

末端质量作用下变长度轴向 运动梁的振动特性*

马国亮¹, 徐明龙¹, 陈立群², 丁虎³

(1. 机械结构强度与振动国家重点实验室(西安交通大学), 西安 710049;

2. 上海大学理学院力学系, 上海 200444;

3. 上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(本刊编委陈立群来稿)

摘要: 对带末端质量,变长度(或速度)轴向运动梁的振动特性采用两种精确方法求解.首先,对变长度轴向运动 Euler(欧拉)梁横向自由振动方程进行化简,通过复模态分析得到本征方程,并在有末端质量的边界条件下得到频率方程,用数值方法求解固有频率和模态函数.然后,采用有限元方法建立运动梁自由振动的方程,求解矩阵方程得到复特征值和复特征向量,结合形函数得到复模态位移.最后,将两种方法的计算结果进行了分析和对比.数值算例的结果表明:不同的轴向运动速度和末端质量对变长度轴向运动梁的振动特性有显著影响,两种计算方法的结果接近且均有效.

关键词: 轴向运动梁; 变长度; 末端质量; 振动特性

中图分类号: O321 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2015.09.001

引 言

轴向运动梁(弦)是轴向运动细长结构的简化模型^[1],如动力传送带、输送带、磁带、带锯、索道、缆绳、带钢等.其中有一类轴向运动结构具有可变长度和速度,甚至有附加集中质量,如伸展(伸缩)臂,套筒式结构、空中加油管等长达数米的机械结构.轴向运动会诱发横向振动,对结构的安全性和可靠性产生影响.因此,研究轴向运动结构的振动特性对工程技术的发展有很大的基础应用价值.

目前,国内外学者已对轴向运动连续体的振动特性、稳定性、响应等方面做了大量工作,发展了解析、半解析和数值方法研究了在不同边界条件下的振动问题.运动连续体振动问题的理论分析和数值求解存在一定难度,近年来成为一个学术热点,如变长度或变速度梁的横向振动^[2-3].国外,Suweken 等研究了可变速 $v(t)$ 传送带的共振^[4],Sandilo 等研究了可变速 $l(t)$ 电梯缆的阻尼振动^[5],Ghayesh 等计算了轴向运动变速 $v(t)$ 梁的稳态响应^[6],Marynowski 等研

* 收稿日期: 2015-04-24; 修订日期: 2015-06-15

基金项目: 国家自然科学基金(11172229)

作者简介: 马国亮(1986—),男,陕西凤翔人,博士生(E-mail: william_hajay@stu.xjtu.edu.cn);
徐明龙(1964—),男,浙江富阳人,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: mlxu@xjtu.edu.cn).

究了轴向运动连续体-弦、梁、板的动力学问题^[7]。国内, Fung 等推导了有集中质量轴向运动梁的动力学方程^[8], 王亮等用 Galerkin(伽辽金)方法研究了有集中质量和弹簧的轴向运动变长度悬臂梁振动控制^[9], 刘宁等也采用 Galerkin 方法研究了移动质量作用下轴向运动悬臂梁振动特性^[10], Galerkin 方法的关键是选择合适的试函数。Chen 等用多尺度方法和差分法研究了轴向运动黏弹性梁主参数共振^[11]。王波对轴向运动黏弹性梁采用多尺度法分析了弱受迫振动的稳态响应^[12], 多尺度法是将空间和时间耦合起来的新方法。随着有限元法的逐步完善, Stylianou 等用有限元法研究轴向运动变长度梁的时域积分^[13], Ćepon 等用近似有限元法计算了轴向运动连续体的动力学响应^[14], Piovan 等将有限元法应用于功能梯度材料的轴向运动梁^[15]。虽然, 有限元软件目前无法计算轴向运动结构的横向振动, 但可理论求解简单运动结构的振动问题。

本文针对带有末端质量的变长度(速度)轴向运动梁, 应用复模态分析法和有限元法推导了运动梁的自由振动方程。通过数值算例求解了不同速度、不同集中质量、不同瞬时横向振动的固有频率和振型, 并对结果进行了分析和对比。

1 理论分析

1.1 复模态分析-半解析解法

应用 Euler-Bernoulli(欧拉-伯努利)梁理论建模。设一带有质量的轴向运动变长度悬臂梁, 长细比大于 5, 密度为 ρ , 横截面积 S , 抗弯刚度为 EI , 轴向运动速度为 v , 运动时间为 τ , 梁的长度变为 $l(v, \tau)$, 末端集中质量为 m 。将未变形前梁的中轴线取作 x 轴, 对称面内与 x 轴垂直向上的轴为 y 轴。那么横向位移为 $y(x, t)$, 轴向坐标 x , 横向坐标 y , 时间 t , 等截面梁作微幅横向振动, 如图 1 所示为轴向运动悬臂梁模型。

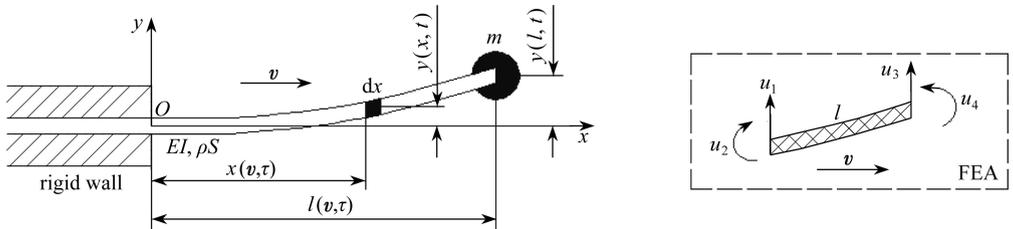


图 1 轴向运动梁

Fig. 1 Schematic of an axially moving beam with a tip mass

可应用 Hamilton(汉密尔顿)原理或 Newton(牛顿)运动定律, 建立 $O-xy$ 内自由振动方程:

$$\rho S \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + 2\rho S v \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x \partial t} + \rho S v \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \rho S v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = 0. \quad (1)$$

变长度梁以匀速 v_0 轴向运动, 且横向位移为长度、坐标和时间的复合函数:

$$y(x, t) = Y[l(v_0, \tau), x, t], \quad (2)$$

$$l(v_0, \tau) = l_0 + v_0 \tau. \quad (3)$$

在相同参考系和时间基准下, $\tau \Leftrightarrow t$, 任意时刻 t , 某长度 l 上, 设分离变量形式的解为

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^N [\phi_n(x) e^{i\omega_n t} + \bar{\phi}_n(x) e^{-i\omega_n t}], \quad (4)$$

式中 $\phi_n(x)$ 是复模态函数, 上划线表示复共轭, ω_n 是固有频率, 代入振动方程得到

$$EI \phi_n'''' + \rho S v_0^2 \phi_n'' + 2i\omega_n \rho S v_0 \phi_n' - \omega_n^2 \rho S \phi_n = 0. \quad (5)$$

设方程(5)的本征值为 $i\beta_j$, 满足 4 次代数方程即本征方程:

$$EI\beta_j^4 - \rho S v_0^2 \beta_j^2 - 2\omega_n \rho S v_0 \beta_j - \rho S \omega^2 = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (6)$$

设 C_i 为常系数,那么式(4)中的模态函数形式为

$$\phi_n(x) = C_1(e^{i\beta_1 x} + C_2 e^{i\beta_2 x} + C_3 e^{i\beta_3 x} + C_4 e^{i\beta_4 x}). \quad (7)$$

变长度悬臂梁一端固定、末端有集中质量 m 的非齐次边界条件为

$$y(0, t) = 0, y_x(0, t) = 0, y_{xx}(l, t) = 0, EI y''' |_{(l, t)} = m \frac{D^2 y}{Dt^2}, \quad (8)$$

边界条件式(8)第4式中的全导数为

$$\frac{D^2 y}{Dt^2} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + v_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right). \quad (9)$$

末端无质量时,退化为齐次边界条件:

$$y(0, t) = 0, y_x(0, t) = 0, y_{xx}(l, t) = 0, y_{xxx}(l, t) = 0. \quad (10)$$

将复模态解式(4)代入边界条件,并对式(8)第4式等式两端同乘以虚数单位 $-i$,使得边界条件中包含刚度的项为实数,若不处理则造成数据的不连续.由边界条件得到系数为 C_i 的齐次方程组,有非零解时系数矩阵行列式为0,即是频率方程式(12).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \beta_1^2 e^{i\beta_1 l} & \beta_2^2 e^{i\beta_2 l} & \beta_3^2 e^{i\beta_3 l} & \beta_4^2 e^{i\beta_4 l} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & a_4 [\beta_2^2 e^{i\beta_2 l} (\beta_1 - \beta_3) + \beta_3^2 e^{i\beta_3 l} (\beta_2 - \beta_1) + \beta_1^2 e^{i\beta_1 l} (\beta_3 - \beta_2)] - \\ & a_3 [\beta_2^2 e^{i\beta_2 l} (\beta_1 - \beta_4) + \beta_4^2 e^{i\beta_4 l} (\beta_2 - \beta_1) + \beta_1^2 e^{i\beta_1 l} (\beta_4 - \beta_2)] + \\ & a_2 [\beta_3^2 e^{i\beta_3 l} (\beta_1 - \beta_4) + \beta_4^2 e^{i\beta_4 l} (\beta_3 - \beta_1) + \beta_1^2 e^{i\beta_1 l} (\beta_4 - \beta_3)] - \\ & a_1 [\beta_3^2 e^{i\beta_3 l} (\beta_2 - \beta_4) + \beta_4^2 e^{i\beta_4 l} (\beta_3 - \beta_2) + \beta_2^2 e^{i\beta_2 l} (\beta_4 - \beta_3)] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

当末端自由不存在集中质量时,由式(10)得到 a_j 为 $\beta_j^3 e^{i\beta_j l}$,有集中质量时, a_j 为

$$[EI\beta_j^3 + imv_0^2 \beta_j^2 + i2mv_0 \omega_n \beta_j + im\omega_n^2] e^{i\beta_j l} = a_j \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (13)$$

频率方程式(12)为超越方程,有无穷多个根,也就对应无穷多个固有频率.频率方程式(12)中的根 $\beta_j(j = 1, 2, 3, 4)$ 与第 n 阶模态函数对应,也视为固有频率 ω_n 的函数.根据频率方程和本征方程数值求解不同速度和时间时的固有频率 ω_n ,进而得到本征值 β_j .再由3个齐次边界条件化简模态函数式(7),代入本征值得到模态函数,通式为

$$\begin{aligned} \phi(x) = C_1 \{ & e^{ix\beta_1} + \{ e^{ix\beta_2} [- e^{i\beta_1} \beta_1^2 (\beta_3 - \beta_4) - \beta_3 \beta_4 (e^{i\beta_3} \beta_3 - e^{i\beta_4} \beta_4) + \\ & \beta_1 (e^{i\beta_3} \beta_3^2 - e^{i\beta_4} \beta_4^2)] - \\ & e^{ix\beta_3} [- e^{i\beta_1} \beta_1^2 (\beta_2 - \beta_4) - \beta_2 \beta_4 (e^{i\beta_2} \beta_2 - e^{i\beta_4} \beta_4) + \beta_1 (e^{i\beta_2} \beta_2^2 - e^{i\beta_4} \beta_4^2)] + \\ & e^{ix\beta_4} [- e^{i\beta_1} \beta_1^2 (\beta_2 - \beta_3) - \beta_2 \beta_3 (e^{i\beta_2} \beta_2 - e^{i\beta_3} \beta_3) + \beta_1 (e^{i\beta_2} \beta_2^2 - e^{i\beta_3} \beta_3^2)] \} / \\ & [e^{i\beta_2} \beta_2^2 (\beta_3 - \beta_4) + \beta_3 \beta_4 (e^{i\beta_3} \beta_3 - e^{i\beta_4} \beta_4) + \beta_2 (e^{i\beta_4} \beta_4^2 - e^{i\beta_3} \beta_3^2)] \}. \end{aligned} \quad (14)$$

为了便于与有限元方法的结果进行对比,本文采用有量纲形式的振动方程,直接数值求解,则固有频率计算结果量纲为赫兹(Hz).

1.2 有限元解法

有限元法将连续梁划分为离散梁单元,一般求解静态的振动问题,现将动态问题化为瞬时静态问题来研究.设某时刻 t ,运动梁有定长度 $l(v_0, t)$,则将变长度悬臂梁分割为有限个运动梁单元.分析其中一个长度为 l 的运动梁单元,如图1右边所示,以两端节点的横向位移 $u_1(t)$, $u_3(t)$,和转角 $u_2(t)$, $u_4(t)$ 为单元节点坐标 u_e :

$$\mathbf{u}_e = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4\}^T. \quad (15)$$

采用静态梁的形函数 $\mathbf{N}^T = \{N_i(l, x)\}$, 即满足某瞬时一定长度 l , 梁的端点处位移和转角为常值, 将梁单元横向位移写作:

$$y(l, x, t) = \sum_{i=1}^4 N_i[l(v_0, t), x] u_i(t) = \mathbf{N}^T \mathbf{u}_e. \quad (16)$$

已知速度对轴向运动梁的模式函数有显著影响, 本文中梁单元具有绝对运动速度, 那么梁单元的形函数也会随速度和时间变化. 先将悬臂梁划分为两类运动梁单元, 第二类具有末端质量 m , 单位长度的质量为 ρS , 有集中质量的梁单元的动能表达式为

$$T_{me} = T_e + \frac{1}{2} \rho S l v_0^2 + T_m + \frac{1}{2} m v_0^2, \quad (17)$$

$$T_m = \frac{1}{2} m \left(\frac{Dy}{Dt} \right)^2 \Big|_{x=l} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{m}_m \dot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{u}_e^T \mathbf{m}_k \mathbf{u}_e + \dot{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{m}_{c1} \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_e^T \mathbf{m}_{c2} \dot{\mathbf{u}}_e), \quad (18)$$

$$T_e = \frac{1}{2} \int_0^l \rho S \left(\frac{Dy}{Dt} \right)^2 dx = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_1 \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_e^T \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{u}}_e + \dot{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{c}_2 \mathbf{u}_e + \dot{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{m}_e \dot{\mathbf{u}}_e). \quad (19)$$

式(17)前两项表示无集中质量梁的动能, 后两项表示有集中质量梁的动能; 式(18)、(19)中, 横向位移 y 对时间 t 的导数, 包含有局部坐标 x 对时间 t 的导数即是轴向速度 v_0 :

$$\frac{Dy}{Dt} = \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{u}_e \mathbf{N}_x^T \cdot v_0. \quad (20)$$

运动梁单元的各矩阵 $\mathbf{m}_m, \mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{c1}, \mathbf{m}_{c2}; \mathbf{m}_e, \mathbf{k}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ 的定义分别如下, 其中矩阵 \mathbf{c}_1 和 \mathbf{c}_2 互为转置矩阵:

$$\mathbf{m}_m = m \mathbf{N} \mathbf{N}^T, \quad \mathbf{m}_k = m v_0^2 \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T, \quad \mathbf{m}_{c1} = \mathbf{m}_{c2}^T = m v_0 \mathbf{N}_x \mathbf{N}^T, \quad (21)$$

$$\mathbf{m}_e = \int_0^l \rho S \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx, \quad \mathbf{k}_1 = \int_0^l \rho S v_0^2 \mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T dx, \quad \mathbf{c}_1 = \int_0^l \rho S v_0 \mathbf{N}_x \mathbf{N}^T dx, \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_1^T. \quad (22)$$

设梁单元的刚度 EI 为常数, 弹性势能为

$$V_{ke} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{u}_e \int_0^l EI N_{xx}^T N_{xx} dx = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e. \quad (23)$$

若悬臂梁划分为 n 个单元, 则有 $4n$ 个节点坐标, $2n$ 个独立变量, 定义独立的节点坐标为广义坐标 $\{q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_{2n}\}$:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0; & q_1 = u_3 = u_5, & q_2 = u_4 = u_6, & q_3 = u_7 = u_9, \\ q_4 = u_8 = u_{10}, & \dots, & q_{2n-1} = u_{4n-1}, & q_{2n} = u_{4n}. \end{cases} \quad (24)$$

那么所有的节点坐标 \mathbf{U} 与广义坐标 \mathbf{q} 之间的关系由坐标转换矩阵 $\boldsymbol{\beta}$ 表示为 $\mathbf{U} = \boldsymbol{\beta} \mathbf{q}$, 然后求得广义坐标 \mathbf{q} 对应的全系统的质量矩阵 \mathbf{M} 、刚度矩阵 \mathbf{K} 等矩阵.

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \boldsymbol{\beta}^T \text{diag}[m_{e_1}, m_{e_2}, \dots, m_{e_{n-1}}, m_{e_n} + m_m] \boldsymbol{\beta}, \\ \mathbf{K} = \boldsymbol{\beta}^T \text{diag}[k_{e_1}, k_{e_2}, \dots, k_{e_n}] \boldsymbol{\beta}, \\ \mathbf{C}_1 = \boldsymbol{\beta}^T \text{diag}[c_{1,e_1}, c_{1,e_2}, \dots, c_{1,e_{n-1}}, c_{1,e_n} + m_{c1}] \boldsymbol{\beta}, \\ \mathbf{C}_2 = \boldsymbol{\beta}^T \text{diag}[c_{2,e_1}, c_{2,e_2}, \dots, c_{2,e_{n-1}}, c_{2,e_n} + m_{c2}] \boldsymbol{\beta}, \\ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\beta}^T \text{diag}[k_{1,e_1}, k_{1,e_2}, \dots, k_{1,e_{n-1}}, k_{1,e_n} + m_k] \boldsymbol{\beta}, \end{cases} \quad (25)$$

上式中下标 $e_i (i=1, 2, \dots, n)$ 表示第 i 个单元, 然后写出全系统的 Lagrange (拉格朗日) 函数 L :

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{q} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (26)$$

代入到第二类 Lagrange 方程

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}^T} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \right] = \mathbf{0}, \tag{27}$$

从而得到有限元法推导的自由振动方程

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_2^T)\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_1)\mathbf{q} = \mathbf{0}. \tag{28}$$

振动方程(28)与静止弯曲梁的有限元振动方程相比,包含了轴向运动速度的影响.最后,根据式(28)求解复特征值,虚部即是固有频率,再代入式(16)得到横向位移.当有多个不同位置的集中质量时,计算的过程类似.

2 数值算例

2.1 半解析解法和有限元法算例

考虑工程应用背景,如伸展(伸缩)臂,套筒式结构、空中加油管等一般为悬臂结构,末端有载荷即集中质量.悬臂梁材料选取具有高强度和低密度特点的碳纤维材料 T800,密度 $\rho = 1.81 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,初始长度 $l_0(t) = 5 \text{ m}$,直径 $d = 0.1 \text{ m}$,弹性模量 $E = 2.94 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$,集中质量 $m = 5 \text{ kg}$ 和 25 kg .按照前述理论分析,根据本征方程、频率方程,用 MATLAB 软件对高阶方程数值求根的方法求解不同速度、不同时间和质量下的固有频率和模态函数.为了和半解析解进行对比,以两单元梁为例,其物理参数和边界条件与前述一致.用 Mathematica 软件求解振动方程,得到不同速度、不同时间和质量下的复特征值,虚数部分为固有频率,实数部分为减缩系数.再根据各阶复特征值计算复特征向量,结合形函数 $N_i(l, x)$ 得到各单元的复模态位移.将每个单元衔接得到整体模态位移.若要进一步得到更精确的解,则增加单元数量,但计算量也会随之增加.

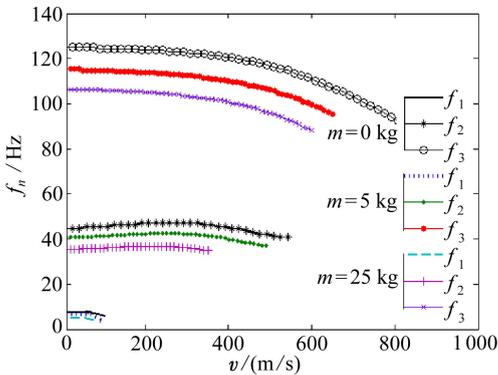


图2 半解析法,频率随速度变化

Fig. 2 The semi-analytical method, f_n vs. velocity

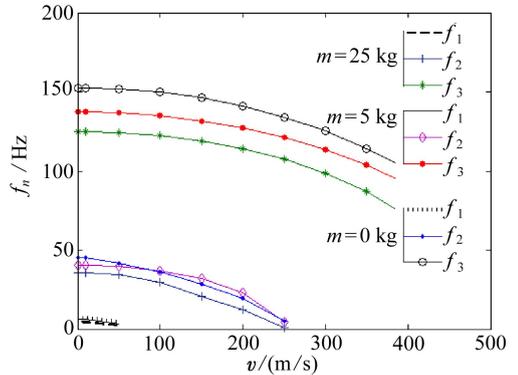


图3 有限元法,频率随速度变化

Fig. 3 FEM, f_n vs. velocity

2.2 振动特性比较

将半解析法和有限元计算的固有特性进行比较.其中固有频率的比较如图 2~5 和表 1 所示 ($v = 10 \text{ m/s}$, 300 m/s).无论半解析解法还是有限元法,各阶固有频率的计算结果接近,速度和集中质量增大,频率逐渐变小;其它条件一定时,当速度增大到一定程度,固有频率趋于 0,振动为不稳定状态.

半解析法求解的模态为复模态,有限元计算的复位移虚部 (\bar{I}) 不明显,实部 (\bar{R}) 接近真实状态的弯曲振型,如图 6、7 所示不同末端质量时的弯曲模态.低速时(如 $v = 10 \text{ m/s}$),弯曲模态

比较规则;随着速度的增大(如 $v > 50 \text{ m/s}$),各阶弯曲模态振型(位移)越不规则,如图 8(a)所示.时间 t 决定长度 $l(t)$ 的变化,不同时间对应不同长度的模态,模态振型随长度和时间变化,当速度为 1 m/s 、时间 $0 \sim 1 \text{ s}$ 时,对应长度 $5 \sim 6 \text{ m}$ 的模态振型,如图 8(b)所示.

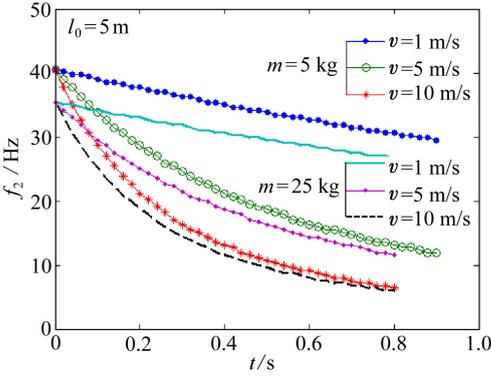


图 4 半解析法, f_2 随时间变化

Fig. 4 The semi-analytical method, f_2 vs. time

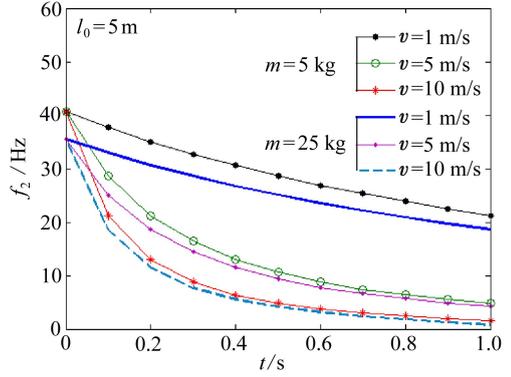


图 5 有限元法, f_2 随时间变化

Fig. 5 FEM, f_2 vs. time

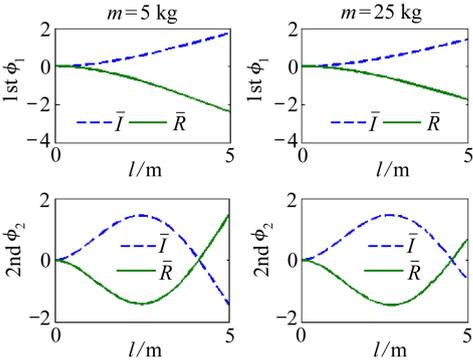


图 6 半解析法, $v = 10 \text{ m/s}$, 模态振型

Fig. 6 The semi-analytical method, $v = 10 \text{ m/s}$, modal shape

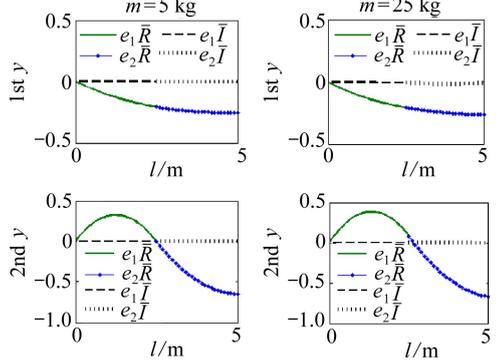


图 7 有限元法, $v = 10 \text{ m/s}$, 模态位移

Fig. 7 FEM, $v = 10 \text{ m/s}$, modal displacement

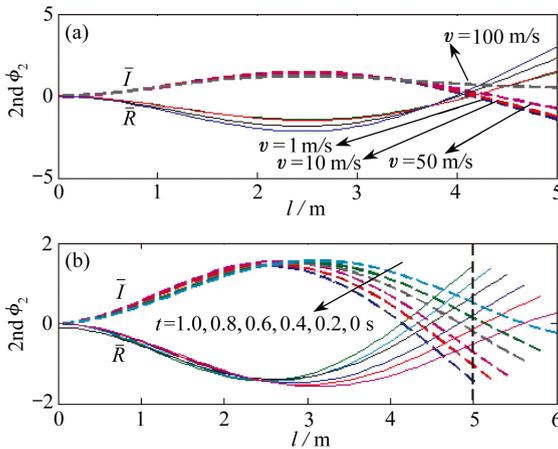


图 8 $l_0 = 5 \text{ m}$, $v = 1 \sim 100 \text{ m/s}$, $m = 5 \text{ kg}$, 模态变化

Fig. 8 $l_0 = 5 \text{ m}$, $v = 1 \sim 100 \text{ m/s}$, $m = 5 \text{ kg}$, modal shape variations

表 1 固有频率比较
Table 1 Frequency comparison

parameter	$v = 10 \text{ m/s}$			$v = 300 \text{ m/s}$
	f_1 / Hz	f_2 / Hz	f_3 / Hz	f_3 / Hz
$m = 0$, FEM	7.13	45.08	152.5	125.2
$m = 5 \text{ kg}$, FEM	6.24	40.67	137.1	113.6
$m = 25 \text{ kg}$, FEM	4.36	35.45	124.8	98.57
$m = 0$, analysis	7.18	44.68	125.0	122.3
$m = 5 \text{ kg}$, analysis	6.37	40.45	115.3	112.4
$m = 25 \text{ kg}$, analysis	4.78	35.43	106.4	103.5

3 总 结

本文分别应用半解析和有限元方法建立了末端质量作用下变长度(速度)轴向运动梁自由振动方程,并求解了不同条件下的振动特性.计算结果表明,固有频率随速度的增加而减小,随时间(长度)的增加而减小,集中质量增加,频率值也减小.半解析求解的弯曲模态为复模态,有限元求解的弯曲模态实部显著,质量的大小也影响模态的大小.固有频率的对比表明,不同计算方法求得的固有频率接近.总之,固有模态反映各种振源下的振动响应,根据模态分析的结果可以进行结构动态设计和故障诊断,对物理参数进行优化,设计安全、可靠的运动结构.

参考文献(References):

- [1] Mote Jr C D. Dynamic stability of axially moving materials[J]. *Shock and Vibration*, 1972, **4**(4): 2-11.
- [2] Tabarrok B, Leech C M, Kim Y I. On the dynamics of an axially moving beam[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 1974, **297**(3): 201-220.
- [3] Öz H R, Pakdemirli M. Vibrations of an axially moving beam with time dependent velocity[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, **227**(2): 239-257.
- [4] Suweken G, Van Horssen W T. On the transversal vibrations of a conveyor belt with a low and time-varying velocity—part II: the beam-like case [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, **267**(5): 1007-1027.
- [5] Sandilo S H, Van Horssen W T. On boundary damping for an axially moving beam and on the variable length induced vibrations of an elevator cable[C]//*In Proceedings of the 7th European Nonlinear Oscillations Conference*. Rome, Italy, 2011.
- [6] Ghayesh M H, Amabili M. Steady-state transverse response of an axially moving beam with time-dependent axial speed[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2013, **49**: 40-49.
- [7] Marynowski K, Kapitaniak T. Dynamics of axially moving continua[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014, **81**: 26-41.
- [8] Fung R F, Lu P Y, Tseng C C. Non-linearly dynamic modeling of an axially moving beam with a tip mass[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, **218**(4): 559-571.
- [9] 王亮, 陈怀海, 贺旭东, 游伟倩. 轴向运动变长度悬臂梁的振动控制[J]. 振动工程学报, 2009, **22**(6): 565-570. (WANG Liang, CHEN Huai-hai, HE Xu-dong, YOU Wei-qian. Vibration control of an axially moving cantilever beam with varying length[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2009, **22**(6): 565-570. (in Chinese))
- [10] 刘宁, 杨国来. 移动质量作用下轴向运动悬臂梁振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2012, **31**(3):

- 102-105.(LIU Ning, YANG Guo-lai. Vibration property analysis of axially moving cantilever beam considering the effect of moving mass[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, **31**(3): 102-105.(in Chinese))
- [11] CHEN Li-qun, DING Hu, Lim C W. Principal parametric resonance of axially accelerating viscoelastic beams: multi-scale analysis and differential quadrature verification[J]. *Shock and Vibration*, 2012, **19**(4): 527-543.
- [12] 王波. 轴向运动三参数黏弹性梁弱受迫振动的渐近分析[J]. 应用数学和力学, 2012, **33**(6): 771-780.(WANG Bo. Asymptotic analysis on weakly forced vibration of an axially moving viscoelastic beam constituted by standard linear solid model[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **33**(6): 771-780.(in Chinese))
- [13] Stylianou M, Tabarrok B. Finite element analysis of an axially moving beam—part I: time integration[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, **178**(4): 433-453.
- [14] Čepón G, Boltežar M. Computing the dynamic response of an axially moving continuum[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **300**(1/2): 316-329.
- [15] Piovan M T, Sampaio R. Vibrations of axially moving flexible beams made of functionally graded materials[J]. *Thin-Walled Structures*, 2008, **46**(2): 112-121.

Vibration Characteristics of an Axially Moving Variable Length Beam With a Tip Mass

MA Guo-liang¹, XU Ming-long¹, CHEN Li-qun², DING Hu³

(1. *State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures (Xi'an Jiaotong University), Xi'an 710049, P.R.China;*

2. *Department of Mechanics, College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, P.R.China;*

3. *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China)*

(Contributed by CHEN Li-qun, M. AMM Editorial Board)

Abstract: A semi-analytical method and a numerical method were used to investigate the vibration characteristics of an axially moving variable length (velocity) beam with a tip mass. First, the equation of transverse free vibration for the axially moving Euler beam was simplified. The eigenequation was derived with the complex modal analysis method. Moreover, the frequency equation was obtained under the boundary conditions with a tip mass. The numerical method was used to calculate the natural frequencies and modal shapes. Then, the equation of transverse free vibration was also derived with the finite element method (FEM). The complex eigenvalues and eigenvectors were obtained as solutions to the complex matrix equation, and the complex modal displacements were given through combination with the shape functions. Finally, the results from these 2 methods were comparatively analyzed. The numerical example illustrates that different velocities and tip masses influence the beam vibration characteristics significantly. The calculated results from the 2 methods are close to each other and effective.

Key words: axially moving beam; variable length; tip mass; vibration characteristic

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11172229)