频率带隙随梁长细比 t_s/L 变化图.整体而言,相对于普通正方形蜂窝材料,星形节点周期蜂窝材料在不同单元梁长细比下,均有带隙出现,且禁带的位置随其增大而上升.在 $t_s/L < 0.5$ 时,星形节点梁弯曲刚度非常小,从而易于发生弯曲共振模态.而随着 t_s/L 的增大,单胞的整体变形模式不再以星形节点梁的弯曲变形为主,其中星形节点出现以旋转变形为主的共振模态,使得禁带由两个变为3个.同时 t_s/L 对第3频率带隙的大小有着非常大的影响,在 $t_s/L = 1.5$ 时有最大值3.31.值得注意的是,第2频率禁带在 $t_s/L > 2$ 后变得越来越大.

4 总 结

本文就星形节点周期蜂窝材料的频率带隙问题进行一般性研究.其色散曲线图表明,星形节点周期蜂窝材料相对传统的正方形蜂窝材料具有丰富的禁带特性,在低频区域会出现宽而稳定的频率禁带.同时通过分析第1禁带形成过程,发现星形节点自身的局部旋转共振是此带隙形成的最主要原因.

参考文献(References):

- [1] Lakes R. Deformation mechanisms in negative Poisson's ratio materials: structural aspects [J]. *Journal of Materials Science*, 1991, **26**(9): 2287-2292.
- [2] Lakes R. Foam structures with a negative Poisson's ratio [J]. *Science*, 1987, **235**(4792): 1038-1040.
- [3] Prall D, Lakes R. Properties of a chiral honeycomb with a Poisson's ratio of -1 [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1997, **39**(3): 305-314.
- [4] Lakes R, Elms K. Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams [J]. *Journal of Composite Materials*, 1993, **27**(12): 1193-1202.

- [5] Evens K E. Tailoring the negative Poisson's ratio [J]. *Chemistry and Industry*, 1990, **20**: 654-657.
- [6] Lakes R. Advances in negative Poisson's ratio materials [J]. *Advanced Materials*, 1993, **5** (4): 293-296.
- [7] Theocaris P S, Stavroulakis G E, Panagiotopoulos P D. Negative Poisson's ratios in composites with star-shaped inclusions: a numerical homogenization approach [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 1997, **67**(4): 274-286.
- [8] Grima J N, Gatt R, Alderson A, Evans K E. On the potential of connected stars as auxetic systems [J]. *Molecular Simulation*, 2005, **31**(3): 925-935.
- [9] Ruzzene M, Scarpa F, Soranna F. Wave beaming effects in two-dimensional cellular structures [J]. *Smart Materials and Structures*, 2003, **12**(3): 363-372.
- [10] Gonella S, Ruzzene M. Analysis of in-plane wave propagation in hexagonal and re-entrant lattices [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **312**(1/2): 125-139.
- [11] Spadoni A, Ruzzene M, Gonella S, Scarpa F. Phononic properties of hexagonal chiral lattices [J]. *Wave Motion*, 2009, **46**(7): 435-450.
- [12] Liu X N, Hu G K, Sun C T, Huang G L. Wave propagation characterization and design of two-dimensional elastic chiral metacomposite [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, **330** (11): 2536-2553.

Bandgap Properties of Periodic 4-Point Star-Shaped Honeycomb Materials With Negative Poisson's Ratios

YUN Hao¹, DENG Zi-chen^{1,2}, ZHU Zhi-wei²

(1. Department of Architectural and Civil Engineering, Northwestern

Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China;

2. Department of Engineering Mechanics, Northwestern

Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China)

(Contributed by DENG Zi-chen, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The bandgap properties of the periodic 4-point star-shaped honeycomb materials with negative Poisson's ratios were investigated. The in-plane wave propagation in the honeycomb material was analyzed with the finite element method and according to the Bloch theorem. Attention was devoted to determining the influence of the unit cell geometry on the bandgaps. The results show that the 4-point star-shaped honeycomb material has wide bandgaps with relatively stable locations and widths, and the local rotation resonance of the star cells makes the main cause for the formation of the lowest-order bandgaps of the materials. The above bandgap properties of the 4-point star-shaped honeycomb material endow itself with potential application values in the fields of vibration attenuation and noise reduction.

Key words: 4-point star-shaped honeycomb material; negative Poisson's ratio; bandgap; local rotation resonance

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11172239)